CORRIGE BAC BLANC 2

Exercice 1 : (……. / 4 pts)

1. Entre 2006 et 2018, dans un restaurant universitaire, le prix du repas est passé de 2 euros à 3,50 euros en augmentant chaque année de x %. Parmi ces valeurs, la valeur la plus proche de x est :
   a. 6,25 **b. 4,77** c. 14,58 d. 0,85

   Justification non demandée ; $2 \times 1{,}0477^{12} \approx 3{,}50$

2. Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) - \ln(a^2)$ est égal à :
   a. $\mathbf{\ln \frac{b}{a}}$ b. $\ln \frac{a}{b}$ c. $\ln(b - a)$ d. $\ln(a - b)$

   Justification non demandée : $\ln(ab) - \ln(a^2) = \ln(\frac{ab}{a^2}) = \ln \frac{b}{a}$

3. u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,2 .
   On pose $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   a. $S = \frac{1-0{,}2^n}{1-0{,}2}$ b. $S = \frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2}$ c. $S = 6 \times \frac{1-0{,}2^n}{1-0{,}2}$ **d.** $\mathbf{S = 6 \times \frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2}}$

   Justification non demandée : Somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 6 et de raison 0,2

4. Une des solutions de l'inéquation $1 - 0{,}85^n > 0{,}99$ d'inconnue n entier naturel est :
   a. 28 **b. 29** c. $\frac{ln 0{,}01}{ln 0{,}85}$ d. 28,336

   Justification non demandée : La solution doit être un entier. Par test, il s'agit de 29.

Exercice 2 : (…… / 5 pts)

Lors d'une course cyclosportive, 70% des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés. Aucun participant n'abandonne la course.

- Parmi les licenciés, 66% font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83% font le parcours en plus de 5 heures ; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\bar{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\bar{M}$ son évènement contraire,

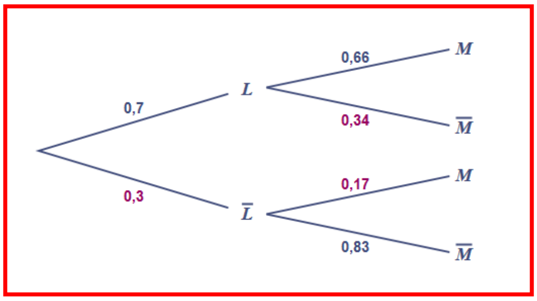
1. A l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\bar{L}}(\bar{M})$

70 % des participants sont licenciés dans un club d'où $\mathbf{P(L) = 0{,}7}$.

Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures d'où $\mathbf{P_L(M) = 0{,}66}$.

Parmi les non licenciés, 83 % d'où $\mathbf{P_{\bar{L}}(\bar{M}) = 0{,}83}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation :



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.
   $P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M)$ soit $P(L \cap M) = 0{,}7 \times 0{,}66$; $\mathbf{P(L \cap M) = 0{,}462}$.
   La probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures est égale à 0,462.

4. Justifier que $P(M) = 0{,}513$.
L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers . D'après la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(L\cap M) + P(\bar{L}\cap M)$; $P(M) = 0{,}462 + P(\bar{L})\times P_{\bar{L}}(M)$; $P(M) = 0{,}462 + 0{,}3 \times 0{,}17$; $\boldsymbol{P(M) = 0{,}513}$
La probabilité que le cycliste interrogé fasse le parcours en moins de 5 heures est égale à 0,513.

5. Un organisateur affirme qu'au moins 90% des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.
$P_M(L) = \frac{P(L\cap M)}{P(M)}$: $P_M(L) = \frac{0{,}462}{0{,}513}$; $P_M(L) \approx 0{,}901$; $P_M(L) > 0{,}9$.
Par conséquent, l'organisateur a raison d'affirmer qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club.

6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures ; On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

Comme la probabilité qu'un cycliste fasse le parcours en moins de 5 heures est égale à 0,513 et que le nombre de cyclistes est suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise alors**, *X* suit la loi binomiale de paramètres *n*=10 et *p*=0,513.**

   b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

$P(X=4) = \binom{10}{4}\times 0{,}513^4\times(1-0{,}513)^6$; $\boldsymbol{P(X=4) \approx 0{,}194}$. (A la calculatrice)

Arrondie à 10^{-3} près, la probabilité qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures est 0,194.

   c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

À l'aide de la calculatrice, $P(X\leqslant 3) \approx 0{,}151$.
Arrondie à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures est 0,151.

<u>Exercice 3</u> : (…… / 5 pts)

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.

Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4%.

Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5% et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On note a_n le capital, en euros, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A.
b_n le capital, en euros, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.
On a donc : $a_0 = b_0 = 20\,000$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 1{,}04\, a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 1{,}025\, b_n + 330.$$

1. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat A.
   a. Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans.

La suite (a_n) définie par $a_0 = 20\,000$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1{,}04 \times a_n$ est une géométrique de raison 1,04 et de premier terme 20 000.

Donc pour tout entier naturel n, $a_n = 20000 \times 1{,}04^n$. D'où $a_{10} = 20000 \times 1{,}04^{10}$; $\boldsymbol{a_{10} \approx 29605}$.

Au bout de 10 ans, le capital disponible est d'environ 29 605 euros.

   b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1%.

$1{,}04^{10} \approx 1{,}48$. **Au bout de 10 ans, le capital obtenu a augmenté d'environ 48 %.**

2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 13200 + b_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 1,025 et calculer son premier terme u_0

Pour tout entier n,
$u_{n+1} = 13200 + b_{n+1}$; $u_{n+1} = 13200 + 1{,}025 \times b_n + 330$; $u_{n+1} = 13530 + 1{,}025 \times b_n$; $u_{n+1} = 1{,}025(13200 + b_n)$;
$\boldsymbol{u_{n+1} = 1{,}025 u_n}$
Ainsi : **(u_n) est une suite géométrique de raison 1,025 dont le premier terme $u_0 = 13200 + 20000 = 33200$.**

   b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 33200 \times 1{,}025^n$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = 33\,200 \times 1{,}025^n - 13\,200$.

Comme pour tout entier naturel n, $u_n = 13200 + b_n \Leftrightarrow b_n = u_n - 13200$ on en déduit que :
pour tout entier naturel n, on a $b_n = 33200 \times 1{,}025^n - 13200$.

   d. Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.

A l'aide du tableur ou par résolution d'une inéquation :
Le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros au bout d'un nombre d'années n, plus petit entier solution de l'inéquation $b_n > 40000$. Soit :
$33200 \times 1{,}025^n - 13200 > 40000 \Leftrightarrow 33200 \times 1{,}025^n > 53200 \Leftrightarrow 1{,}025^n > \frac{532}{332} \Leftrightarrow \ln(1{,}025^n) > \ln(\frac{133}{83})$ (La fonction ln étant strictement croissante) $\Leftrightarrow n \times \ln(1{,}025) > \ln(\frac{133}{83}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\frac{133}{83})}{\ln(1{,}025)}$. Comme $\frac{\ln(\frac{133}{83})}{\ln(1{,}025)} \approx 19{,}1$alors, le plus petit entier n solution de l'inéquation $b_n > 40000$ est $n=20$.
Le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros au bout de 20 ans

3 a.

Valeur de A	20000	20800	21632	22497	23397	24333	25306
Valeur de B	20000	20830	21681	22553	23447	24363	25302
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $A \leqslant B$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	**FAUSSE**

b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

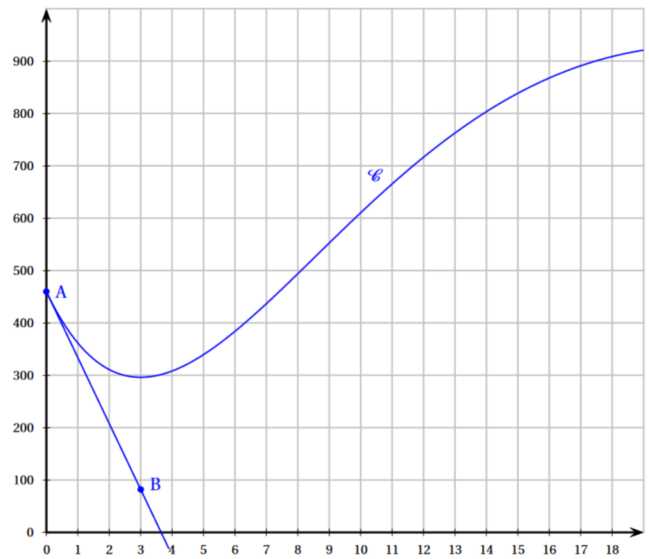
N=6. Le contrat A est plus avantageux pour un placement d'une durée supérieure ou égale à six ans.

<u>Exercice 4</u> : (…… / 6 pts)

Partie A :

La courbe ($\mathscr{C}$) ci-contre, associée à une fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année 0) et le 1er janvier 2019 (année 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.

Ainsi, le 1er janvier 2000, la chaîne a été regardée par environ 460 000 spectateurs.



1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.

On constate une baisse de l'audience pendant les trois premières années ensuite, à partir du 1er janvier 2003 une augmentation de l'audience avec un ralentissement de la croissance au cours de l'année 2008.

2. Donner une valeur approchée du nombre de spectateurs le 1er janvier 2014.

Avec la précision permise par le graphique, le 1er janvier 2014, l'audience était d'environ 800 000 téléspectateurs.

3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A(0 ; 460) et B(3 ; 82), est la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.

   Déterminer la valeur de *f* '(0) où *f* ' désigne la fonction dérivée de la fonction *f* représentée par ($\mathscr{C}$).

Le nombre dérivé *f* '(0) est égal au coefficient directeur de la tangente (AB) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A d'abscisse 0 :

$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; $f'(0) = \frac{82-460}{3-0}$; $\boldsymbol{f'(0) = -126}$

Partie B :

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années. On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 29] par : $f(x) = (20x^2 - 80x + 460)e^{-0,1x}$ où *x* représente le nombre d'années depuis 2000 (Par exemple : *x* = 19 pour l'année 2019)

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.

$f(14) = (20\times14^2-80\times14+460)\ e^{-1,4}$; $f\,14) \approx 803,9$.

Le 1er janvier 2014 l'audience de la chaîne était d'environ 804 000 téléspectateurs.

2. On note *f* ' la fonction dérivée de *f* sur l'intervalle [0 ; 29].

   a. Démontrer que *f* ' est définie par : $f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)e^{-0,1x}$.

La fonction *f* est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables : *f* = *u v* d'où *f* ' =*u*'*v*+*uv*' avec pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; 29] : *u*(*x*) = $= 20x^2 - 80x + 460$; *u* '(*x*) = $= 40x - 80$

$v(x) = e^{-0,1x}$; $v'(x) = -0,1e^{-0,1x}$

Soit pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; 29], $f'(x) = (40x - 80)e^{-0,1x} + (20x^2 - 80x + 460)(-0,1)e^{-0,1x}$;

$f'(x) = e^{-0,1x}[(40x - 80) + (20x^2 - 80x + 460)(-0,1)]$; $f'(x) = e^{-0,1x}(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46)$

$\boldsymbol{f'(x) = e^{-0,1x}(-2x^2 + 48x - 126)}$

   b. Déterminer le signe de *f* '(*x*) sur l'intervalle [0 ; 29] et construire le tableau des variations de *f* sur l'intervalle [0 ; 29]. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.

Sachant que $e^{-0,1x} > 0$ pour tout nombre réel, le signe de *f* ' sera le même que celui de $-2x^2 + 48x - 126$.

Etude du signe de $-2x^2 + 48x - 126$:

$\Delta = 1296$;

$X_1 = 21$ et $X_2 = 3$.

$a = -2$ ($a < 0$)

x	0		3		21		29
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	460	↘	≈ 296	↗	≈ 931	↘	≈ 823

c. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifier.

Le maximum de la fonction f est atteint pour $x = 21$ et $f'(21) < 931$ par conséquent, le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision ne dépassera pas la barre du million avant l'année 2029.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution α dans l'intervalle [3 ; 21].
Donner un encadrement d'amplitude 1 de α

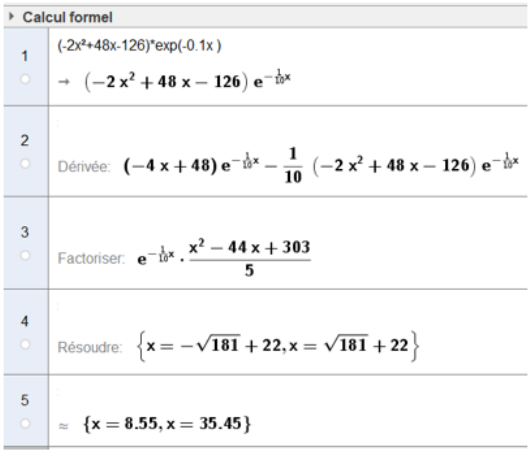
- Pour tout réel x de l'intervalle [0 ;3] on a $f(x) < 800$ donc sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 800$ n'a pas de solution.
- Sur l'intervalle [3 ; 21], la fonction f est continue, strictement croissante et $f(3) < 800 < f(21)$ alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : **l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution $\alpha \in [3 ;21]$.**
- Pour tout réel x de l'intervalle [21 ;29], on a $f(x) > 800$ donc sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 800$ n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution $\alpha \in [3 ; 21]$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $13 < \alpha < 14$.

b. Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000 ?

$13 < \alpha < 14$: On en déduit que c'est **au cours de l'année 2013 que le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera 800 000.**

4. On donne ci-contre des résultats obtenus par le logiciel de calcul formel de GeoGebra



a. Quelle fonction est exprimée en ligne 3 ?

Il s'agit de la factorisation de la fonction dérivée seconde f''

b. Donner le sens graphique de la valeur arrondie 8,55 donnée en ligne 5. Justifier la réponse.

Le signe de f'' dépend du signe de $(x^2 - 44x + 383)$ dont les racines sont calculées en 4 (en valeur exacte) et en 5 (en valeur arrondie).

$a = 1$ ($a > 0$)

x	0		≈8,55		29
Signe de f''		+	0	-	

Ainsi f'' s'annule en changeant de signe pour environ 8,55.

8,55 est donc la valeur arrondie de **l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle [0 ; 29]**