SUITES NUMERIQUES

Activités de rappels

EXERCICE 1

(u_n) est une suite arithmétique de raison a, déterminer l'entier k dans chacun des cas suivants :
1. $u_{21} = 34$, $a = 1,5$ et $u_k = 1$
2. $u_{10} = 64$, $u_5 = 14$ et $u_k = 114$.

EXERCICE 2

(u_n) est une suite géométrique de raison q strictement positive, déterminer l'entier p dans chacun des cas suivants :

1. $u_6 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ et $u_p = \frac{1}{4}$
2. $u_3 = 16$, $u_7 = 1$ et $u_p = \frac{1}{8}$

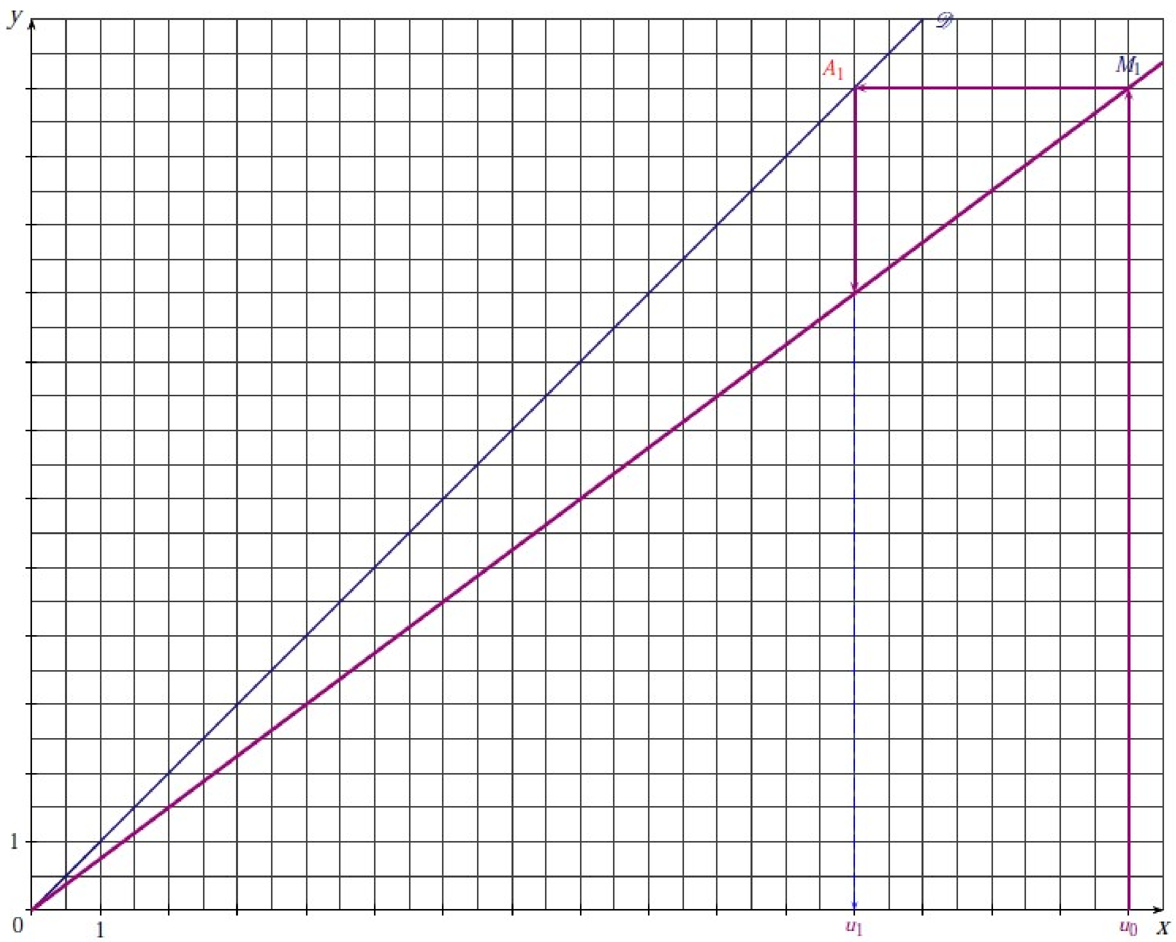
.

EXERCICE 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75 \times u_n$.

1.a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
 c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
 d) On note S_n la somme des n+1 premiers termes de la suite (u_n). Calculer S_4.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,75x$ et la droite D d'équation $y = x$.



a) Construire sur le graphique les termes de la suite u_2, u_3, · · · , u_{11}.
b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (un) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $un \leq 0,1$.

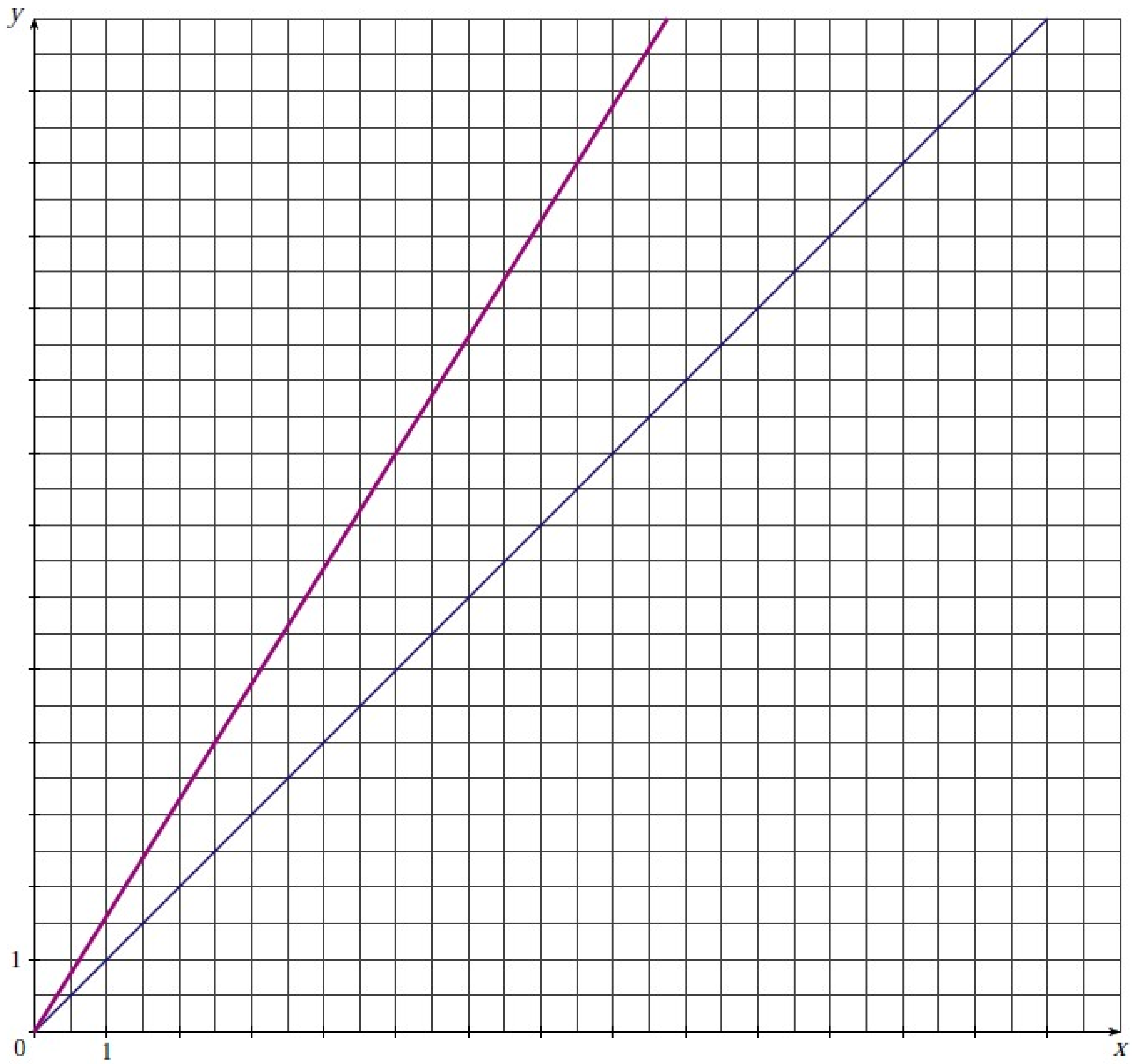
4. Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64(1-0,75^{n+1})$. Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 4

Soit (u_n) la suite géométrique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8}{5} \times u_n$.

1.a) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2.a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1,6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite (u_n).



b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 5000$.

4. On note S la somme des n premiers termes de la suite u_n.

a) Montrer que pour tout entier n, $S = \dfrac{5}{6}\ (1,6^n - 1)$.

b) Vers quel réel tend S quand n tend vers $+\infty$?

COURS CHAPITRE 1

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que,
pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$
Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

2 FORMULES EXPLICITES

a Formule 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors
pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$

b Formule 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 alors
pour tout entier n et pour tout entier p, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

c Formule 3

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors
pour tout entier n et pour tout entier p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

3 MONOTONIE, sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :
pour tout entier n

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1)$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

– Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

– Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul. Définissons par (q_n) la suite définie pour tout n par $q_n = q^n$

– Si $q < 0$ alors la suite (q_n) n'est pas monotone.

– Si $q > 1$ alors la suite (q_n) est strictement croissante.

– Si $0 < q < 1$ alors la suite (q_n) est strictement décroissante.

– Si $q = 1$ alors la suite (q_n) est constante, égale à 1.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

– Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

– Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q_n).

– Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q_n).

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0+u_1+\cdot\quad\cdot\quad\cdot+u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = U_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme de la somme} \times \left(\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\right)$$ **FORMULE A CONNAITRE PAR COEUR**

Application :

IV LIMITE D'UNE SUITE

1 LIMITE FINIE

a. DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

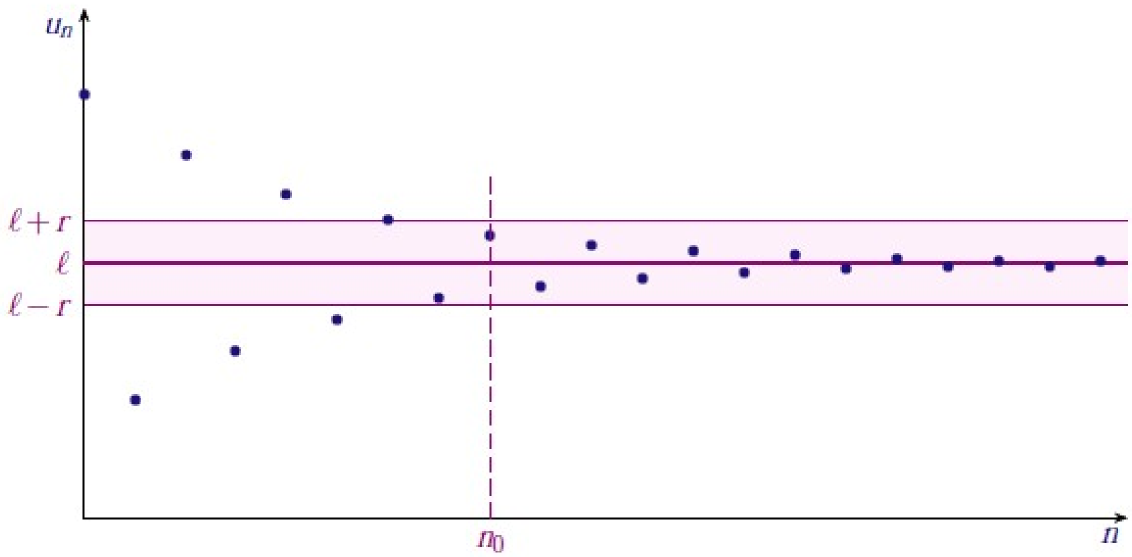
1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell-r; \ell+r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N_0. On écrit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite ***convergente.***

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

b. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite par un nuage de points dans un repère, la convergence de la suite ce traduit par le fait qu'à partir d'un certain rang N_0, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell-r$ et $y = \ell+r$.



c. PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n)-\ell$ est convergente vers 0.

2 LIMITE INFINIE

a. DÉFINITION THEORIQUE

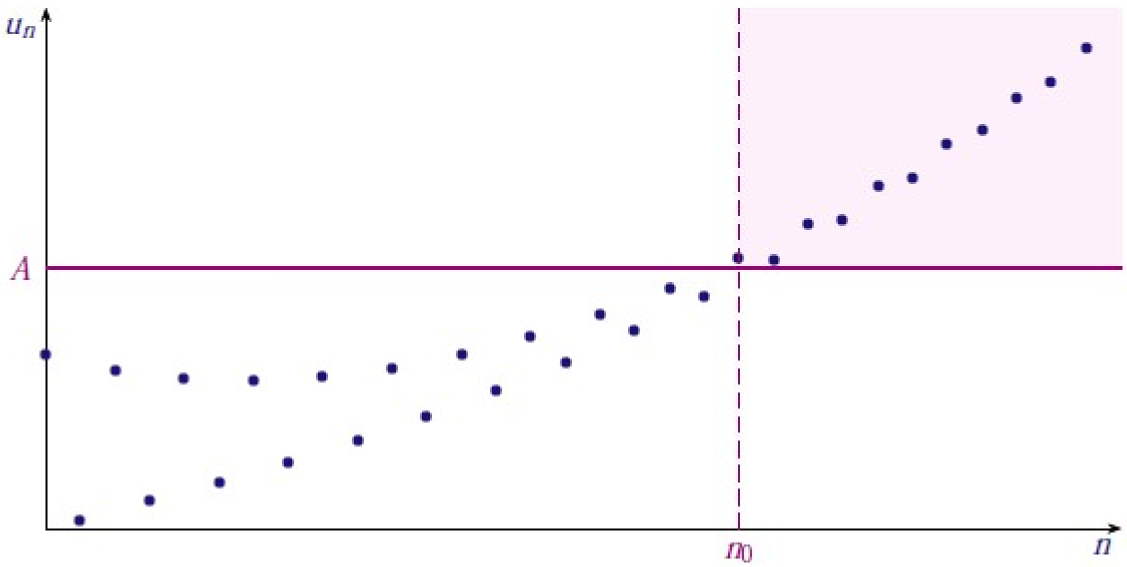
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang N_0. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

b. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : POUR AVOIR UNE IMAGE MENTALE DE LA NOTION DE LIMITE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$:



Il existe un rang N_0 tel que pour tout entier $n > N_0$, on a : $u_n > A$

REMARQUES

1. De la même façon, on définit une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang N_0. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2. Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

a. THÉORÈME (*admis*)

Soit q un réel strictement positif :

– Si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

– Si $q = 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n est constante et sa limite est 1.
– Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

b. COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q strictement positive.
– Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. **Remarque : vrai également si $-1 < q < 1$**
– Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.
– Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **si** $u_0 < 0$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **si** $u_0 > 0$

Exercices : transmath page 39 – exercices n°83 à 95

c. METHODE : RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME TRES IMPORTANT !

EXEMPLE 1

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 500$
Comme $0 < 0{,}95 < 1$ la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} 500\times0{,}95^n = 0$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 10^{-6}.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$, $500\times0{,}95^n \leq 10^{-6}$

INITIALISATION :
$A = 500$;
$I = 0$;
TRAITEMENT :
TANT_QUE $A > 10^{-6}$ **FAIRE**
I prend la valeur $I+1$;
A prend la valeur $0,95 \times A$;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I

PROGRAMME

TEXAS
```
PROGRAM : SEUIL
: 500 → A
: 0 → I
: While A > 10^ (-6)
: I + 1 → I
: 0.95*A → A
: End
: Disp I
```

CASIO
```
===== SEUIL =====
500 → A ↵
0 → I ↵
While A > 10^(-6) ↵
I + 1 → I ↵
0.95*A → A ↵
WhileEnd ↵
I
```

La calculatrice affiche …391.. Donc pour tout entier $n \geq 391$, $500\times0{,}95^n \leq 10^{-6}$.

EXEMPLE 2
Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $u_0 = -0{,}01$
$1{,}2 > 1$ et $u_0 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}01\times1{,}2^n = -\infty$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 10^{-9}.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$, $-0{,}01\times1{,}2^n \leq -10^9$

INITIALISATION :
$A = -0,01$;
$I = 0$;
TRAITEMENT :
TANT_QUE $A > -10^9$ **FAIRE**
I prend la valeur $I+1$;
A prend la valeur $1,2 \times A$;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I

La calculatrice affiche…139.. Donc pour tout entier $n \geq 139$, $-0{,}01\times1{,}2^n \leq -10^9$.

V SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

1. DÉFINITION

Soient a et b deux réels.
La suite (u_n) définie pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite ***arithmético-géométrique.***

REMARQUE :

– Si $a = 1$ la suite est arithmétique de raison b : pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} - U_n = b$

– Si $b = 0$ la suite est géométrique de raison : pour tout entier naturel n on a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = a$

– Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique : elle est dite **arithmético-géométrique**.

2. METHODE : REPRESENTATION GRAPHIQUE

Exemple 1 : *Cas où a < 0*

Construire les termes successifs de la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -\dfrac{5}{6}U_n + 10 \end{cases}$

Exemple 2 : *Cas où a > 0*

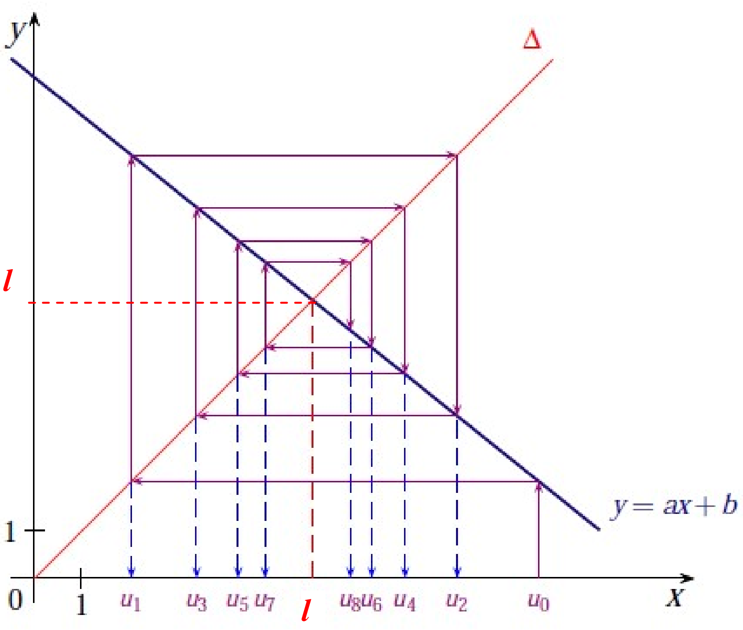
Construire les termes successifs de la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 3 \end{cases}$

a. CONSTRUCTION DES TERMES SUCCESSIFS

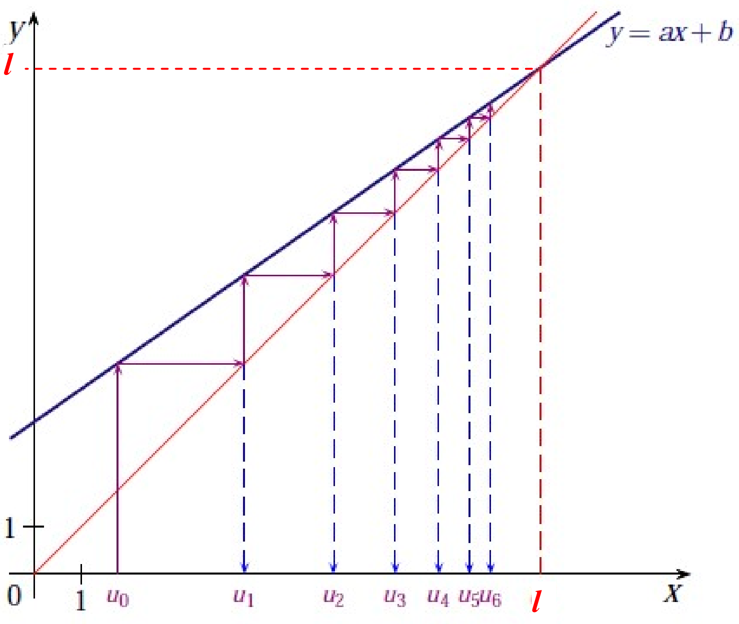
On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longrightarrow ax+b$ et on construit les différents termes de la suite à l'aide de la droite Δ d'équation $y = x$.

En effet, la droite Δ permet de renvoyer en abscisse une valeur située en y car comme les termes de la suite sont des images successives, chaque image Un doit ensuite être renvoyée sur l'axe des x pour pouvoir ainsi en calculer l'image $U_{n+1}=f(U_n)$ qui sera le terme suivant de la suite.
La droite Δ agit comme un miroir parce que son équation est $y = x$.

a < 0



a > 0



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.
En particulier, on conjecture que la suite (U_n) converge vers une limite l telle que $f(l) = l$

b. SUITE AUXILIAIRE

On appelle **suite auxiliaire** une suite utilisée afin de faciliter l'étude d'une suite principale.

REMARQUE : Dans le cas des suites arithmético-géométriques étudiées en TES, la suite auxiliaire est presque toujours définie pour tout entier n, par $V_n = U_n - l$

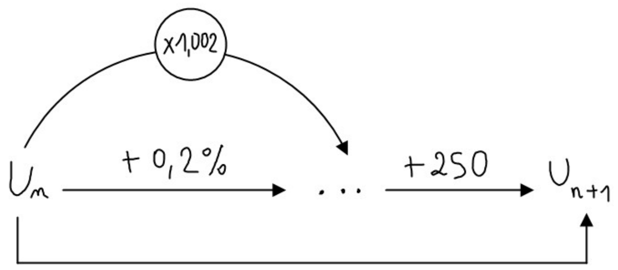
EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note *un* le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.*

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
En effet, augmenter de $t = 0{,}2\%$ revient à multiplier par $c = 1 + t = 1 + 0{,}2/100 = 1{,}002$

Le schéma illustrant cette situation est donc :



Ainsi : pour tout entier n, $U_{n+1} = 1{,}002 \times U_n + 250$

2. *Soit (V_n) la suite définie pour tout entier n, par $V_n = U_n + 125000$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*

(v_n) est une suite géométrie si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel $V_{n+1} = q \times V_n$

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times U_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (V_n - 125000) + 125250 \\ &= 1{,}002 \times V_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $V_0 = U_0 + 125000 = 126000$.

On peut donc donner la forme explicite de la suite.

3. *Exprimer U_n en fonction de n.*

(v_n) est une suite géométrique de raison q = 1,002 et de premier terme $V_0 = 126000$ donc pour tout entier n,

$V_n = V_0 \times q$ soit $V_n = 126000 \times 1{,}002^n$ pour tout entier n

Donc :

pour tout entier n, $U_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

4. *Étude de la suite* (U_n).

a) *Variation*

Pour tout entier n, $U_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125000$.

Donc pour tout entier n,

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000) - (126000 \times 1{,}002^{n} - 125000) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^{n} \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n} \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^{n} \end{aligned}$$

D'où $U_{n+1} - U_n > 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

Autre méthode :

La suite géométrique de terme général $1{,}002^n$ est croissante car $1{,}002 > 1$.

Pour former le terme général de la suite (U_n) :

- On multiplie par $126000 > 0$, ce qui ne change pas le sens de variation :
  Ainsi la suite de terme général $126000 \times 1{,}002^n$ est croissante.
- Enfin, on retranche 125 000, ce qui ne change pas le sens de variation.
  Donc (U_n) est croissante.

b) *Limite*

$1{,}002 > 1$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}002^n = +\infty$ par produit, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 126000 \times 1{,}002^n = +\infty$

puis par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 126000 \times 1{,}002^n - 125000 = +\infty$.

5) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 €?*

On cherche à déterminer le plus petit entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$, $U_n > 15000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15000.

```
U = 1000 ; n = 0;
TANT_QUE U ≤ 15000 FAIRE
    n prend la valeur n+1 ;
    U prend la valeur 1,002 × U +250 ;
FIN TANT_QUE
Afficher n
```

La calculatrice affiche 53. Donc le capital disponible dépassera 15000 € au bout de 53 mois.

Remarque : la position de l'instruction « n prend la valeur n+1 » dans la boucle TANT_QUE est sans importance dans la mesure où le calcul de U ne dépend pas de la valeur stockée dans la variable n qui n'a d'autre utilité que de compter le nombre de fois où la boucle est effectuée.

En revanche, si l'on utilise la formule explicite, le passage de n à $n + 1$ doit obligatoirement être placé avant le calcul de U puisque le terme de la suite dépend explicitement de n.

Algorithme utilisant la forme explicite :

```
U = 1000 ; n = 0;
TANT_QUE U ≤ 15000 FAIRE
    n prend la valeur n+1 ;
    U prend la valeur 126000 × 1,002^n – 125000 ;
FIN TANT_QUE
Afficher n
```