EXERCICE 3

1) Nature de la suite (U_n) :

La forme récurrente de la suite (U_n) est $U_{n+1} = 0,75\,U_n$: on reconnaît donc une expression de la forme $U_{n+1} = q \times U_n$ caractéristique d'une suite géométrique de raison q. (U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $U_0 = 16$.

b) Exprimer U_n en fonction de n consiste à donner la forme explicite de la suite.

Le premier terme étant U_0 c'est la formule n°1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$ soit $\boxed{U_n = 16 \times 0{,}75^n}$

c) Etudier la monotonie de (U_n) consiste à étudier le sens de variation de (U_n)

- Soit on ne connaît pas les résultats de cours sur les suites géométriques, auquel cas on forme la quantité $U_{n+1} - U_n$ et on en étudie le signe,
- Soit on connaît les propriétés des suites géométriques et on les cite :

$U_n = 16 \times (0{,}75)^n$: la suite de terme général $(0{,}75)^n$ est strictement décroissante car $0 \leq 0{,}75 < 1$; en multipliant par 16 pour former le terme général de la suite (U_n), on ne change pas le sens de variation.

<u>Conclusion :</u> (U_n) est strictement décroissante.

d) S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite U_n.

En effet le premier terme de la suite U_n est U_0, de ce fait U_n est le $(n+1)^{\text{e}}$ terme.

$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

$S_4 = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_4$: cette somme compte $4 - 0 + 1 = 5$ termes

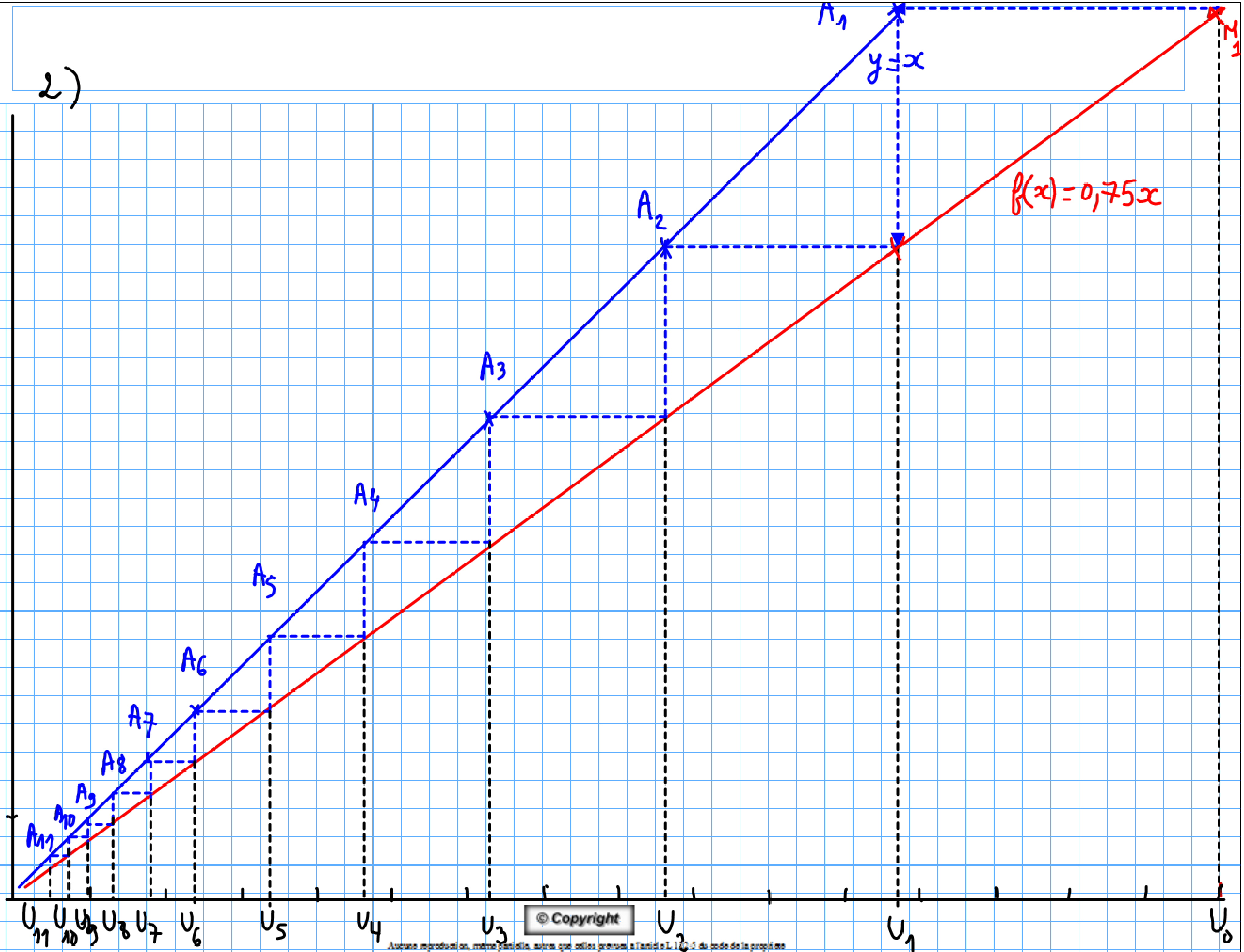
Comme ce sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$

on applique la formule $S_n = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$

d'où $S_4 = U_0 \times \dfrac{1 - q^5}{1 - q} = 16 \times \dfrac{1 - (0{,}75)^5}{0{,}25} = 16 \times 4\left(1 - 0{,}75^5\right)$

$$S_4 = 64\left[1 - (0{,}75)^5\right] = 48{,}125$$

2)



A1
M1
y = x
A2
f(x) = 0,75x
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
U11 U10 U9 U8 U7 U6 U5 U4 U3 U2 U1 U0

b) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

3) On travaille avec la calculatrice en mode TABL : on saisit l'expression $y = 16 \times 0{,}75^x$. On dresse le tableau de valeurs de la suite : start 0
End 30
Step 1

X	Y1
16	0.1603
17	0.1202
18	0.0902
19	0.0676

$U_n \leq 0{,}1 \iff n \geq 18$

4) $S_n = 1^{er}\text{ terme}\left(\dfrac{1 - q^{\text{nbr de termes}}}{1 - q}\right) = U_0 \times \dfrac{1 - 0{,}75^{n+1}}{1 - 0{,}25} = \dfrac{16}{0{,}25}\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$

$S_n = 64\left[1 - (0{,}75)^{n+1}\right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^{n+1} = 0$ car $0 \leq 0{,}75 < 1$

par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}75^{n+1} = 1 - 0 = 1$; par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right) = 64 \times 1$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 64$