LOI UNIFORME

Exercice 1 : On choisit un nombre au hasard entre 0 et 4.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entre 0,5 et 0,7 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre π ?

CORRIGE : Choisir au hasard un nombre entre 0 et 4 revient à choisir ce nombre selon la loi uniforme sur [0;4].

1) $p(0{,}5 \leq X \leq 0{,}7) = \frac{0{,}7-0{,}5}{4-0} = \frac{0{,}2}{4} = 0{,}05$

2) $p(\pi) = 0$ ou $p(\pi) = \frac{\pi-\pi}{4-0} = 0$

Exercice 2 : X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

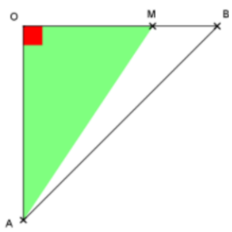
Déterminer la fonction densité de probabilité.

CORRIGE : La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [-2 ; 3]. Par conséquent, la fonction f, densité de probabilité, est définie par $f(x) = \frac{1}{3-(-2)}$; $f(x) = \frac{1}{5}$

Exercice 3 :

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O tel que $OA = 1$. On désigne par M un point de $[OB]$ choisi aléatoirement. X est la variable aléatoire égale à l'aire du triangle OAM.

Sur quel intervalle X suit-elle la loi uniforme ?



CORRIGE : Le triangle OAB est rectangle en O et M es un point de [OB] donc le triangle OAM est rectangle en O.

Ainsi son aire $\mathscr{A} = \frac{OM \times OA}{2} = \frac{OM}{2}$

Par ailleurs, OAB est isocèle en O donc OB = OA = 1.

Enfin comme M est un point de [OB], choisi au hasard, OM suit la loi uniforme sur [0 ; 1]. Ainsi l'aire $\mathscr{A}$ suit la loi uniforme sur $[\frac{0}{2}; \frac{1}{2}]$.

Autrement dit, la variable aléatoire X égale à l'aire $\mathscr{A}$ du triangle OAM suit la loi uniforme sur [0 ; 0,5]

Exercice 4 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^2 - 33x + 10 = 0$.
2) On choisit au hasard un réel dans l'intervalle $[-1\,;3]$. Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$?

CORRIGE : 1) On résoud dans IR $9x^2 - 33x + 10 = 0$; Le discriminant $\Delta = 729$; $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{10}{3}$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{1}{3}$ et $\frac{10}{3}$.

2) Les solutions de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$ se trouvent dans $]-\infty\,; \frac{1}{3}[\, \cup\,]\frac{10}{3}\,; +\infty[$.

Comme on choisit au hasard un nombre de l'intervalle [-1 ; 3], la loi de probabilité associée est la loi uniforme sur [-1 ; 3].

Les solutions de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$ se situant dans l'intervalle [-1; 3] sont donc $[-1\,; \frac{1}{3}[$

La probabilité p cherchée est donc : $p = \frac{\frac{1}{3}-(-1)}{3-(-1)}$; $p = \frac{1}{3}$

Exercice 5 :

M Martin et M Valentin se donnent rendez-vous entre 12h et 14h. Proche du lieu fixé, M Valentin arrivera assurément à 12h30. Quant à M Martin, son arrivée dépend des conditions de circulation routière : il arrivera entre 12h et 13h.

1) Calculer la probabilité que M Martin arrive avant M Valentin.
2) Calculer la probabilité que M Valentin attende M Martin plus de 10 minutes.

CORRIGE : 1) Mr MARTIN arrive avant Mr VALENTIN si et seulement si Mr MARTIN arrive avant 12h30.
La probabilité cherchée est donc : $p(X \leq 12{,}5) = p(12 \leq X \leq 12{,}5) = \frac{12{,}5-12}{13-12} = 0{,}5$.
2) Mr VALENTIN attend Mr MARTIN plus de 10 minutes si et seulement si Mr MARTIN arrive après 12h40, c'est-à-dire entre 12h40 et 13h. Or 12h40 représente $(12 + \frac{40}{60})$h, c'est-à-dire $\frac{38}{3}$ h , la probabilité cherchée est :
$p(X \geq \frac{38}{3}) = p(\frac{38}{3} \leq X \leq 13) = \frac{13-\frac{38}{3}}{13-12} = \frac{1}{3}$

Pour cet exercice on peut aussi raisonner sur [0 ; 60] plutôt que sur [12 ; 1], cela évite les problèmes de conversion!!!