9 p. 143 :

9 **a.** L'unité de coût total est 1 centaine d'euros par kg $\times$ 1 kg, soit 1 centaine d'euros.

Pour tout réel $q \in [0;8]$, $C(q) = 2 + \int_0^q C_m(q)\ dq$.

Or une primitive de la fonction C_m est :

$q \mapsto \frac{e^{-0,2q}}{-0,2} + 0,5\frac{q^2}{2} + 5q = -5e^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q$.

Donc $C(q) = 2 + (-5e^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q) - (-5e^0)$,
soit $C(q) = 7 - 5e^{-0,2q} + 0,25q^2 + 5q$.

63 p. 154

63 Coût total à partir d'un coût marginal

Les primitives de la fonction C_m sur $[0;3]$ sont les fonctions $q \mapsto q^3 - 6q^2 + 13q + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Or le coût total C est la primitive de C_m qui vaut 1 en 0.
Donc $C(q) = q^3 - 6q^2 + 13q + 1$.

64 p. 154

64 Bénéfice marginal et bénéfice total

1 Les primitives de f sur $[0;6]$ sont les fonctions $x \mapsto x - 3e^{-x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Or le bénéfice total B est la primitive de f telle que $B(1) = 0$.
Donc $1 - 3e^{-1} + k = 0$, soit $k = 3e^{-1} - 1$.
Donc $B(x) = x - 3e^{-x} + 3e^{-1} - 1$.
Le bénéfice marginal étant en euro par kilo, soit en millier d'euros par tonne, et les quantités étant en tonne, on obtient que le bénéfice total est en millier d'euros.

2 **a.** $B'(x) = f(x) = 1 + 3e^{-x}$. Or $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x de $[0;6]$, $B'(x) > 0$. La fonction B est donc croissante sur $[0;6]$.

b. Vu à la question **a.**.

c. $B(6) = 6 - 3e^{-6} + 3e^{-1} - 1 = 5 - 3e^{-6} + 3e^{-1} \approx 6,1$.
Le bénéfice total pour 6 tonnes de poudre est d'environ 6 100 €.

46 p. 153

46 Lien entre primitive et intégrale

1 **a.** Pour $f(x) = x^2 - x + 1$, $\Delta = -3$ négatif. Et $a = 1$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

b. $F'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} + 1 = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 **a.**
$$\int_1^2 f(t)\ dt = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1\right) = \frac{11}{6}.$$

b.
$$\int_{-2}^3 f(t)\ dt = F(3) - F(-2) = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right) = \frac{85}{6}.$$

3 **a.**
$$\int_1^x f(t)\ dt = F(x) - F(1) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{6}.$$

b. La primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est définie par $G(x) = \int_1^x f(t)\ dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{6}$.

47 p. 153

47 Calculer des intégrales

1 **a.** $F'(x) = (-1)e^{-0,5x} - (x+5)(-0,5e^{-0,5x})$

$= e^{-0,5x}(-1 + 0,5x + 2,5) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. $\int_0^4 f(x)\ dx = F(4) - F(0)$

$= -(4+5)e^{-2} + 5e^0 = 5 - 9e^{-2} \approx 3,782$.

c. On obtient :

```
intégrFonct((0.5
X+1.5)*e^(-0.5X)
,X,0,4)
        3.781982451
```

Ce qui confirme le résultat obtenu à la question **b.**.

2 **a.** $F'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. $\int_0^4 f(x)\ dx = F(4) - F(0) = 4^2 e^{-4} - 0 = 16e^{-4} \approx 0,293$.

On obtient :

```
intégrFonct((2X-
X²)*e^(-X),X,0,4
)
         .2930502222
```

Ce qui confirme le résultat obtenu à la question **b.**.

67 p. 155

67 Vrai ou faux ?

a. Faux : il n'y a pas de lien entre ces deux intégrales.

$\int_1^0 f(x)\ dx = F(0) - F(1)$.

Contre-exemple : la fonction F peut être décroissante sur $[0 ; 1]$.

b. Faux : $\int_2^{-1} f(x)\ dx = -\int_{-1}^{2} f(x)\ dx$.

c. Vrai : $\int_a^a f(x)\ dx = F(a) - F(a) = 0$.

d. Vrai : $\int_1^0 f(x)\ dx = -\int_0^1 f(x)\ dx$.

68 p. 155

68 Vrai ou faux ?

a. Faux : c'est f qui est la dérivée de F.

b. Vrai : c'est la définition.

c. Vrai : $F' = f$ positif, donc F est croissante.

d. Faux : contre-exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ et $F(x) = \ln(x)$ sur $]0 ; 5]$.

e. Faux : contre-exemple $f(x) = 0$ et $F(x) = 1$ sur $[-5 ; 5]$.

71 p. 155

71 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = -x^2 + 3x$.

Donc $\int_{-1}^{2} f(x)\ dx = F(2) - F(-1) = 6$ car :

$F(2) = -4 + 6 = 2$ et $F(-1) = -1 - 3 = -4$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$F(x) = x^3 - x^2 - x$.

Donc $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx = F(5) - F(-1) = 96$ car :

$F(5) = 5^3 - 5^2 - 5 = 95$ et $F(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$.

72 p. 155

72 Calculs d'intégrales

a. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Donc une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$

est F telle que $F(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Donc $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = F(2) - F(1) = 0{,}5$ car :

$F(2) = 2 + \dfrac{1}{2} = 2{,}5$ et $F(1) = 1 + 1 = 2$.

b. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$. Donc une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$

est F telle que $F(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$.

Donc $\displaystyle\int_1^5 f(x)\ \mathrm{d}x = F(5) - F(1) = 8{,}8$ car :

$F(5) = 10 - 0{,}2 = 9{,}8$ et $F(1) = 2 - 1 = 1$.

73 p. 155

73 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = \mathrm{e}^x$.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ \mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}63$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2\mathrm{e}^x$.

Donc $\displaystyle\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 6{,}5 - 2\mathrm{e}^3 \approx -33{,}67$

car $F(3) = 4{,}5 - 2\mathrm{e}^3$ et $F(0) = -2$.

74 p. 155

74 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\ \mathrm{d}x = F(\ln(2)) - F(0) = \ln(2) - 0{,}5 \approx 0{,}19$

car $F(\ln(2)) = \ln(2) + \mathrm{e}^{-\ln(2)} = \ln(2) + 0{,}5$ et $F(0) = 1$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$F(t) = t^2 + 2\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = F(10) - F(0) = 98 + 2\mathrm{e}^{-1} \approx 98{,}74$

car $F(1) = 100 + 2\mathrm{e}^{-1}$ et $F(0) = 2$.

75 p. 155

75 Calculs d'intégrales

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(x) = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\ \mathrm{d}x = F(\ln(2)) - F(0) = 2{,}5$ car :

$F(\ln(2)) = 2\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)} = 4 - 0{,}5 = 3{,}5$

et $F(0) = 2 - 1 = 1$.

b. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(t) = \frac{t^3}{3} - 0{,}4\mathrm{e}^{0{,}5t}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = F(1) - F(0) = \dfrac{11}{15} - 0{,}4\mathrm{e}^{0{,}5} \approx 0{,}07$

car $F(1) = \dfrac{1}{3} - 0{,}4\mathrm{e}^{0{,}5}$ et $F(0) = -0{,}4$.

76 p. 155

76 Calculs d'intégrales

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = -e^{-x^2}$.

Donc $\int_0^1 f(x)\ dx = F(1) - F(0) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$

et $\int_{-1}^0 f(x)\ dx = F(0) - F(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$.

77 p. 155

77 Intégrales à l'aide de *Xcas*

• Ligne de commande 1 : On calcule $\int_0^{10} f(x)\ dx$ avec :

$$f(x) = 30e^{-\frac{x}{5}} + 1.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que :

$$F(x) = -150e^{-\frac{x}{5}} + x.$$

Donc $\int_0^{10} f(x)\ dx = F(10) - F(0) = -150e^{-2} + 160$

car $F(10) = -150e^{-2} + 10$ et $F(0) = -150$.

• Ligne de commande 2 : On calcule $\int_1^4 f(x)\ dx$ avec :

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^2 - 4x + 1.$$

Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est F telle que :

$$F(x) = 3\ln(x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x.$$

Donc $\int_1^4 f(x)\ dx = F(4) - F(1) = 3\ln(4) - 6$

car $F(4) = 3\ln(4) - \frac{20}{3}$ et $F(1) = -\frac{2}{3}$.

78 p. 155

78 Vrai ou faux ?

On lit le signe de f sur $\mathbb{R}$ et on en déduit le sens de variation de la primitive F. Donc :

a. Faux : f est positive sur $]-\infty;1]$, donc F est croissante sur $]-\infty;1]$.

b. Faux : f n'est pas de signe constant sur $[2;+\infty[$, donc F n'est pas monotone sur $[2;+\infty[$.

c. Vrai : f est positive sur $[5;+\infty[$, donc F est croissante sur $[5;+\infty[$.

d. Vrai : f est négative sur $[1;5]$, donc F est décroissante sur $[1;5]$.

79 p. 156

79 Intégrale et aire

1 $\mathcal{A} = \int_1^3 x\ dx - \int_1^3 \ln(x)\ dx = \int_1^3 (x - \ln(x))\ dx$,

avec 1 u.a. = 1 cm × 1 cm = 1 cm².

2 On obtient à la calculatrice :

```
intégrFonct(X-ln
(X),X,1,3)
         2.704163134
```

Donc $\mathcal{A} \approx 2{,}70$ u.a. $= 2{,}70$ cm².

3 Soit $G(x) = x\ln(x) - x$.

$$G'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Donc G est une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$.

Donc une primitive de f telle que $f(x) = x - \ln(x)$ est F telle que $F(x) = \frac{x^2}{2} - G(x) = \frac{x^2}{2} - x\ln(x) + x$.

Ainsi, $\mathcal{A} = F(3) - F(1) = 6 - 3\ln(3)$ en cm², car :

$F(3) = 7{,}5 - 3\ln(3)$ et $F(1) = 1{,}5$.

80 p. 156

80 Lien entre aire et intégrale

1 **a.** Pour tout réel $x \in [0,5;6]$, $f(x) = \dfrac{-x^2+7x-10}{x}$,
est du signe de $-x^2+7x-10$ sur $[0,5;6]$.
Pour le numérateur, $\Delta = 9$, $x_1 = 5$ et $x_2 = 2$.
Comme $a = -1$ négatif, on a le tableau de signes :

x	0,5		2		5		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[2;5]$, et en dessous de l'axe des abscisses sur $[0,5;2]$ et sur $[5;6]$.

2 **a.** Une primitive de f sur $[0,5;6]$ est F telle que :
$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x).$$
b. Les primitives de f sur $[0,5;6]$ sont les fonctions :
$x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Comme $G(1) = 0$, on résout :
$-\dfrac{1^2}{2} + 7 - 10\ln(1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -6{,}5$.
Donc G est définie sur $[0,5;6]$ par :
$G(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 7x - 10\ln(x) - 6{,}5$.
c. $\displaystyle\int_2^5 \left(-x + 7 - \frac{10}{x}\right) dx = F(5) - F(2) = 10{,}5 - 10\ln(2{,}5)$
car $F(5) = 22{,}5 - 10\ln(5)$ et $F(2) = 12 - 10\ln(2)$.
Il s'agit de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[2;5]$, exprimée en unité d'aire.