Continuité sur un intervalle, sens de variation

Chapitre 2

Classe de T. ES

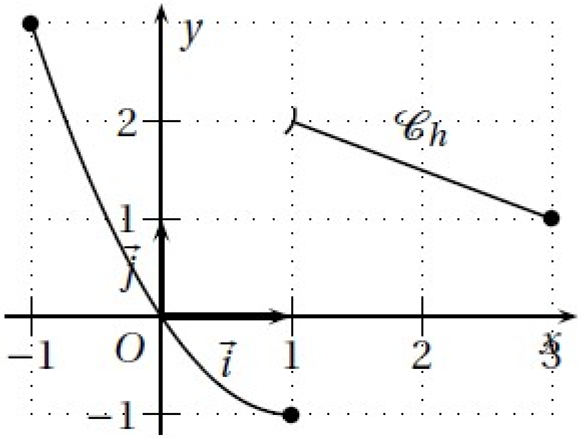
I- Langage de la continuité

1- Notion intuitive de continuité

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Lorsque la courbe représentative de f dans un repère ne présente pas de « saut », c'est-à-dire que cette courbe se trace d'un seul tenant, sans lever le crayon, on dit que f est continue sur I.

Exemple :



courbe représentative d'une fonction h définie sur [-1;3].

La fonction h représentée ci-dessus n'est pas continue sur [-1; 3] : on doit lever le crayon pour tracer sa courbe.

En revanche, h est continue par morceaux, sur [-1;1] et sur]1;3]

2- propriétés

a) Les fonctions de référence (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

b) Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$

c) Les fonctions rationnelles (quotient de polynômes) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

exemple 1:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

exemple 2:

La fonction g définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ Par $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ est un quotient de polynômes

Elle est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

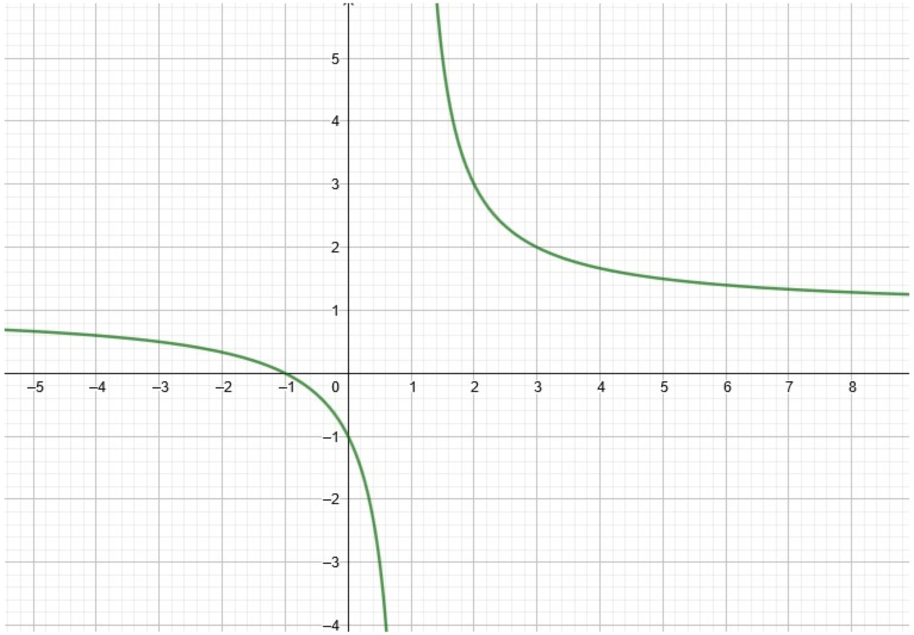
En effet, 1 est valeur interdite au dénominateur (division par 0) , la fonction n’est donc pas définie en 1 et par conséquent pas continue en 1;

Le tableau de variation portera une double barre en 1.

Graphiquement, la courbe représentative présente donc un saut en 1.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



II- Théorème des valeurs intermédiaires

1- fonction continue et non monotone

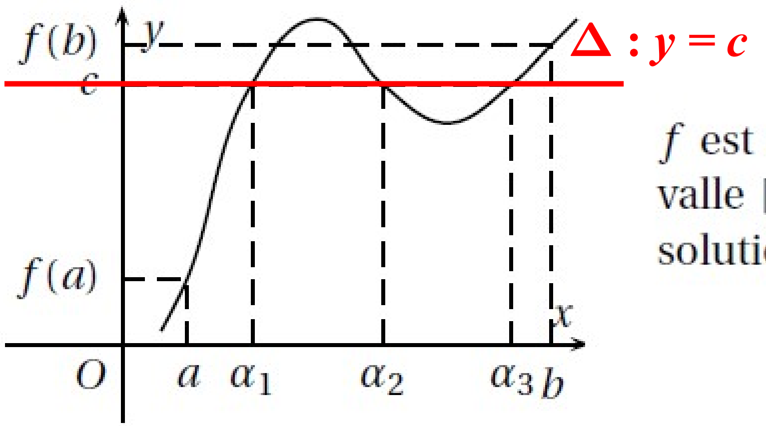
Propriété des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction définie et **continue** sur un intervalle [a;b],

alors, pour tout réel c compris entre f(a) et f(b), il existe **au moins** un réel α compris entre a et b tel que $f(\alpha)$=c.

Autrement dit : *Tout réel de l'intervalle [f(a); f(b)] (ou [f(b); f(a)]) possède au moins un antécédent par f.* Pour tout réel c compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x)$=c possède **au moins** une solution dans l'intervalle [a;b]

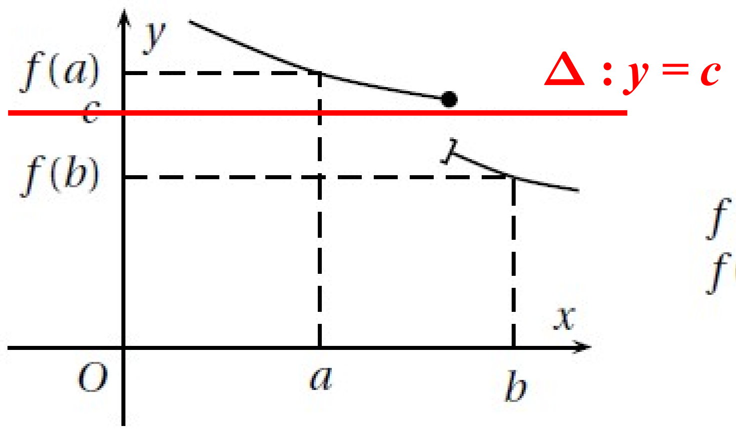
Illustration :



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions.

Remarque : Δ est la droite d'équation y = c; elle coupe 3 fois la courbe, donc l'équation f(x)=c possède 3 solutions : α_1; α_2; α_3

Autre configuration



f n'est pas continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

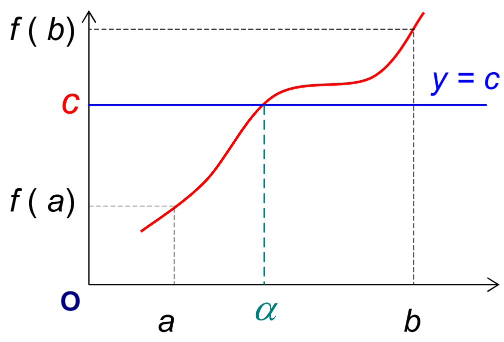
2- fonction continue et strictement monotone

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

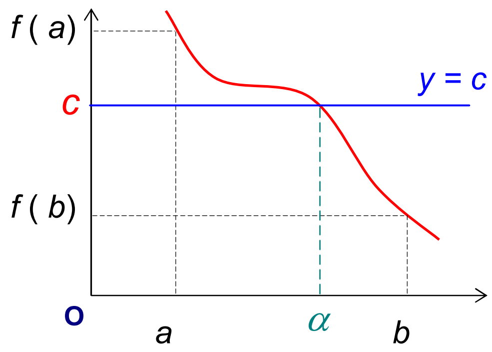
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement monotone sur un intervalle [a;b], **alors**, pour tout réel c compris entre f(a) et f(b), il existe **un unique** réel α compris entre a et b tel que $f(\alpha)$=c.

Autrement dit : *Tout réel de c l'intervalle [f(a); f(b)] (ou [f(b); f(a)]) possède* ***un unique*** *antécédent par f;* pour tout réel c compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x)$=c possède **une unique** solution dans l'intervalle [a;b]

Illustration :



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.

3- Propriété des fonctions dérivables (admis)

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I (la réciproque est fausse).

4- Exemple type - modèle de rédaction

Il fallait noter en classe

III- Sens de variation et dérivation (rappels)

1- Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifient que sur l'intervalle considéré, la fonction est continue et strictement monotone.

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire)

2- Sens de variation d'une fonction dérivable

a) Propriété :

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I.

f est croissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$.

f est décroissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$.

f est constante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Attention : ne pas confondre le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$.

Le signe de f' détermine les variations de f tandis que le signe de f détermine la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses : aucun rapport donc ! Voir exemple suivant.

b) Extrema :

• Si la fonction f présente un extremum en a, alors $f'(a)=0$. **(réciproque fausse)**

• En revanche, si f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f présente un extremum en x_0.

illustration :

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ est un minimum local.

x		x_0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum local.

exemple :

x	-12		4		16		α		34
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+			
Variations de f	-3	↗	-1	↘	-6	↗	0	↗	5
signe de $f(x)$			-				0	+	

Quelques phrases type à réinvestir dans les exercices.

- « les variations de f dépendent du signe de sa dérivée f'. »

- « d'après le tableau de variations, f est continue sur [-12;16] et atteint son maximum -1 pour $x = 4$.
  Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f ne s'annule pas sur [-12;16]. »

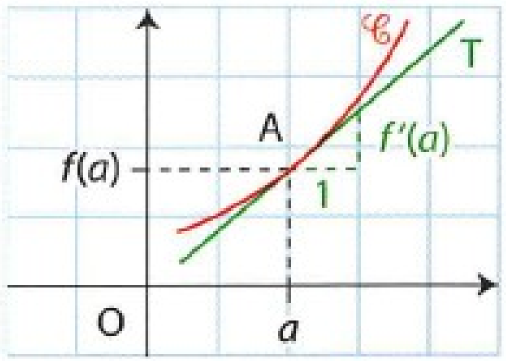
- « f est continue et strictement croissante sur [16;34] à valeurs dans [-6;5].

0 $\in$ [-6;5] donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in$ [16;34] tel que $f(\alpha)=0$. »

3- Equation d'une tangente

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$



Rappel : par définition, $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a.

4- formules de dérivation - rappels

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0;+\infty[$

4- opérations sur les fonctions dérivées

Propriété *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = \left(x^2-1\right)^4$ alors $f'(x) = 4(2x)\left(x^2-1\right)^3 = 8x\left(x^2-1\right)^3$
$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x+2}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$