CORRIGE EXERCICES LOI NORMALE (2)

Ex. 41 p. 217 :

La fonction représentée en rouge est la fonction de Gauss ϕ. La variable aléatoire Z de densité φ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$; donc $E(Z) = 0$ et $\sigma = 1$.

La fonction de densité *f* de la variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, ce qui permet d'estimer l'espérance μ de la variable X.

Si σ augmente, alors l'intervalle $[\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]$ devient plus grand.

Or $P([\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]) \approx 0{,}997$.

Donc l'aire sous la courbe de densité *f* de X reste constante. C'est pour cela que la courbe $\mathcal{C}_f$ « s'étale ».

1 **a.** Les deux courbes sont centrées sur l'axe des ordonnées, donc $E(X) = E(Z) = 0$.

2 **a.** La courbe de la fonction *f* est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$, donc $E(X) = 2$.

Alors que E(Z)=0

3 **a.** De même, $E(X) = 2$.

1 et **3** **b.** Vu l'étalement de la courbe de la fonction de densité *f*, l'écart type de la variable aléatoire X a augmenté, $\sigma > 1$.

2 **b.** En faisant glisser la courbe de *g* de deux graduations vers la gauche, les deux courbes se superposent, donc les variables ont le même écart type.

Ex. 42 p. 217 :

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 2.

1 **b. Vrai :** Voir cours

2 **a. Faux :** $P(X \leqslant 9) = P\left(\dfrac{X-5}{2} \leqslant \dfrac{9-5}{2}\right) = P(Z \leqslant 2)$

b. Vrai : $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$
$= P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

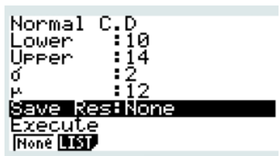
c. Vrai : $P(X \geqslant 7) = P(Z \geqslant 1) = P(Z \leqslant -1)$ car la fonction de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3 Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 12 et d'écart type 2.

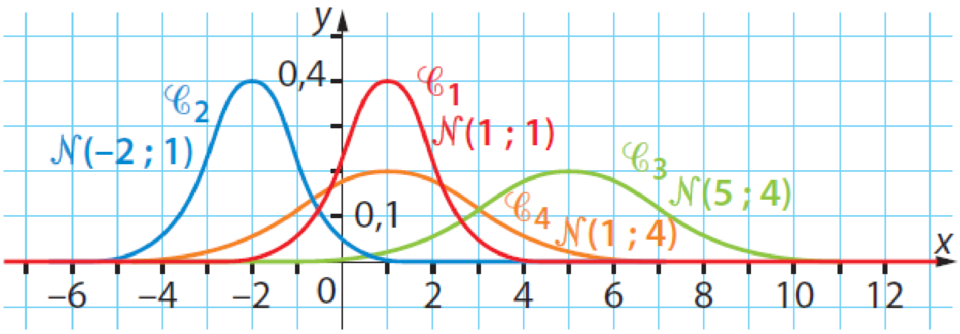
c. Vrai : $P(10 \leqslant X \leqslant 14) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$ où $Z = \dfrac{X-12}{2}$.

$P(10 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0{,}68$.

Ou calcul direct dans STAT



Ex. 43 p. 217 :



Ex. 49 p. 219 :

1 **a.** La durée du séchage, exprimée en minute, suit une variable aléatoire uniformément répartie sur $[30\ ;150]$.

$P(0 \leqslant X \leqslant 60) = \dfrac{60-0}{150-30} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

b. $E(X) = \dfrac{150+30}{2} = 90$.

On peut espérer un temps de séchage moyen de 90 minutes.

2 On admet désormais que la durée du séchage est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 30.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

a. $P(0 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}157$.

b. $P(30 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}136$.

```
normalFRép(0,60,
90,30)
          .1573052923
normalFRép(30,60
,90,30)
          .1359051975
```

Ex.50 p. 219 :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule pris au hasard dans la production, associe son autonomie en km.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1 $P(98 \leqslant X \leqslant 122) \approx 0{,}84$.

```
normalFRép(98,12
2,104,6)
         .8399947732
```

2 On recherche la valeur arrondie au dixième du nombre a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}04$.

D'après la calculatrice, on obtient $a \approx 93{,}5$.

```
FracNormale(0.04
,104,6)
         93.49588357
```

Ex. 51 p. 219 : La variable aléatoire X, égale au montant des achats, suit la loi normale $\mathcal{N}(350\,;150^2)$.

```
normalFRép(-10^9
9,100,350,150)
          .0477903304
normalFRép(400,1
0^99,350,150)
          .3694414037
```

1 a. $P(X \leqslant 100) \approx 0{,}048$.

b. $P(X \geqslant 400) \approx 0{,}369$.

c. $[200\,;500] = [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]$ donc d'après le cours :

$$P(200 \leqslant X \leqslant 500) \approx 0{,}68.$$

2 On cherche le plus petit entier a tel que :

$P(X \geqslant a) = 0{,}30$ c'est-à-dire tel que :

$$1 - P(X \leqslant a) = 0{,}30 \Leftrightarrow P(X \leqslant a) = 0{,}70.$$

D'après la calculatrice, $a \approx 430$, valeur arrondie à la dizaine supérieure.

À partir de 430 € d'achat, les clients pourront bénéficier d'une remise de 30 %.

OU

```
Inverse Normal
Tail      :Right
Area      :0.3
σ         :150
μ         :350
Save Res:None
Execute
None LIST
```

```
Inverse Normal
    x=428.660077
```

Ex. 47 p. 218 : **1** On a $P(X \leqslant 28) = 0{,}5$; donc $\mu = 28$.

2 a Soit Z la variable aléatoire telle que $Z = \dfrac{X-28}{\sigma}$.

Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

B $P(X \leqslant 15) = 0{,}015 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-28}{\sigma} \leqslant \dfrac{-13}{\sigma}\right) = 0{,}015$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{-13}{\sigma}\right) = 0{,}015.$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\dfrac{-13}{\sigma} \approx -2{,}17$.

```
FracNormale(0.01
5,0,1)
      -2.170090375
```

OU

```
Inverse Normal
Tail      :Left
Area      :0.015
σ         :1
μ         :0
Save Res:None
Execute
None LIST
```

```
Inverse Normal
    x=-2.1700904
```

Ainsi, $\sigma \approx \dfrac{13}{2{,}17} \approx 6$, valeur arrondie au dixième près.

Ex . 48 p. 218 : **1** La durée de vie, mesurée en heures, d'une ampoule fluo compact est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}'(\mu\,;\sigma^2)$. La variable aléatoire X vérifie :

$P(X \geqslant 10\,000) = 0{,}6$ et $P(X \leqslant 13\,000) = 0{,}69$.

a. On considère la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. D'après le cours, la variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

b. $P(X \geqslant 10\,000) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right)$

$$= P\left(Z \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6$$

et $P(X \leqslant 13\,000) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{13\,000-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \leqslant \dfrac{13\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}69$.

```
Inverse Normal
Tail      :Left
Area      :0.69
σ         :1
μ         :0
Save Res:None
```

```
Inverse Normal
    x=0.49585034
```

c. $P\left(Z \geqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{10\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}4$.

```
Inverse Normal
Tail      :Right
Area      :0.6
σ         :1
μ         :0
Save Res:None
```

```
Inverse Normal
   x=-0.2533471
```

À l'aide de la calculatrice, on détermine les nombres a et b tels que :
$P(Z \leqslant a) = 0{,}4$
et $P(Z \leqslant b) = 0{,}69$.

```
FracNormale(0.4,
0,1)
        -.2533471011
FracNormale(0.69
,0,1)
         .495850347
```

On trouve $a \approx -0{,}253$
$b \approx 0{,}496$.

μ et σ sont solutions du système.

$$\begin{cases} \dfrac{10000-\mu}{\sigma} = -0{,}253 \\ \dfrac{13000-\mu}{\sigma} = 0{,}496 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\,000 - \mu = -0{,}253 \times \sigma \\ 13\,000 - \mu = 0{,}496 \times \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 0{,}253\,\sigma = 10\,000 \\ \mu + 0{,}496\,\sigma = 13\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}749\,\sigma = 3\,000 \\ \mu = 0{,}253\,\sigma + 10\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma \approx 4\,005 \\ \mu \approx 11\,013 \end{cases}$$

Ex. 53 p. 219 :

1 La variable aléatoire égale à la longueur fémorale suit la loi normale d'espérance 60 mm et d'écart type 2 mm.

a. À l'aide du tableau donné, on calcule, en retranchant la valeur obtenue pour $k = 58$ de celle obtenue pour $k = 62$, $P(58 \leqslant X \leqslant 62) \approx 0{,}683$.

$P(58 \leq X \leq 62) = P(X \leq 62) - P(X \leq 58)$

__Autre méthode :__

D'après le cours, $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$, or $58 = \mu - \sigma$ et $62 = \mu + \sigma$ donc $P(58 \leqslant X \leqslant 62) \approx 0{,}68$.

b. $P(X > 62) = 1 - P(X \leqslant 62)$
$= 1 - 0{,}841\,344\,746 = 0{,}158\,655\,254$.

2 On cherche le nombre ℓ tel que $P(X < \ell) \approx 0{,}07$.
D'après le tableau donné, on obtient $\ell \approx 57$.

3 D'après le cours, on sait que :
$P(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$, **avec μ = 60 et σ = 2**
donc, on peut choisir l'intervalle $[a ; b] = [56 ; 64]$.

Ex. 63 p. 224 :

1 **a. Vrai :** $k = 3$ pour que la fonction f soit une fonction de densité de probabilité, car :

$$\int_0^1 k x^2 \, dx = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

2 **c. Vrai :** voir cours.

3 **b. Vrai :** $P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$.
Comme l'espérance de X est $\mu = 20$: **ATTENTION σ² = 36 donc σ = 6**
$[20 - n ; 20 + n] = [\mu - \sigma ; \mu + \sigma] \Leftrightarrow n = \sigma = 6$.

Ex. 64 p. 224 : On suppose que la variable aléatoire X égale au retard de Corentin est uniformément répartie dans l'intervalle [0 ; 30].

1 **a. Faux :** $f(x) = \dfrac{1}{30-0} = \dfrac{1}{30}$.

b. Vrai : $P(15 \leqslant X \leqslant 20) = \dfrac{20-15}{30-0} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

c. Faux : $E(X) = \dfrac{0+30}{2} = 15$.

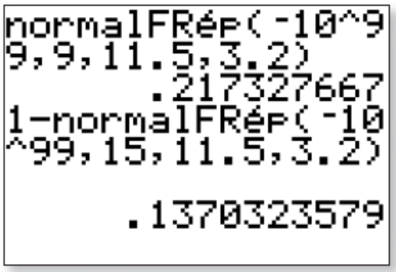
2 Soit X la variable aléatoire égale à l'âge des jeunes enfants, on admet que X suit la loi normale d'espérance 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois.

a. Faux : $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}22$.

b. Faux : $P(X \geqslant 15) \approx 0{,}137$.

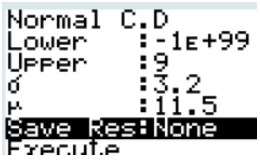
c. Faux :

$P(8 \leqslant X \leqslant 12) \approx 0{,}425$.

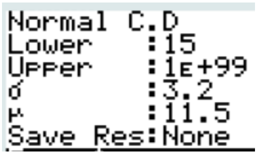


Ou menu STAT :

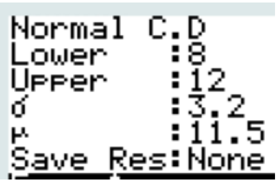
a.



b.



c.

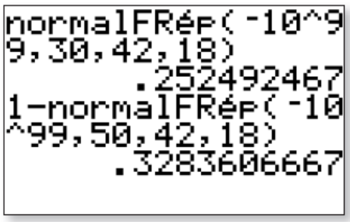


3 Lors d'un test de mathématiques, les élèves de terminales ES ont obtenu une moyenne de 42 points sur 60, d'écart-type de 18. On suppose que les notes se répartissent suivant une loi normale.

a. Vrai : Il y a environ une chance sur 4 qu'un élève ait eu moins de 30.

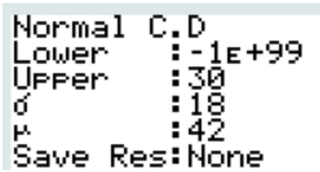
b. Faux : Il y a environ 33 % de chances qu'un élève ait eu plus de 50.

c. Faux : Il y a 11 % de chances qu'un élève ait moins de 20.

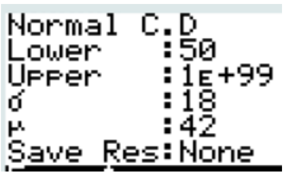


Ou menu STAT :

a.



b.



c.