Problème

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 5 cm et BC = 2 cm.
M est un point qui se déplace sur le segment [DC].

Objectif : quelle(s) position(s) du point M permettent d'obtenir un triangle ABM rectangle en M ?

a) Réaliser une figure à main levée.

b) Quelle formule peut-on écrire qui traduit le fait que le triangle ABM soit rectangle en M ?

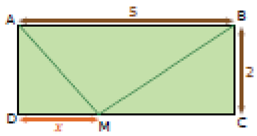
c) Appelons x la distance DM. Ecrire AM^2 en fonction de x . Ecrire BM^2 en fonction de x .

d) A l'aide des réponses b) et c), traduire le problème par une équation.

e) Développer $P = (x-1)(x-4)$.

f) En déduire la résolution du problème.

Réponse : a)



b) Dire que le triangle ABM est rectangle en M équivaut à dire que : $AB^2 = AM^2 + MB^2$. (égalité de Pythagore).

c) Dans le triangle ADM rectangle en D, on a l'égalité de Pythagore : $AM^2 = AD^2 + DM^2$
soit $AM^2 = 2^2 + x^2$
$\underline{AM^2 = 4 + x^2}$

De même, dans le triangle BCM rectangle en C, on a l'égalité de Pythagore : $BM^2 = BC^2 + CM^2$
soit $BM^2 = 2^2 + (5 - x)^2$ car BC = 2 et CM = CD – DM = 5 - x
$BM^2 = 4 + 25 -10x + x^2$
$\underline{BM^2 = x^2 -10x + 29}$

d) D'après les réponses b) et c), le problème revient à résoudre l'équation suivante :
$AB^2 = AM^2 + MB^2$
c'est-à-dire $5^2 = 4 + x^2 + x^2 -10x + 29$ car AB = 5, $AM^2 = 4 + x^2$ et $MB^2 = x^2 -10x + 29$
soit $25 = 2x^2 – 10x + 33$
Autrement dit, $2x^2 – 10x + 8 = 0$
ce qui équivaut à : $\underline{x^2 – 5x + 4 = 0}$ (en divisant les deux membres de l'équation par 2).

Le problème revient à résoudre cette équation : $\underline{x^2 – 5x + 4 = 0}$.

e) $P = (x-1)(x-4)$
$P = x^2-4x -x + 4$
$P = x^2 – 5x + 4$

f) D'après d) et e), le problème revient à résoudre l'équation : $(x-1) (x-4) = 0$
Or, si un produit est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul
donc $x-1=0$ ou $x-4=0$
donc $x = 1$ ou $x = 4$.

Réciproquement, avec ces valeurs, l'équation est bien résolue donc l'équation a deux solutions : 1 et 4
et le problème a deux solutions : s**i M est à 1 cm de D ou à 4 cm de D, le triangle ABM sera rectangle en M.**