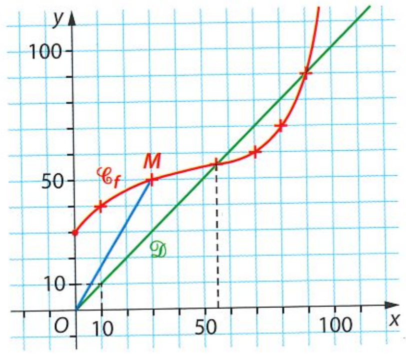
Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A QCM – Lire graphiquement

Voir AP page 61

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.
La courbe rouge $\mathscr{C}_f$ ci-contre est celle d'une fonction de coût total f, en euro, définie pour toute quantité x de 0 à 100 objets.



1 Par lecture graphique, on a :
a. $f(30)=50$. **b.** $f(50)=30$. **c.** $f(30)=0$.

2 L'équation $f(x)=x$ possède :
a. aucune solution. **b.** une solution. **c.** deux solutions.

3 Le coût moyen d'un objet, pour une production de 30, est :
a. le coefficient directeur de (OM).
b. 50.
c. 5,3.

B Vrai ou faux ? – Calculer une dérivée, déterminer la variation

Voir cours page 44

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1 Si $f(x)=-0{,}2x^3+6x^2+3$, définie sur $\mathbb{R}$, alors la dérivée est :
a. $f'(x)=-0{,}2x^2+12x+3$. **b.** $f'(x)=-6x(0{,}2x-2)$. **c.** $f'(x)=0{,}6x(-x+20)$.

2 Si $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, définie sur $[0\,;10]$, alors sa dérivée est :
a. $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. **b.** $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. **c.** $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

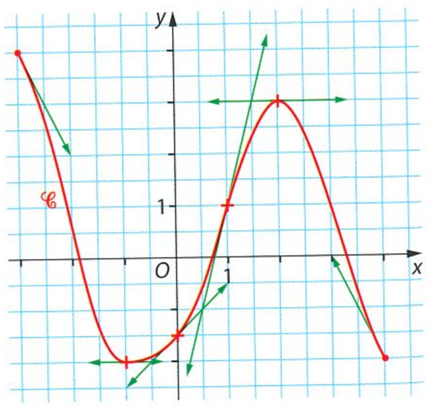
3 La fonction f, dérivable sur $[-8\,;3]$, est connue par quelques éléments de son tableau de variations ci-contre. La fonction f est :
a. croissante sur $[1\,;4]$. **b.** positive sur $[-8\,;3]$.
c. nulle en 2.

x	-8		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	…	1	…	4

C QCM – Lire des propriétés de tangence

Voir AP page 62

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.
Une fonction f, dérivable sur $[-3\,;4]$, est connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre, ainsi que quelques tangentes tracées.



1 On peut lire :
a. $f'(2)=3$. **b.** $f'(0)=0{,}5$. **c.** $f'(-1)=0$.

2 La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :
a. $y=4x+1$. **b.** $y=4x-3$. **c.** $y=\dfrac{1}{4}x-3$.

3 Pour tout réel a de l'intervalle $[-3\,;1]$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :
a. toujours située en dessous de la courbe.
b. toujours située au-dessus de la courbe.
c. traverse la courbe pour une valeur de a.

CHAPITRE 2

Continuité et convexité

D'hier à aujourd'hui

Lentilles et miroirs, convexes et concaves

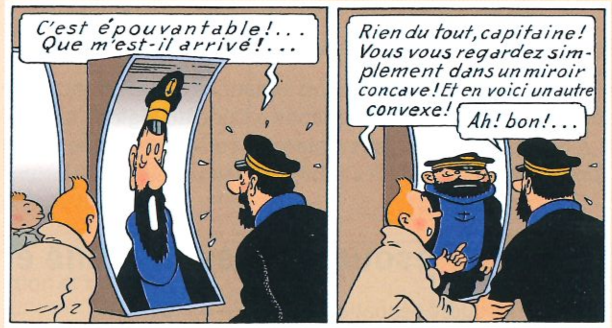

Hugues de Provence (1352), par Barisini Tomasso. C'est le plus ancien portrait connu d'un personnage portant des « lorgnons ».

On utilise l'énergie du soleil en concentrant ses rayons depuis très longtemps, à l'aide de lentilles ou de miroirs. Dans la comédie grecque, *Les Nuées*, écrites en 423 av. J.-C., le poète Aristophane évoque un conflit entre le vieil athénien Strepsiade et son fils dépensier. Dans une des scènes, le père expose à Socrate un moyen qu'il utiliserait pour ne pas payer ses dettes, s'il était condamné : à l'aide d'une « pierre diaphane » et ronde exposée au soleil, il ferait fondre les assignations, écrites par le greffier sur de la cire.

La légende raconte aussi qu'Archimède, vers 210 av. J.-C., a concentré les rayons lumineux à l'aide d'un miroir concave pour enflammer les voiles des navires romains qui attaquaient Syracuse.

La focalisation de la lumière en un point ne s'arrête pas à des utilisations « destructrices ». Ainsi, on utilise dès le XV[e] siècle av. J.-C. des « cailloux de verre » arrondis, polis et transparents, pour grossir une image. Dans son encyclopédie *Histoire naturelle*, Pline l'Ancien (23-79) fait référence à une émeraude utilisée par l'empereur Néron pour regarder les combats de gladiateurs, corrigeant ainsi sa myopie.

Pourtant, les premières lunettes utilisant des lentilles pour aider à la vue ne datent que de la fin du XIII[e] siècle.

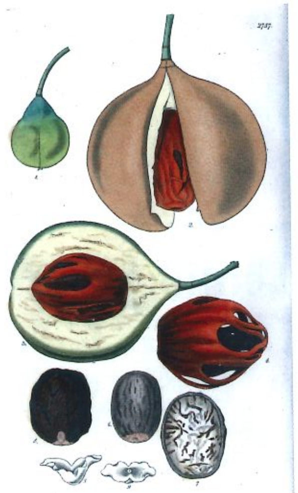


Extrait des *Aventures de Tintin, Le Trésor de Rackham le Rouge* (1944), Hergé.

Aujourd'hui, on ne compte plus les applications des lentilles et miroirs dans notre quotidien.
Les lunettes de vue utilisent des lentilles selon le défaut de l'œil à corriger : verres concaves pour la myopie, convexes pour l'hypermétropie. C'est le même principe qui est utilisé dans les microscopes ou les lunettes astronomiques et qui a permis de grandes avancées scientifiques.
L'utilisation de miroirs est courante pour élargir notre champ de vision : miroirs de carrefour, rétroviseurs, etc. Concaves ou convexes, on choisit la forme adaptée au besoin que l'on a. Ainsi, les fours solaires et les phares paraboliques de voitures utilisent des miroirs concaves, les uns pour concentrer l'énergie lumineuse sur l'aliment à réchauffer, les autres pour orienter la lumière à 30 mètres (feux de croisement) ou 100 mètres (feux de route) devant le véhicule.

Il est des esprits semblables à ces miroirs convexes ou concaves qui représentent les objets tels qu'ils les reçoivent, mais qui ne les reçoivent jamais tels qu'ils sont.
Joseph Joubert (1754-1824)

Activité 1 Raccorder deux parties TICE

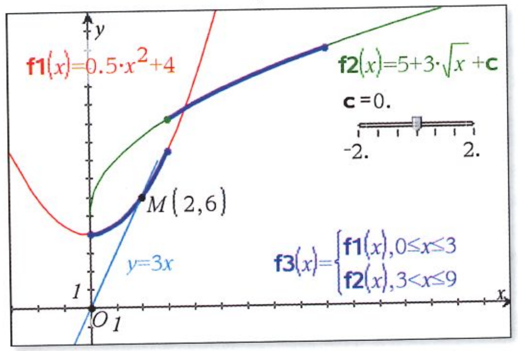


Le coût de production de la noix de muscade demande des coûts fixes importants pour lancer la production des muscadiers. Des investissements supplémentaires sont nécessaires en début de production pour lutter contre les champignons.
On a modélisé une production par la fonction de coût f, où x est la quantité variant de 0 à 9 tonnes. Le coût $f(x)$ est exprimé en millier d'euros.
En début de production, de 0 à 3 tonnes compris, $f(x)=0{,}5x^2+4$.
Après traitement des champignons, de 3 à 9 tonnes, $f(x)=5+3\sqrt{x}$.

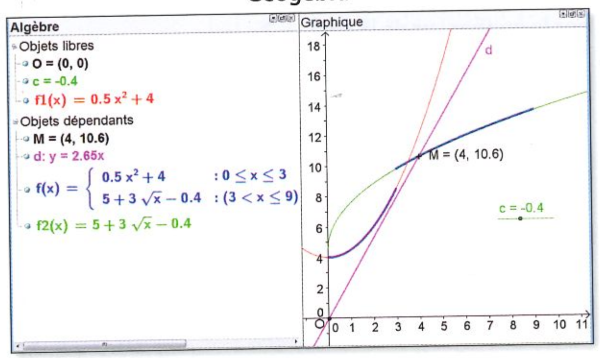
1 a. Calculer les coûts fixes. Calculer le coût total pour une production de 2 tonnes, puis pour une production de 5,29 tonnes.
b. Calculer le coût de 3 tonnes avant le traitement et le coût de 3 tonnes après le traitement. Chiffrer le coût du traitement.

2 On suppose que l'on peut réduire le coût de traitement.
Ainsi, pour $3<x\leqslant 9$, $f(x)=5+3\sqrt{x}+c$, où c est un nombre négatif.
On a représenté le coût total à l'aide d'un logiciel dynamique, avec curseur pour le nombre c :

TI-Nspire™



Geogebra



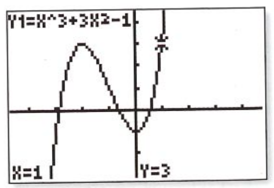
M est un point mobile sur la courbe bleue représentant la fonction f.

Voir AP page 61

a. Que représente économiquement le coefficient directeur de la droite (OM) ?
b. On définit la fonction g telle que $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, sur $]0\,;9]$.
À l'aide de la dérivée, étudier les variations de cette fonction sur $]0\,;3]$, puis sur $]3\,;9]$.
Pour retrouver ce sens de variation à l'aide du logiciel, que faut-il regarder sur la copie d'écran ?
c. À quelle valeur de c faut-il placer le curseur pour que la fonction de coût total soit d'un seul trait continu ?
Donner l'expression de $f(x)$ obtenue dans ce cas. Que devient la fonction g dans ce cas ?

Activité 2 Résoudre (presque) une équation

On désire résoudre l'équation $x^3+3x^2-1=0$.
Hélas, aucune méthode algébrique n'est possible avec les outils de Première ES.



1 a. D'après la représentation ci-contre, quel est le nombre de solutions de cette équation ?
b. À l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, donner les solutions indiquées par la calculatrice. *Arrondir à 10^{-3} près.*

2 Étudier les variations de la fonction $f:x\mapsto x^3+3x^2-1$.

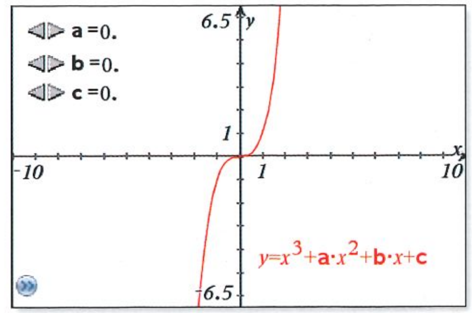
Voir pages 344 et 348

Dresser le tableau des variations de f et indiquer sur ce tableau les valeurs où la fonction s'annule. *Donner les solutions arrondies à 0,1 près.*

3 a. Préciser les valeurs de la fonction lorsque sa dérivée s'annule.
b. Soit k un réel quelconque entre $f(-2)$ et $f(0)$.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$, dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de k ?

Activité 3 Déterminer le signe d'une fonction du 3e degré TICE

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des nombres réels.
On pourra utiliser au maximum la calculatrice et ses fonctionnalités ou un logiciel dynamique.

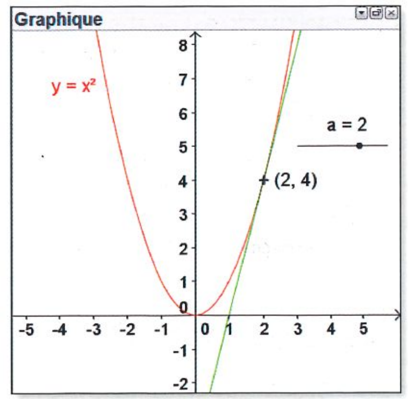


1 On suppose dans cette question que $a=0$.
a. Lorsque $b=2$ et $c=-1$, étudier le sens de variation de cette fonction.
Vérifier graphiquement que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α. *En donner une valeur arrondie à 0,1 près.*
Étudier, dans ce cas, le signe de $f(x)$.
b. Lorsque b est un nombre positif et c est un nombre quelconque, faire une conjecture sur le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
c. Si b est un nombre négatif, donner un exemple où l'équation $f(x)=0$ possède trois solutions, x_1, x_2 et x_3 dans cet ordre.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

2 On suppose que a est de signe quelconque.
a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée.
À quelle condition sur a et b l'équation $f'(x)=0$ admet-elle deux solutions ?
b. On suppose que $a=-3{,}75$ et $b=3$.
Vérifier que, dans ce cas, la dérivée s'annule deux fois.
Choisir un nombre c pour que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution α.
Dresser alors le tableau de signes de la fonction f.

3 On suppose que $c=0$.
a. Résoudre algébriquement l'équation $x^3-3x^2+2x=0$.
b. À quelle condition sur a et b l'équation $x^3-ax^2+bx=0$ a-t-elle trois solutions ?

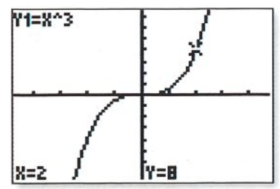
Activité 4 Positionner une courbe et ses tangentes TICE



1 On considère la fonction carré $f:x\mapsto x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
a. Justifier qu'en tout point de la parabole $\mathscr{P}$, il existe une tangente à $\mathscr{P}$.
b. Si a est un réel quelconque, montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a est $y=2a\times x-a^2$.
c. On pose $t(x)=2ax-a^2$.
Exprimer la différence $d(x)=f(x)-t(x)$ en fonction de x et de a.
Démontrer que cette différence est toujours positive, ou nulle, en $x=a$.
d. Que peut-on en déduire pour la position de la parabole $\mathscr{P}$ par rapport à ses tangentes ?

Voir AP page 62

2 En utilisant un logiciel dynamique, saisir une autre fonction f.
Par exemple : **a.** $f(x)=\dfrac{10}{x^2+1}$; **b.** $f(x)=(x-3)^3+x+2$, sur $[0\,;+\infty[$.
Choisir un point mobile sur la courbe $\mathscr{C}$ de cette fonction et tracer la tangente en ce point.
Visualiser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente.



3 On considère la fonction cube $f:x\mapsto x^3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, ci-contre à l'écran d'une calculatrice.
a. En imaginant la tangente en différents points de la courbe $\mathscr{C}$, indiquer les positions possibles de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente.
b. Calculer la dérivée de la fonction cube. Soit g cette fonction.
Expliquer pourquoi la fonction cube n'a pas d'extremum alors que sa dérivée s'annule.
c. Calculer la dérivée de g, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée de f. Étudier son signe.
Lorsque $g'(x)$ est positive, quel est le sens de variation de g ? Quelle est alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente ? Mêmes recherches lorsque $g'(x)$ est négative.

1 Sens de variation et dérivées

a Lien entre sens de variation et dérivée

Théorème admis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si la **dérivée** est strictement **positive** sur l'intervalle I , alors la **fonction** est strictement **croissante** sur I .
- Si la **dérivée** est strictement **négative** sur l'intervalle I , alors la **fonction** est strictement **décroissante sur** I .
- Si la **dérivée** est **nulle** en toute valeur de l'intervalle I , alors la **fonction** est **constante** sur I .

Note Ces notions ont été vues en 1re ES.
De l'étude du signe de la dérivée, on déduit le sens de variation d'une fonction.
Réciproquement, le sens de variation d'une fonction dérivable indique le signe de sa dérivée.
f croissante $\Leftrightarrow$ f' positive.
f décroissante $\Leftrightarrow$ f' négative.

REMARQUE
Si la dérivée s'annule en une seule valeur sur l'intervalle, mais garde un signe constant, la fonction reste strictement monotone.
C'est le cas de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Alors $f'(x)=3x^2$.
La dérivée est positive sur $\mathbb{R}$, ou nulle en 0, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b Dérivées usuelles

Théorème admis

Fonction	Fonction dérivée	Remarques
$f(x)=k$ $f(x)=x$ $f(x)=x^2$ $f(x)=x^3$ $f(x)=x^n$	$f'(x)=0$ $f'(x)=1$ $f'(x)=2x$ $f'(x)=3x^2$ $f'(x)=nx^{n-1}$	x est la **variable** réelle et k est un nombre donné. La dérivée est moins « puissante » que la fonction. **n est un entier naturel.**
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	x est un réel de $]-\infty\,;0[$ ou de $]0\,;+\infty[$. Dans la dérivée d'un quotient, un **signe –** apparaît.
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	x est un réel de $]0\,;+\infty[$. $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. **Il n'y a pas** de signe – dans la dérivée de la racine carrée.

Théorèmes admis Soit u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle.

- La dérivée d'une **somme** de deux fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions :
si $f=u+v$, alors $f'=u'+v'$.
- La dérivée du **produit** d'une fonction **par un nombre** k est le produit par k de la dérivée de la fonction :
si $f=k\times u$, alors $f'=k\times u'$.
- La dérivée du **produit** de deux fonctions u et v est telle que :
si $f=u\times v$, alors $f'=u'\times v+v'\times u$.

« *La dérivée du premier facteur que l'on multiplie par le second **plus** la dérivée du second facteur que l'on multiplie par le premier.* »

- Si, de plus, $v(x)$ **est non nul sur l'intervalle**, la dérivée du quotient de deux fonctions est telle que :
si $f=\dfrac{u}{v}$, alors $f'=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{(v)^2}$.

« *La dérivée du haut multipliée par le bas, **moins** la dérivée du bas multiplié par le haut, sur le bas au carré.* »

- Toute fonction polynôme ou rationnelle est dérivable sur l'intervalle où elle est définie.

Étudier le sens de variation d'une fonction

Exercice corrigé

Énoncé

Le taux d'équipement en lave-vaisselle en France peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;35]$ par :

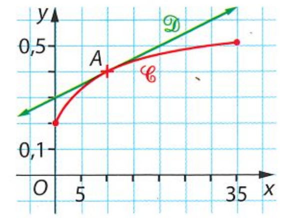
$$f(x)=\frac{3x+10}{5x+50},$$

où x désigne le temps, en année, écoulé depuis début 1980.
La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation de cette modélisation.
Le **rythme de croissance** de ce taux à l'année x est assimilé au nombre dérivé $f'(x)$.

1 Calculer la fonction dérivée f' et en déduire le sens de variations de f sur $[0\,;35]$.

2 a. Calculer le nombre $f'(10)$. Interpréter en termes de rythme de croissance.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 10.



Points méthode

1 Lorsque l'on a x au numérateur et au dénominateur d'un quotient, on applique :

si $f=\dfrac{u}{v}$, alors $f'=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{(v)^2}$.

Dans la dérivée d'un quotient, le dénominateur est un carré, toujours strictement positif sur l'intervalle donné.
Il est donc inutile de le développer.

2 Le nombre dérivé d'une fonction f en a est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f .
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a est :
$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$.

Solution

1 La fonction f est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $[0\,;35]$.
$f(x)$ est le quotient de $3x+10$, de **dérivée 3**, par $5x+50$, de **dérivée 5** :

$$f'(x)=\frac{3\times(5x+50)-5\times(3x+10)}{(5x+50)^2}=\frac{15x+150-15x-50}{(5x+50)^2}=\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{(5x+50)^2}}.$$

Comme la dérivée est strictement positive sur $[0\,;35]$, la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;35]$.

2 a. On calcule le nombre dérivé de f en 10 :

$$f'(10)=\frac{100}{(5\times10+50)^2}=\frac{100}{100^2}=\frac{1}{100}=\mathbf{0{,}01}.$$

Ainsi, en 1980 + 10, c'est-à-dire en 1990, le taux d'équipement en lave-vaisselle avait un rythme de croissance de 0,01 , soit une augmentation de 1 point de pourcentage par an.

b. La droite $\mathscr{D}$ est la tangente au point A d'abscisse $a=10$.
L'ordonnée de A est :

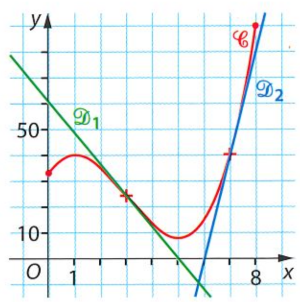
$$f(a)=f(10)=\frac{3\times10+10}{5\times10+50}=\frac{40}{100}=0{,}4.$$

Son coefficient directeur est $f'(a)=f'(10)=0{,}01$.
D'où l'équation de $\mathscr{D}$: $y=f'(10)\times(x-10)+f(10)$
$\Leftrightarrow y=0{,}01(x-10)+0{,}4$ $\Leftrightarrow y=0{,}01x+0{,}3$.

Exercices d'application

Voir exercices 28 à 35

1 Soit la fonction f définie sur $[0\,;8]$ par :
$f(x)=x^3-9x^2+15x+33$.
On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, ainsi que les tangentes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ aux points d'abscisses 3 et 7.



1 Calculer $f'(x)$.

2 Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;8]$.

3 a. Montrer que la droite $\mathscr{D}_1$ a pour équation :
$y=-12x+60$.

b. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}_2$.

2 Soit la fonction g définie sur $[0\,;4]$ par :
$g(x)=2\sqrt{x}-x$.

1 Montrer que pour tout réel x de $]0\,;4]$, on a :

$$g'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

2 En déduire le tableau de variations de g sur $[0\,;4]$.
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

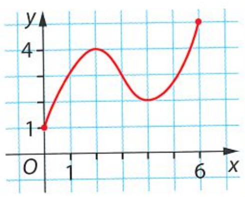
2 Continuité et équation

a Notion intuitive de continuité

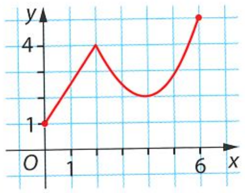
Définition Une fonction est **continue** sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe $\mathscr{C}$ se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

▸ **Fonctions continues sur [0 ; 6]**

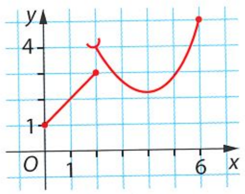


brisée en 2

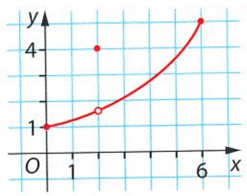


▸ **Fonctions non continues sur [0 ; 6]**

avec un saut en 2

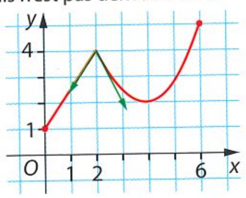


avec un « trou » en 2



Théorèmes admis ▸ Une fonction obtenue par opérations sur les fonctions usuelles est continue sur chaque intervalle où elle est définie. Ainsi, les fonctions **polynômes**, **rationnelles** et **irrationnelles** sont **continues** sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
▸ Toute fonction **dérivable** sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

Note Une fonction peut être continue mais pas dérivable : ici, la fonction f est continue en 2, mais n'est pas dérivable en 2.

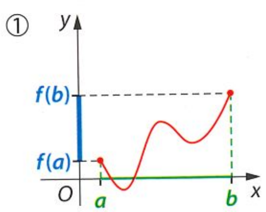


CONSÉQUENCE
Lorsqu'une fonction f est définie par morceaux, sur deux intervalles $[a\,;b]$ et $]b\,;c]$, il est nécessaire de regarder ce qui se passe en la borne b :
A-t-on une ligne brisée ou un saut en b ?

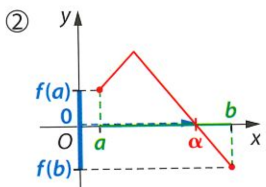
b Propriété des valeurs intermédiaires

Propriété Dans le cas d'une **fonction continue** sur un **intervalle $[a\,;b]$**, toutes les valeurs intermédiaires entre **$f(a)$ et $f(b)$** sont prises au moins une fois (fig. ①). En particulier, si **$f(a)$ et $f(b)$** sont de signes contraires, **0 est une valeur intermédiaire**. Donc **l'équation $f(x)=0$** admet au moins **une solution α** dans l'intervalle $[a\,;b]$ (fig. ②).

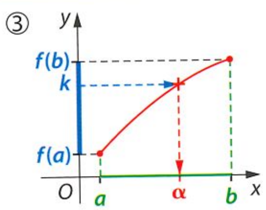
①



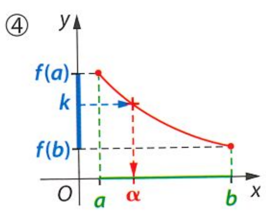
②



③



④



Théorème admis Soit f une fonction **continue** et **strictement croissante** (ou **décroissante**) sur un intervalle $[a\,;b]$ et k un nombre **entre $f(a)$ et $f(b)$** (fig. ③ et ④). Alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution α** située dans l'intervalle $[a\,;b]$.
Par convention, les flèches du tableau de variations indiquent la continuité.

Note On peut noter la démarche sur le tableau de variations de f sur l'intervalle $[a\,;b]$:

x	a	α	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	k	↘ $f(b)$

Exploiter un tableau de variations

Exercice corrigé

Énoncé

Une entreprise fabrique entre 1 000 et 7 000 coques de téléphones portables, par jour. Le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la fabrication et la vente de x milliers de coques est modélisé par :

$$B(x)=\frac{-x^3+6x^2-x}{2x+4},$$

où $x \in [1\,;7]$.
Par un calcul formel, on a obtenu la dérivée de la fonction B : on l'utilisera sans justifier.

```
1 B(x):=(-x^3+6*x^2-x)/(2*x+4)
        x -> (-x^3+6·x^2-x)/(2·x+4)
2 factoriser(deriver(B(x))
        (-x^3+12·x-1)/(x+2)^2
```

1 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=-x^3+12x-1.$$
a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1\,;7]$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $[1\,;7]$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

2 a. D'après l'étude précédente, dresser le tableau de variations de B sur $[1\,;7]$.
b. En déduire le nombre de coques à fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximum.

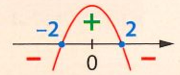
Points méthode

① Lorsque le signe d'une expression ne peut être obtenu de façon directe, on étudie souvent une **fonction auxiliaire** g :
• on étudie les variations de g ;
• on applique **la propriété des valeurs intermédiaires** sur un intervalle $[a\,;b]$ pour prouver l'**existence** de la solution α de l'équation $g(x)=0$ sur $[a\,;b]$;
• on obtient le signe de la fonction g sur $[a\,;b]$.
L'emploi de la calculatrice, ou d'un logiciel, permet d'encadrer la solution.

② Le signe de la dérivée de B donne le sens de variation de B.
On conclut le problème d'optimisation.
Par calcul d'images, on choisit la borne de l'encadrement qui donne le bénéfice maximum.
Ce n'est pas toujours la valeur arrondie.

Solution

1 a. $g'(x)=-3x^2+12$, qui s'annule en -2 et 2.



Donc sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[2\,;+\infty[$, $g'(x)$ est négative, donc la fonction g est décroissante. Et sur $[-2\,;2]$, la dérivée de g est positive, donc la fonction g est croissante.
b. On dresse le tableau de variations de g sur $[1\,;7]$.

x	1	2	α	7
$g(x)$	10 ↗	15	↘ 0 ↘	−260

Sur $[1\,;2]$, le minimum est 10.
Donc $g(x)=0$ n'a pas de solution.
Mais sur $[2\,;7]$, g est continue et strictement décroissante et elle passe de $g(2)=15$ à $g(7)=-260$. Donc g prend une seule fois la **valeur intermédiaire 0**, donc l'équation $g(x)=0$ admet une **unique solution α** sur $[1\,;7]$.

X	Y1
3.42	.03831
3.421	.01521
3.422	-.0079
3.423	-.031
3.424	-.0542
3.425	-.0774
3.426	-.1006

Y1 = -X^3+12X-1

Ainsi, sur $[1\,;\alpha[$, $g(x)$ est strictement **positif** ;
sur $]\alpha\,;7]$, $g(x)$ est strictement négatif et $g(\alpha)=0$. On obtient l'encadrement de α :
$$3{,}421 \leqslant \alpha \leqslant 3{,}422.$$
2 a. Comme $(x+2)^2$ est strictement positif sur $[1\,;7]$, la dérivée $B'(x)$ a le même signe que son numérateur $g(x)$. D'où le tableau ci-dessous :

x	1	α	7
$B'(x)$	+	0	−
$B(x)$	$B(1)$ ↗	$B(\alpha)$	↘ $B(7)$

$b(3.421)$	2.468332276
$b(3.422)$	2.468332401

b. Le bénéfice est maximum en $\alpha \approx 3{,}422$, soit **3 422 coques par jour.**

Exercices d'application

Voir exercices 51 à 57

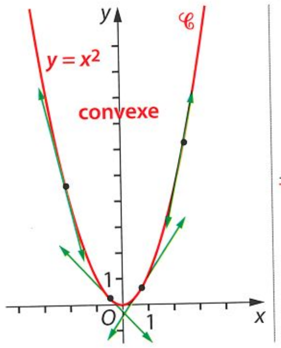
3 Soit la fonction f définie sur $[0\,;7]$ par :
$$f(x)=x^3-9x^2+15x+3.$$
1 Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$.
2 D'après ce tableau, donner le nombre de solutions de chacune des équations.
a. $f(x)=5$ **b.** $f(x)=-4$ **c.** $f(x)=2$

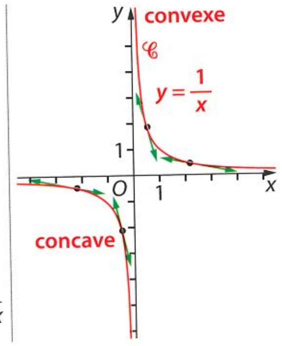
4 Soit la fonction g définie sur $[1\,;10]$ par :
$$g(x)=0{,}5x^3-4{,}5x^2+12x-12.$$
1 Dresser le tableau des variations de g sur $[1\,;10]$.
2 En déduire que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α sur $[1\,;10]$.
En donner une valeur arrondie à 0,1 près.
3 Dresser le tableau de signes de $g(x)$.

3 Convexité et inflexion

a Convexité

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, représentée par la courbe $\mathscr{C}$.
- La fonction f est dite **convexe** sur I lorsque sa courbe $\mathscr{C}$ est située entièrement **au-dessus** de chacune de ses **tangentes**.
- La fonction f est dite **concave** sur I lorsque sa courbe $\mathscr{C}$ est située entièrement **en dessous** de chacune de ses **tangentes**.





EXEMPLES

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et concave sur $]\,-\infty\,;0\,[$.

Théorème admis
- Une **fonction** f est **convexe** sur un intervalle I si, et seulement si, la **dérivée** f' est **croissante** sur I.
- Une **fonction** f est **concave** sur un intervalle I si, et seulement si, la **dérivée** f' est **décroissante** sur I.

En résumé

x	a	c	b
$f''(x)$	+	0	–
$f'(x)$	↗		↘
convexité de f	convexe ☺		concave ☹

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée de f.
- Si la **dérivée seconde** est **positive** sur I, alors la fonction est **convexe** sur I.
- Si la **dérivée seconde** est **négative** sur I, alors la fonction est **concave** sur I.

EXEMPLE

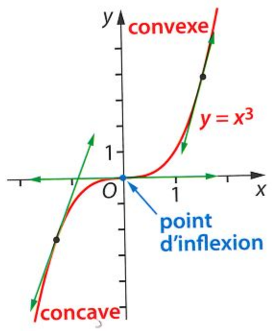
Soit f la fonction du 3ᵉ degré $x \mapsto -x^3 + 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est donnée par $f'(x) = -3x^2 + 6x$.
Sa dérivée seconde est $f''(x) = -6x + 6$. On résout $-6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Sur $]\,-\infty\,;1\,]$, la dérivée seconde est positive, donc la fonction est convexe.
Sur $[\,1\,;+\infty\,[$, la dérivée seconde est négative, donc la fonction est concave.

b Point d'inflexion

Définition Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique d'une fonction **traverse** sa **tangente** en ce point.

CONSÉQUENCE

En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité, ce qui se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde. Cela signifie que la courbe d'une fonction admet un **point d'inflexion** là où sa **dérivée seconde s'annule en changeant de signe**.



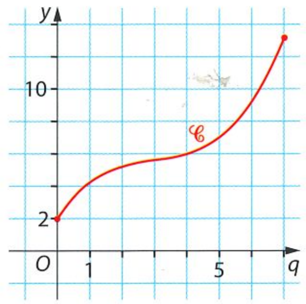
EXEMPLES
- La courbe représentant la fonction cube $x \mapsto x^3$ admet l'origine comme point d'inflexion.
- Pour la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 3x^2$, le point $I(1\,;2)$ est un point d'inflexion de sa courbe représentative.

Reconnaître un point d'inflexion

Exercice corrigé

Énoncé

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre, au maximum 7 000 par mois.
Le coût total $C(q)$, en millier d'euros, pour la fabrication de q milliers de bouteilles est modélisé par :
$C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}9q^2 + 3q + 2$, où $q \in [\,0\,;7\,]$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative du coût total C.



1 Par lecture graphique, sur quel intervalle la fonction C semble-t-elle convexe ? concave ?
La courbe $\mathscr{C}$ a-t-elle un point d'inflexion ?

2 a. Calculer la dérivée $C'(q)$, puis la dérivée de la dérivée $C''(q)$.
En déduire le tableau de variations de la dérivée C' sur l'intervalle $[\,0\,;7\,]$.
b. Démontrer les conjectures émises à la question **1**.

3 On admet que la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$, au point d'abscisse 3, a pour équation $y = 0{,}3q + 4{,}7$.
On a effectué les calculs ci-dessous, sur un logiciel de calcul formel :

$c(q) := 0.1 \cdot q^3 - 0.9 \cdot q^2 + 3 \cdot q + 2$	Terminé
$d(q) := c(q) - (0.3 \cdot q + 4.7)$	Terminé
factor($d(q)$)	$0.1 \cdot (q-3.)^3$

En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

Points méthode

❶ Pour étudier graphiquement la convexité, on imagine la **tangente en chaque point** de la courbe et on applique la définition.

❷ L'étude du **signe de la dérivée seconde** permet de démontrer la **convexité**, ainsi que l'existence d'un **point d'inflexion** si la **dérivée seconde s'annule en changeant de signe.**

❸ L'étude du signe de la différence permet de démontrer que la **courbe traverse sa tangente** au point **au point d'inflexion.**

Solution

1 La tangente en un point de la courbe $\mathscr{C}$ semble en dessous de $\mathscr{C}$ tant que l'abscisse du point est inférieure à 3, donc la fonction semble concave sur l'intervalle $[\,0\,;3\,]$, puis convexe sur $[\,3\,;7\,]$.
En 3, la courbe semble avoir un point d'inflexion.

2 a. $C'(q) = 0{,}3q^2 - 1{,}8q + 3$
et $C''(q) = 0{,}6q - 1{,}8$.
Or $0{,}6q - 1{,}8 = 0 \Leftrightarrow q = 3$.
D'où les variations de C' ci-contre.

q	0	3	7
$C''(q)$	–	0	+
$C'(q)$	↘		↗
convexité de f	concave	5,6	convexe

b. Sur $[\,0\,;3\,]$, la **dérivée est décroissante**, donc le coût total est **concave** :
sa croissance est dite « **ralentie** ».
Sur $[\,3\,;7\,]$, la **dérivée est croissante**, donc le coût total est **convexe** : sa croissance est dite « **accélérée** ».
En 3, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, donc la courbe de coût total admet un **point d'inflexion** d'ordonnée $C(3) = 5{,}6$.

3 Le calcul formel donne : $d(q) = C(q) - (\,0{,}3q + 4{,}7\,) = 0{,}1\,(\,q-3\,)^3$.
Or un nombre et son cube ont le même signe : $(\,q-3\,)^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow q-3 \geqslant 0$.
Donc sur $[\,0\,;3\,]$, $q \leqslant 3$. Ainsi, $d(q)$ est négative et la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente $\mathscr{D}$, ce qui confirme la concavité de la fonction f.
Et sur $[\,3\,;7\,]$, $q \geqslant 3$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente $\mathscr{D}$.

Exercices d'application

Voir exercices 60 à 69

5 Soit la fonction f définie sur $[\,-2\,;1\,]$ par :
$f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 2x - 5$.
1 Calculer $g(x) = f(x)$, puis $h(x) = g'(x)$.
2 Étudier le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[\,-2\,;1\,]$.
3 En déduire la convexité de la fonction f sur $[\,-2\,;1\,]$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

6 Soit g définie sur $[\,1\,;10\,]$ par $g(x) = \dfrac{5}{x+1}$.
1 Étudier le sens de variation de g sur $[\,1\,;10\,]$.
2 Quel est le sens de variation de la dérivée g' de la fonction g ? Que peut-on en déduire sur la convexité de la fonction g ?

Faire le point

Capacités — Mise en œuvre

Calculer la dérivée de fonctions usuelles.

- Si $f(x)=k$, alors $f'(x)=0$, pour k nombre connu et $x \in \mathbb{R}$.
- Si $f(x)=x$, alors $f'(x)=1$.
- Si $f(x)=x^2$, alors $f'(x)=2x$.
- Si $f(x)=x^n$, alors $f'(x)=nx^{n-1}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et n **entier naturel**.
- Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$, alors $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$, pour $x \in \left]-\infty\,;0\right[$ ou $x \in \left]0\,;+\infty\right[$.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, alors $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x \in \left]0\,;+\infty\right[$.

Connaître les formules de dérivées.

- Pour une **somme** : si $f=u+v$, alors $f'=u'+v'$.
- Pour un **produit** : si $f=k\times u$, k étant un nombre connu, alors $f'=k\times u'$.
  si $f=u\times v$, alors $f'=u'\times v+v'\times u$.
- Pour un **quotient** : si $f=\dfrac{u}{v}$, alors $f'=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{(v)^2}$, avec $v(x)\neq 0$.

Connaître le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si la **dérivée** est **positive** sur I, alors la **fonction** f est **croissante** sur I.
- Si la **dérivée** est **négative** sur I, alors la **fonction** f est **décroissante** sur I.
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de I, alors la fonction f est **constante** sur I.

Reconnaître une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$.

- Si la fonction est obtenue par les opérations usuelles, ou est **dérivable** sur l'intervalle $[a\,;c]$, alors la fonction est **continue** sur $[a\,;c]$.
- Si la fonction est définie par morceaux, sur $[a\,;b[$ et $[b\,;c]$ par exemple, on vérifie que les deux expressions ont la **même valeur en b**.

Appliquer la propriété des valeurs intermédiaires à la résolution approchée d'une équation $f(x)=0$ sur un intervalle $[a\,;b]$.

- Si la fonction f est **continue** sur un intervalle $[a\,;b]$, toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont prises au moins une fois par f.
- Si la fonction f est **continue**, **strictement croissante** (ou **décroissante**) sur $[a\,;b]$ et qu'elle passe de $f(a)$ **négative** à $f(b)$ **positive** (ou de $f(a)$ positive à $f(b)$ négative), alors elle prend **une seule fois** la **valeur intermédiaire 0**.
  Donc l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[a\,;b]$.
  On ne peut connaître *a priori* la valeur exacte de α.

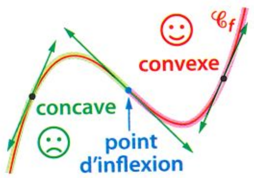
Reconnaître et démontrer la convexité, ou la concavité, d'une fonction f dérivable sur $[a\,;b]$ en utilisant la dérivée seconde f''.

	Graphiquement	Par le calcul
f est **convexe**…	si $\mathscr{C}_f$ est toujours **au-dessus** de ses tangentes.	si f' est **croissante**, c'est-à-dire : $f''(x)\geqslant 0$ sur $[a\,;b]$.
f est **concave**…	si $\mathscr{C}_f$ est toujours **en dessous** de ses tangentes.	si f' est **décroissante**, c'est-à-dire : $f''(x)\leqslant 0$ sur $[a\,;b]$.

Les fonctions usuelles, polynômes et rationnelles, sont deux fois dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

Reconnaître et démontrer l'existence d'un point d'inflexion d'abscisse a.

Graphiquement : un point où la **tangente traverse** la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion.



Par le calcul : a est un nombre où la **dérivée seconde** s'annule en changeant de signe.

Faire le point

QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

7 Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;10]$ telle que $f(2)=f(7)=3$ et la dérivée s'annule seulement en 5. Alors la fonction f est :
a. croissante sur $[0\,;10]$. **b.** décroissante sur $[0\,;10]$. **c.** non monotone sur $[0\,;10]$.

8 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+4x}$. Sa dérivée est $f'(x)=\ldots$:
a. $\dfrac{2}{2x+4}=\dfrac{1}{x+2}$. **b.** $\dfrac{-2x^2-2x-4}{(x^2+4x)^2}=\dfrac{-2(x^2+x+2)}{x^2(x+4)^2}$. **c.** $\dfrac{2x^2-8}{(x^2+4x)^2}=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x^2(x+4)^2}$.

9 À l'aide d'un calcul formel, on a obtenu les résultats ci-contre. Alors la fonction f est :

$f(x):=(1+x)^2\cdot(1-2\cdot x)$	*Terminé*
$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	$-6\cdot x\cdot(x+1)$

a. croissante sur $\left[-1\,;\dfrac{1}{6}\right]$.
b. croissante sur $[-1\,;0]$.
c. croissante sur $[0\,;+\infty[$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0\,;20]$ par $f(x)=-0{,}01x^3+0{,}3x^2+2$. La fonction f est :
a. croissante sur $[0\,;20]$. **b.** décroissante sur $[0\,;20]$. **c.** non monotone sur $[0\,;20]$.

11 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}-x^2+5, \text{ pour } x\in[0\,;2]\\ \dfrac{3}{x+2}, \text{ pour } x>2\end{cases}$. La fonction f est :
a. continue sur $[0\,;+\infty[$. **b.** continue sur $[2\,;+\infty[$. **c.** décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

12 Une fonction f est connue par son tableau de variations ci-contre.
L'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $[0\,;12]$ si :
a. f est dérivable sur $[0\,;12]$. **b.** f est décroissante sur $[0\,;3]$.
c. f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;3]$.

x	0	3	12
$f(x)$	1 ↘	−2 ↗	−0,5

13 L'équation $x^3+3x+2=0$ admet, sur $[-5\,;5]$:
a. une seule solution : $\approx -0{,}6$. **b.** une seule solution : -1. **c.** deux solutions : -2 et -1.

14 La fonction racine carrée $x\mapsto\sqrt{x}$ est :
a. concave sur $[0\,;+\infty[$. **b.** convexe sur $]0\,;+\infty[$. **c.** concave sur $]0\,;+\infty[$.

15 La fonction f définie sur $[0\,;12]$ par $f(x)=x^3-12x^2+21x+120$:
a. a une courbe n'ayant qu'un seul point d'inflexion. **b.** est concave sur $[4\,;12]$. **c.** est convexe sur $[0\,;4]$.

16 D'après sa visualisation sur une calculatrice, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+1}$ admet :
a. un point d'inflexion. **b.** deux points d'inflexion. **c.** trois points d'inflexion.

Exercices

→Les exercices portant un numéro jaune sont corrigés à la fin du manuel.

1 Sens de variation et dérivée

17 Vrai ou faux ?

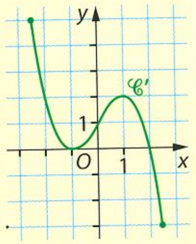
Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;4]$, dont on donne le tableau de variations ci-dessous :

x	-3		-1		1		4
$f(x)$	-2	↗	3	↘	1	↗	4

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

a. $f'(0)<0$ b. $f'(1)=1$ c. $f(-3)=-2$
d. $-2\leqslant f(-2)$ e. $f'(3)<0$ f. $f(2)>0$

18 QCM



Donner toutes les bonnes réponses.
Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$. La courbe $\mathscr{C}'$ ci-contre est celle de sa dérivée f'.

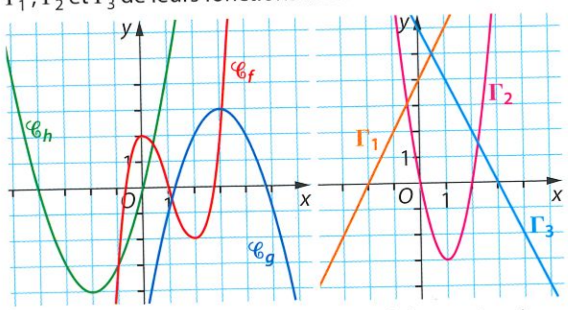
1 $f'(1)=\ldots$ a. 0. b. 1. c. 2.
2 $f'(-2)=\ldots$ a. 2. b. 0. c. -3.
3 f est croissante sur :
a. $[-2{,}5\,;-1]$. b. $[-2{,}5\,;2]$. c. $[-1\,;1]$.

19 QCM

Donner la seule bonne réponse.
1 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$.
Cette fonction f est :
a. croissante. b. décroissante. c. non monotone.
2 Soit g définie sur $[10\,;20]$ par $g(x)=\dfrac{10x+5}{x-2}$.
Cette fonction g est :
a. croissante. b. décroissante. c. non monotone.

20 Associer fonction et fonction dérivée

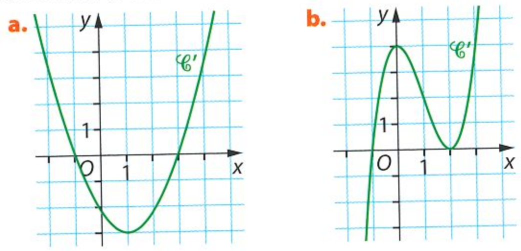
On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h dérivables sur $\mathbb{R}$, et les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de leurs fonctions dérivées.



Associer chaque courbe de fonction à la courbe de sa dérivée.

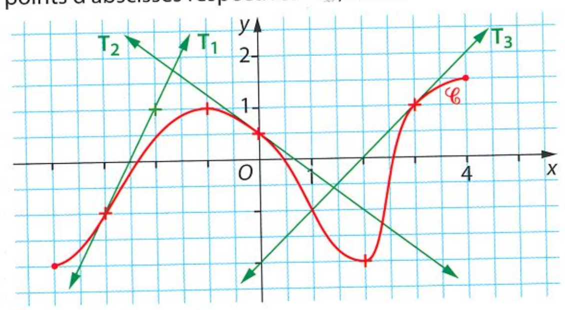
21 Construire un tableau de variations

On donne la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée d'une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Construire le tableau de variations de la fonction f.



22 Nombres dérivés et tangentes

On considère la fonction f, définie sur $[-4\,;4]$, et connue par la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous.
On connaît également les tangentes T_1, T_2 et T_3 aux points d'abscisses respectives -3, 0 et 3.



1 Lire les valeurs de :
$f(-3)$, $f'(-3)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$ et $f'(3)$.
2 Préciser les valeurs de x telles que $f'(x)=0$.
3 a. Justifier qu'une équation de la droite T_1 est :
$$y=2x+5.$$
b. Déterminer des équations des droites T_2 et T_3.
4 Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4\,;4]$, en précisant le signe de $f'(x)$.

23 Calculs de dérivées

Dériver chaque fonction donnée.
a. $f(x)=-0{,}5x^2+3x+5$ b. $g(x)=2x^3-4x^2-3x+7$
c. $h(x)=0{,}2x^3+0{,}1x^2-x+\dfrac{1}{x}$

24 Même exercice

a. $f(x)=3\sqrt{x}+2x-1$ b. $g(x)=(3x^2+x-1)(2x+3)$
c. $h(x)=(4x+1)\sqrt{x}+10$

25 Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x)=\dfrac{3x+1}{4x+5}$ b. $g(x)=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$

Exercices

26 Dérivées de carrés et de cubes

On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I.
1 Démontrer que si $\boldsymbol{f=(u)^2}$, alors $\boldsymbol{f'=2\times u'\times u}$.
2 Démontrer que si $f=(u)^3$, alors $f'=3\times u'\times(u)^2$.
3 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
a. $f(x)=(x^2-3x)^2$ b. $g(x)=(4x-1)^3$

27 Calculer la dérivée de chaque fonction.

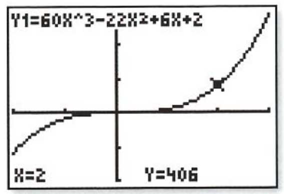
a. $f(t)=(2t-3)^2\sqrt{t}$
b. $g(q)=0{,}1(2q-1)^3+3q+10$
c. $h(x)=3x+5-\dfrac{10}{(4x+1)^2}$

28 Étudier des variations

Pour chaque fonction f définie sur l'intervalle I donné, calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle I.
Préciser les valeurs aux bornes et les extrema locaux.
a. $f(x)=4x^2+12x-5$ sur $\mathrm{I}=[-2\,;10]$.
b. $f(x)=x^3+6x^2-15x+10$ sur $\mathrm{I}=[1\,;6]$.
c. $f(x)=0{,}1x^3-3x^2+30x-100$ sur $\mathrm{I}=[100\,;500]$.

29 Confirmer ou infirmer une conjecture

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;3]$ par :
$$f(x)=60x^3-33x^2+6x+2.$$



On a représenté la fonction f à la calculatrice.
1 Conjecturer le sens de variation de f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
2 a. Calculer $f'(x)$.
b. Résoudre l'équation $f'(x)=0$ et en déduire le tableau de signes de $f'(x)$.
3 Que peut-on penser de la conjecture faite en 1 ? Argumenter.

30 Étudier un bénéfice

Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est :
$$B(x)=-3x^2+33x-54,\ \text{où}\ 1\leqslant x\leqslant 10.$$
1 a. Calculer $B'(x)$.
En déduire le tableau de variations de B sur $[1\,;10]$.
b. Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ?
Préciser la valeur de ce bénéfice.
2 a. Résoudre l'équation $B(x)=0$.
En déduire les **points morts** de la production.
b. Résoudre l'inéquation $B(x)\geqslant 0$.
En déduire la **plage de bénéfice** de la production.

31 Étudier une production

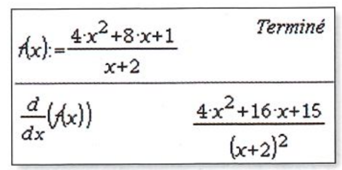
Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45 kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 €.
On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de truffes traités en une semaine.
On estime que la fonction f est définie sur $[1\,;45]$ par :
$$f(x)=x^2-60x+1\,250.$$
1 Justifier que le coût de production total $C(x)$ pour x kg de truffes est donné, en euro, par :
$$C(x)=x^3-60x^2+1\,250x.$$
2 Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réalisé par ce producteur pour x kg de truffes conditionnés et vendus.
3 a. Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[1\,;45]$.
b. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? *Arrondir le résultat à 100 g près.*
Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 € près ?

32 Utiliser la calculatrice

On considère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :
$$f(x)=\frac{-2x+3}{3x+2}.$$
1 À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
Le démontrer à l'aide de la dérivée et dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;5]$, en précisant les valeurs aux bornes.
2 Résoudre l'équation $f(x)=0$.
Interpréter graphiquement la réponse.

33 Fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $[1\,;10]$ par :
$$f(x)=\frac{4x^2+8x+1}{x+2}.$$
On a effectué la recherche de sa dérivée à l'aide d'un logiciel de calcul formel.



1 Justifier l'expression de $f'(x)$ obtenue.
2 Étudier le signe de $4x^2+16x+15$ sur $\mathbb{R}$.
3 En déduire le tableau des variations de f sur $[1\,;10]$.
Préciser les valeurs des extrema locaux.

34 Variations de fonctions rationnelles

Pour chaque fonction définie sur l'intervalle donné, étudier ses variations à l'aide de sa dérivée.

a. $f(x)=\dfrac{9x^2+36x+81}{x+4}$ sur $[-2\,;6]$.

b. $g(x)=\dfrac{2x^2-2x-5}{x-1}$ sur $[2\,;11]$.

35 Avec une racine carrée

Une entreprise fabrique entre 1 000 et 4 000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de x milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour $1 \leqslant x \leqslant 4$: $C(x)=2x-\sqrt{x}+4$.

1 Montrer que, pour tout réel x de $[1\,;4]$, on a :

$$C'(x)=\frac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}.$$

2 a. Résoudre l'inéquation $4\sqrt{x}-1 \geqslant 0$.

b. En déduire le sens de variation du coût total C sur l'intervalle $[1\,;4]$. Interpréter économiquement.

36 Étudier un coût moyen

Le coût, en euro, de x repas préparés dans un restaurant peut s'écrire : $C(x)=0{,}1x^2-x+640$, pour $x \in [40\,;160]$. On note $CM(x)$ le coût moyen de x repas, en euro par repas.

1 Justifier que C est croissante sur $[40\,;160]$.

2 a. Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.

b. Exprimer le coût moyen $CM(x)$ par repas en fonction du nombre x de repas préparés.

3 a. Étudier le sens de variation du coût moyen CM.

b. Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

37 Coût total, coût marginal et coût moyen

L'entreprise TOUTFABRIK fabrique entre 10 000 et 50 000 chaises chaque mois. Voir AP page 61

Le **coût total de production $C(x)$**, en euro, de x milliers de chaises est donné par :

$C(x)=x^3-3x^2+11\,000x+123\,200$, où $x \in [10\,;50]$.

1 a. Calculer $C_m(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de C sur $[10\,;50]$.

c. Justifier que la fonction C_m est croissante sur $[10\,;50]$. Interpréter économiquement.

Note 1 Le **coût marginal $C_m(x)$** est le coût occasionné par la production de la dernière chaise quand on en a fabriqué x milliers : $\dfrac{C(x-0{,}001)-C(x)}{0{,}001}$.

Il est exprimé en euro par millier de chaises.
Il est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(x)=C'(x)$.

Note 2 Le **coût moyen $C_m(x)$** est égal au coût total de production divisé par le nombre de chaises fabriquées :

$$C_m(x)=\frac{C(x)}{x}.$$

Le coût moyen est exprimé dans la même unité que le coût marginal. Ici, en euro par millier de chaises.

2 a. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

b. En utilisant les résultats ci-dessous obtenus par calcul formel, étudier les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $[10\,;50]$.

$f1(x)$	$x^3-3\cdot x^2+11000\cdot x+123200$
$cm(x):=\dfrac{f1(x)}{x}$	*Terminé*
$\text{factor}\left(\dfrac{d}{dx}(cm(x))\right)$	$\dfrac{(x-40)\cdot(2\cdot x^2+77\cdot x+3080)}{x^2}$

3 Vérifier par calcul que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.

38 Fonction de satisfaction

On mesure la satisfaction des consommateurs par une « **fonction de satisfaction** » f, à valeurs dans l'intervalle $[0\,;100]$. La satisfaction vaut 0 lorsque les consommateurs ne sont pas satisfaits et vaut 100 lorsque les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « **saturation** ».

On définit la fonction « **envie** » v comme étant la dérivée de la fonction f. On a donc $v=f'$.

On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive.

Sinon on dit qu'il y a « rejet ».

Une agence de voyages propose différents types de formules pour les vacances et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une croisière.

La fonction de satisfaction f est définie sur l'intervalle $[0\,;21]$ par :

$f(x)=0{,}02x^3-1{,}4x^2+22x$,

où x est la durée, en jour, de la croisière.

1 Calculer $f'(x)$, puis en étudier le signe sur $[0\,;21]$.

2 Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;21]$.

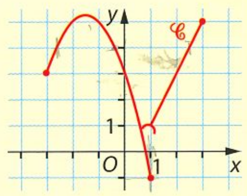
3 a. Quelle doit être la durée, en jour, de la croisière pour qu'il y ait saturation ?

b. Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

2 Continuité et équation

39 Vrai ou faux ?

Soit la fonction f définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre, en deux parties.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. La fonction f est continue sur $[-3\,;3]$.

b. $f(1)=1$.

c. La fonction f est continue sur $[-3\,;1]$.

d. L'équation $f(x)=4$ admet trois solutions.

40 Vrai ou faux ?

On considère une fonction f définie sur $[-5\,;5]$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si $f(-5)>0$ et $f(5)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur $[-5\,;5]$.

b. Si f est une fonction continue sur $[-5\,;5]$ et telle que $f(-5)=-2$ et $f(5)=1$, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur $[-5\,;5]$.

c. Soit un réel a dans $[-5\,;5]$.

Si f est dérivable et strictement croissante et telle que $f(a)=0$, alors le tableau de signes de $f(x)$ est :

x	-5		a		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

41 QCM

Donner la bonne réponse.

1 Sur $[-4\,;4]$, l'équation $x^3+3x^2+1=0$ admet :

a. 1 solution. **b.** 2 solutions. **c.** 3 solutions.

2 La valeur arrondie à 0,001 près de la solution de l'équation $-0{,}1x^3+0{,}9x^2-2{,}4x+1=0$ est :

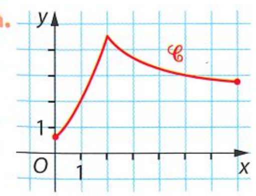
a. 0,507. **b.** 0,508. **c.** 0,509.

42 Reconnaître graphiquement la continuité

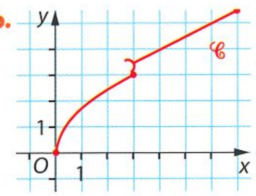
Pour chaque fonction définie sur $[0\,;7]$ et connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$, indiquer si elle est continue sur $[0\,;7]$.

Sinon, préciser les intervalles sur lesquels la fonction est continue.

a.



b.



43 Fonction par morceaux

On considère la fonction f telle que :

- sur $[0\,;1]$, $f(x)=-3x^2+x+3$;
- sur $]1\,;9]$, $f(x)=\sqrt{x}$.

a. La fonction f est-elle continue sur $[0\,;9]$?

b. Calculer le nombre dérivé de f en 1, sur $[0\,;1]$.

Quelle est le nombre dérivé de la fonction racine carrée en 1 ?

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en 1 ?

44 Investissement dans une entreprise

Une entreprise fabrique entre 10 000 et 50 000 composants électroniques par mois.

Lorsque sa production mensuelle dépasse 40 000 composants, elle doit faire appel à un prestataire extérieur, ce qui l'oblige à un investissement et augmente ses coûts.

La fonction coût total est donnée sur $[10\,;50]$ par :

$$C(x)=\begin{cases} 4x, \text{ pour } 10 \leqslant x \leqslant 40 \\ x^2-75x+1\,650, \text{ pour } 40<x\leqslant 50 \end{cases}$$

où x est la quantité mensuelle de composants fabriqués, en millier, et $C(x)$ est exprimée en centaine d'euros.

a. Calculer le coût total de fabrication de 10 000, 40 000 et 50 000 composants.

b. La fonction C est-elle continue sur $[10\,;50]$?

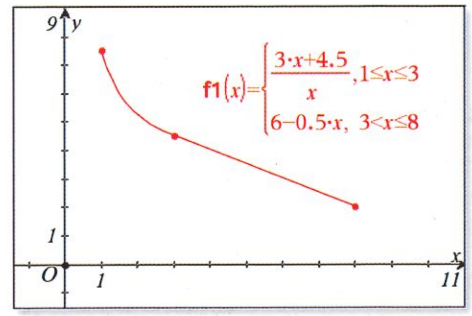
c. Justifier que C est croissante sur $[10\,;50]$.

45 Demande discontinue ?

La demande d'un produit, en tonne, est modélisée par la fonction f représentée ci-dessous, pour un prix x variant de 1 à 8 euros le kg.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+4{,}5}{x}, \text{ pour } x \in [1\,;3] \\ 6-0{,}5x, \text{ pour } x \in]3\,;8] \end{cases}.$$

Conjecturer la continuité et le sens de variation de cette demande. Par calculs, établir ces conjectures.



46 Continuité de l'offre

L'offre des producteurs sur le marché des choux-fleurs est modélisée par la fonction f telle que :

$$f(x)=\begin{cases} 5-\dfrac{6}{x+3}, \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0{,}1(x-1)^2+2, \text{ pour } 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

où x est la quantité offerte, en centaine de tonnes, et $f(x)$ le prix en euro par cageot de 10 kg.

1 **a.** Calculer le prix au kg pour une offre de 300 tonnes, puis une offre de 450 tonnes.

b. S'il se vend 500 tonnes, calculer le prix d'un cageot de 10 kg. En déduire le chiffre d'affaires dégagé par la totalité de cette vente, exprimé en euro.

2 **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$, puis sur $]4;8]$.

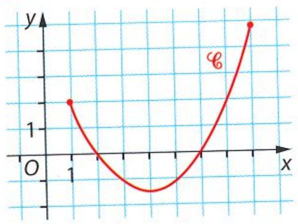
b. Étudier la continuité de cette fonction d'offre.

c. Cette fonction d'offre est-elle monotone pour une quantité de 0 à 800 tonnes ?

3 Le prix du marché s'établit à 3,6 € le cageot de 10 kg. Déterminer les quantités offertes à ce prix.

47 Discussion sur le nombre de solutions

La fonction f, définie sur $[1;8]$, est connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre.



Son minimum vaut $-1{,}6$.

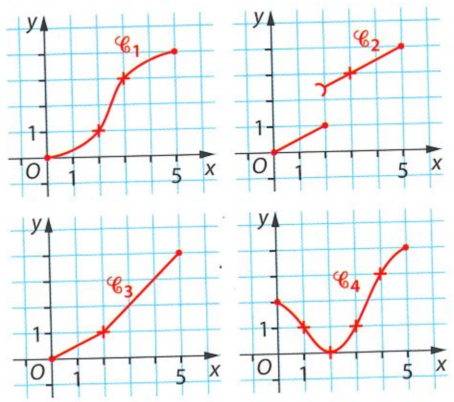
1 Préciser le nombre de solutions de chaque équation :

a. $f(x)=1$. **b.** $f(x)=0$. **c.** $f(x)=3$.

2 Discuter, selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ dans $[1;8]$.

48 Continuité et équation sur une courbe

Quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont définies sur $[0;5]$ et représentées ci-après par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$:



a. Préciser les fonctions qui sont continues sur $[0;5]$.

b. Pour chacune de ces fonctions, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ dans $[0;5]$, suivant les valeurs du réel k de l'intervalle $[0;4]$.

49 Extrema et signe

Dans chaque cas, f est une fonction continue sur $[1;5]$. Dresser son tableau de signes.

a. Le minimum de f est 2, atteint en 3.

b. Le maximum de f est -1, atteint en 4.

c. Le minimum de f est 2, atteint en 1 et le maximum est 10, atteint en 4.

d. Le minimum de f est -3, atteint en 1, la fonction f est strictement croissante et $f(3)=0$.

50 Tableaux de variations et de signes

Pour chaque fonction f continue sur son ensemble de définition, on connaît son tableau de variations. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

a.

x	1	3	4	7	9
$f(x)$	2 ↘	0	↘ -3 ↗	0	↗ 4

b.

x	0	2	5	8	10
$f(x)$	-2 ↗	0	↗ 3 ↘	0	↗ 5

c.

x	10	15	20	30	50
$f(x)$	-5 ↗	-1 ↘	-3 ↗	0	↗ 5

51 Résoudre par balayage à la calculatrice

On considère la fonction f définie sur $[0;4]$ par :

$$f(x)=-x^3+6x^2-9x+1.$$

1 **a.** Représenter f à la calculatrice. Quel semble être le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?

b. Étudier le sens de variation de la fonction f.

c. En appliquant la propriété des valeurs intermédiaires, démontrer la conjecture faite en **1** **a.** à la calculatrice.

d. Encadrer chaque solution entre deux entiers consécutifs. On les nommera : x_1, x_2, etc.

2 **a.** Sur la calculatrice, on a tabulé la fonction f à partir de 0, par pas de 0,1. Expliquer pourquoi on peut affirmer que la fonction f s'annule entre 0,1 et 0,2.

X	Y1	
0	1	
.1	.159	
.2	-.568	
.3	-1.187	
.4	-1.704	
.5	-2.125	
.6	-2.456	

Y1 = -X^3+6X²-9X+1

b. En poursuivant le procédé à partir de 0,1 par pas de 0,01, puis par pas de 0,001, déterminer un encadrement à 0,001 près de l'une des solutions de $f(x)=0$.

3 Obtenir de la même façon un encadrement à 0,001 près de chacune des autres solutions de l'équation $f(x)=0$.

On pourra vérifier en utilisant le solveur de la calculatrice.

52 Résolution approchée d'équations

1 Sur $[-6;4]$, on considère l'équation :

$$2x^3+3x^2-36x+10=0.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction définie par le premier membre de cette équation.

b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation, puis la valeur arrondie de chaque solution à 0,01 près.

2 Procéder de même sur $[10;50]$ pour l'équation :

$$x^3-30x^2+302x+200=2\,000.$$

53 Utiliser le solveur de la calculatrice

Soit la fonction f définie sur $[-1;4]$ par :

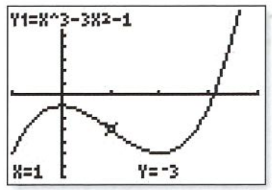
$$f(x)=x^3-3x^2-1.$$

1 **a.** Étudier les variations de f sur $[-1;4]$.

b. Dresser son tableau de variations et justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1;4]$.

c. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ en indiquant le réel α.

2 **a.** Donner un encadrement de la solution α par deux entiers consécutifs.



b. Utiliser le solveur graphique de la calculatrice, pour obtenir un encadrement de α d'amplitude 0,001.

Aide Une fois la courbe tracée à l'écran, utiliser :

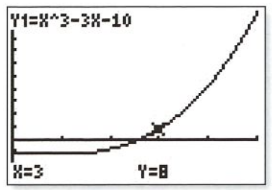
- TI™ : 2nde calculs trace 2:zéro
- Casio : SHIFT G-Solv F5 ROOT

54 Tableau de signes

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x)=x^3-3x-10.$$

1 Dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$.



2 En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;5]$.

3 En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0;5]$.

55 Étudier le signe d'une dérivée

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{10}{x+1}.$$

1 Montrer que, pour tout réel x de $[0;5]$:

$$f'(x)=\frac{2x^3+4x^2+2x-10}{(x+1)^2}.$$

2 **a.** Soit g la fonction définie sur $[0;5]$ par :

$$g(x)=2x^3+4x^2+2x-10.$$

Montrer que g est strictement croissante et s'annule en une seule valeur α.

b. Déterminer la valeur arrondie de α à 0,01 près.

c. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$. On établira le lien avec la question **2**.

56 Points d'intersection

Soit les fonctions f et g définies sur $[0;3]$ par :

$$f(x)=x^2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{x+1}.$$

1 Tracer, à la calculatrice, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, respectivement de f et de g.

Conjecturer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs positions relatives sur $[0;3]$.

2 On pose $d(x)=f(x)-g(x)$ sur $[0;3]$.

a. Étudier les variations de d sur $[0;3]$.

b. Montrer que l'équation $d(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;3]$.

Déterminer une valeur approchée de α à 0,001 près.

c. En déduire le tableau de signes de $d(x)$.

3 Utiliser ces résultats pour confirmer, ou infirmer, les conjectures de la question **1**.

57 Offre, demande et prix d'équilibre

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 euros. On estime que les quantités de livres offertes $f(x)$ et demandées $g(x)$ sont définies sur $[15;75]$ par :

$f(x)=55{,}8x+1\,340$

et $g(x)=-0{,}03x^3+5x^2-300x+8\,780$,

où x est le prix d'un livre.

1 Étudier les variations de f et de g sur $[15;75]$. Interpréter économiquement le résultat.

2 On rappelle que le **prix d'équilibre** est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande : on parle alors de quantité d'équilibre.

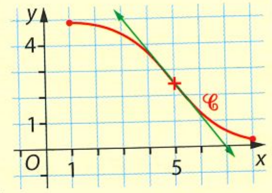
a. Après avoir justifié que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution x_0 sur $[15;75]$, déterminer la valeur approchée de x_0 arrondie à dix centimes près.

b. Calculer alors la quantité d'équilibre, arrondie à 10 livres près.

3 Convexité et inflexion

58 QCM

La fonction f, définie sur $[1\,;8]$, est connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre.



Donner la bonne réponse.

1 f est convexe sur : **a.** $[1\,;8]$. **b.** $[1\,;5]$. **c.** $[5\,;8]$.
2 f est concave sur : **a.** $[1\,;8]$. **b.** $[1\,;5]$. **c.** $[5\,;8]$.

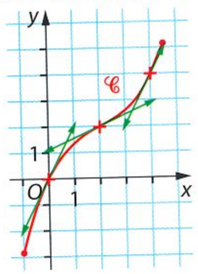
59 Vrai ou faux ?

Soit une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1 Si la dérivée f' est croissante sur I, alors la fonction f est convexe sur I.
2 Si, pour tout réel x de I, la dérivée seconde est positive, alors la fonction f est convexe sur I.
3 Si la dérivée seconde f'' s'annule en a, en changeant de signe, alors le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion.

60 Position de $\mathscr{C}$ par rapport aux tangentes

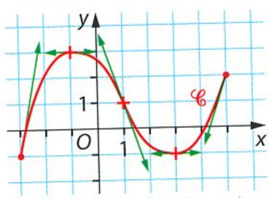
Soit la fonction f définie et dérivable sur $[-1\,;4{,}5]$ et connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre et ses tangentes aux points d'abscisses 0,2 et 4.



1 a. Lire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
b. Sur $[-1\,;2]$, f est-elle convexe ou concave ?
2 Sur $[2\,;4{,}5]$, f est-elle convexe ou concave ?
3 Étudier graphiquement la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

61 Sens de variation de la dérivée

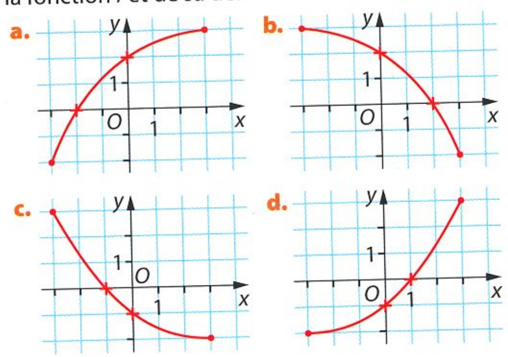
On considère une fonction f définie sur $[-3\,;5]$ et représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$.
On a tracé quelques tangentes à $\mathscr{C}$.



1 a. En utilisant les coefficients directeurs des tangentes à $\mathscr{C}$, justifier que la dérivée f' de la fonction f est décroissante sur $[-3\,;1]$.
b. En déduire une propriété de la fonction f et vérifier en regardant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes sur $[-3\,;1]$.
2 Quel est le sens de variation de f' sur $[1\,;5]$?
Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
3 La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion ?
Si oui, en quelle abscisse ?

62 Variation de f' sur la courbe $\mathscr{C}_f$

Pour chaque courbe ci-dessous représentant une fonction f dérivable sur $[-3\,;3]$, indiquer le sens de variation de la fonction f et de sa dérivée f'.



63 Étudier la convexité d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x)=\frac{10\,x}{(x+2)^2}.$$

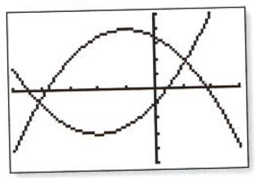
On a obtenu les résultats ci-contre, qu'on utilisera sans justifier.

1	f(x):=10*x/(x+2)^2
	$x \to 10\cdot\left(\frac{x}{(x+2)^2}\right)$
2	g(x):=deriver(f(x))
	$x \to \frac{-10\cdot(x-2)}{(x+2)^3}$
3	h(x):=deriver(g(x))
	$x \to \frac{20\cdot(x-4)}{(x+2)^4}$

1 Sur $[0\,;10]$, étudier le signe de $h(x)=f''(x)$, dérivée seconde de f.
2 En déduire la convexité de la fonction f.
3 En quel point la courbe de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

64 Polynômes du second degré

Les fonctions f et g sont définies sur $[-5\,;3]$ par :
$f(x)=0{,}5x^2+2x-1$
$g(x)=-0{,}5x^2-x+3{,}5$.
On a obtenu à la calculatrice les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



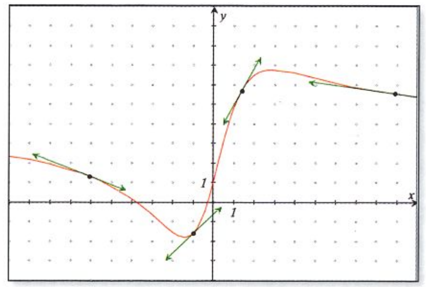
1 a. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
b. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$.
2 Démontrer la convexité de ces fonctions.

65 Cas général de la parabole

Soit f une fonction polynôme du second degré :
$$f(x)=ax^2+bx+c\text{, avec } a\neq 0\text{, sur } \mathbb{R}.$$
Étudier la convexité de la fonction f suivant a.

66 Reconnaître un point d'inflexion

Une fonction f, définie sur $[-10\,;10]$, est représentée sur un grapheur, ainsi que quelques tangentes.



D'après la représentation graphique, indiquer le nombre de points d'inflexion de cette courbe et donner un encadrement de chaque abscisse par deux entiers consécutifs.

67 Existence d'un point d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par :
$$f(x)=x^3-3x+1.$$
1 Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2 Déterminer la solution x_0 de l'équation $f''(x)=0$.
Puis étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-3\,;3]$.
3 La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

68 Fonction polynôme du 3e degré

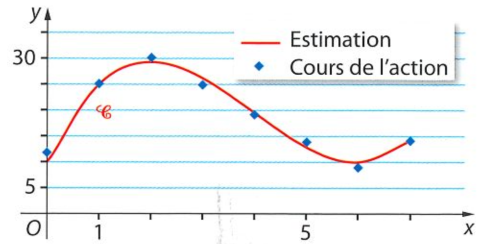
Soit f une fonction polynôme du 3e degré telle que :
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\text{, avec } a\neq 0\text{, sur } \mathbb{R}.$$
1 On suppose que le coefficient a est positif.
a. Calculer sa dérivée seconde. En déduire l'existence d'un point d'inflexion, d'abscisse α, pour la courbe $\mathscr{C}_f$.
b. Démontrer que, sur $]-\infty\,;\alpha]$, la fonction f est concave et que, sur $[\alpha\,;+\infty[$, la fonction f est convexe.
2 Étudier le cas où le coefficient a est négatif.

69 Position d'une tangente

Soit la fonction f définie sur $[1\,;5]$ par :
$$f(x)=x^3-6x^2+11x-8.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
1 Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
2 a. Justifier que $d(x)=f(x)-(-x)=(x-2)^3$.
b. Étudier le signe de cette différence $d(x)$.
c. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $[1\,;5]$.
3 Que représente le point d'abscisse 2 pour la courbe $\mathscr{C}$? Justifier en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

70 Réaliser des prévisions

Après de bons résultats obtenus entre début 2005 et début 2007, un groupe hôtelier a vu le cours de son action chuter les années suivantes. Décidé à retrouver un cours équivalent à celui de début 2007, le groupe a lourdement investi pour ouvrir des hôtels en Asie. Les résultats y du cours boursier de l'action du groupe hôtelier, en euro, sont donnés sur le graphique ci-dessous, où x désigne le temps écoulé depuis le début 2005.



On ajuste ces points par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :
$$y=0{,}6x^3-7{,}2x^2+21{,}6x+10\text{, avec } x\in[0\,;7].$$
1 a. Calculer le cours estimé de l'action en début 2007.
b. Étudier les variations de la fonction f de courbe $\mathscr{C}$.
c. Déterminer l'année au cours de laquelle le groupe retrouve un cours équivalent à celui de début 2007.
2 Calculer $f''(x)$. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. En donner une interprétation économique.

71 Point d'inflexion et coût total

Une entreprise fabrique entre 20 000 et 70 000 bouteilles, toutes identiques, par mois.
Pour une quantité q produite, en millier, on estime que les coûts de production, en milliers d'euros, sont
$C(q)=0{,}005\,(q-40)^3+0{,}1q+50$, où $20\leqslant q\leqslant 70$.
Par calcul formel, on a obtenu :

$c(q):=0.005\cdot(q-40)^3+0.1\cdot q+50$	*Terminé*
$\text{expand}\left(\frac{d}{dq}(c(q))\right)$	$0.015\cdot q^2-1.2\cdot q+24.1$
$\text{expand}\left(\frac{d}{dq}\left(\frac{d}{dq}(c(q))\right)\right)$	$0.03\cdot q-1.2$

1 Justifier par calcul les résultats obtenus.
2 Montrer que la courbe de la fonction de coût C admet un point d'inflexion en 40.
Préciser la convexité de la fonction C.
3 On rappelle que le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q)=C'(q)$.
Montrer que le coût marginal admet un minimum.

Remarque On fait le lien avec la convexité du coût.
On dit que, avec l'augmentation de la production :
- sur $[20\,;40]$, la croissance du coût est ralentie ;
- sur $[40\,;70]$, la croissance du coût est accélérée.

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Étudier le sens de variation d'une fonction f.	On calcule la **dérivée $f'(x)$** et on étudie le signe de l'expression $f'(x)$ dans un tableau de signes. On conclut en donnant le tableau de variations.
Dénombrer les solutions d'une équation $f(x)=k$	Dans le tableau de variations de f, on raisonne sur chaque intervalle $[a\,;b]$, où f est **continue** et **strictement monotone**, repéré par une flèche oblique : • si k n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation n'a pas de solution sur $[a\,;b]$; • si k est un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$, on applique la **propriété des valeurs intermédiaires** et l'équation admet alors des solutions.
et déterminer un encadrement d'une solution α, à 0,1 près.	**Pour obtenir un encadrement à 0,1 près, on procède par balayage à la calculatrice :** On tabule $f(x)$ sur $[a\,;b]$ par pas de 0,1 et on repère les deux valeurs x_1 et x_2 d'écart 0,1 telles que $f(x_1)\leqslant k$ et $f(x_2)\geqslant k$: **α est compris entre x_1 et x_2.**
Étudier le signe de $f(x)$.	• Si on peut factoriser $f(x)$, on étudie le signe de chaque facteur et on conclut dans un tableau de signes. Si besoin, on utilise le signe du polynôme de degré 2. • Dans le cas où f est **continue**, **strictement monotone** et **s'annule en α** sur $[a\,;b]$, on lit le signe de $f(x)$ à partir du tableau de variations de f :
Visualiser la convexité d'une fonction sur sa courbe représentative.	On imagine la tangente en chaque point de la courbe, de façon dynamique : • si la **tangente** reste **en dessous** de la courbe, la fonction est **convexe** ; • si la **tangente** reste **au-dessus** de la courbe, la fonction est **concave**.
Repérer un point d'inflexion d'abscisse a.	• Graphiquement, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a **traverse la courbe**. • Par le calcul, la dérivée seconde f'' **s'annule en a en changeant de signe**.

Exemple

x	-3		1	α	5
$f(x)$	-1	↘	-2	↗ 0 ↗	3

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-3\,;5]$.

x	a	α	b
$f(x)$	$-$	0	$+$

x	a	α	b
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exercice guidé

72 Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x)=\frac{8}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2-4.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1 À l'aide de la calculatrice, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;6]$.

2 On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.

a. Étudier les variations de d sur $[0\,;6]$.

b. Montrer que l'équation $d(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0\,;6]$.

Déterminer la valeur arrondie de α à 0,001 près.

c. Dresser le tableau de signes de $d(x)$ sur $[0\,;6]$.

3 Démontrer les conjectures de la question **1** en utilisant les résultats précédents.

Aide

1 On choisit une fenêtre où $X_{min}=0$ et $X_{max}=6$.

2 a. Comme $d(x)$ est une différence, sa dérivée est : $f'(x)-g'(x)$. Pour en étudier le signe, il n'est pas nécessaire de réduire au même dénominateur.

b. Il ne faut PAS chercher à résoudre l'équation ! On demande seulement de montrer **l'existence et l'unicité d'une solution**.

La calculatrice va permettre de trouver un encadrement $[x_1\,;x_2]$ et de choisir, entre x_1 et x_2, la valeur dont l'**image par d est la plus proche de 0**.

3 Si la différence $d(x)$ est positive, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Voir AP page 62

Revoir les outils de base

Savoir lire une courbe de coût total

73 Le coût total pour la production d'un produit en quantité q est la somme de tous les coûts de fabrication : la fonction de coût total CT est donc toujours croissante.

Sur la courbe $\mathscr{C}$ d'un coût total :

- **le coût total $CT(q)$** est l'ordonnée du point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse la quantité q ;
- les **coûts fixes** sont les coûts lorsque l'on produit une quantité nulle : $CT(0)$;
- le **coût moyen**, pour une production q, est le quotient du coût total par la quantité : $C_M(q)=\dfrac{CT(q)}{q}$.

Le **coût marginal**, coût de la dernière unité produite, ou d'une unité supplémentaire, est assimilé à la dérivée du coût total lorsque les quantités sont importantes ou continues : $C_m(q)=CT'(q)$.

1 Pour la fonction CT ci-contre, par **lecture graphique** :

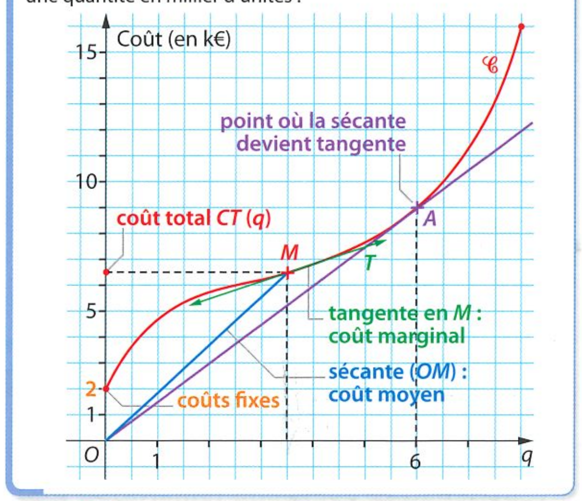
a. lire le coût marginal pour 3 500 unités produites, ainsi que le coût moyen de l'une de ces unités ;

b. établir le tableau de variations du coût moyen.

2 Graphiquement, comparer le coût marginal et le coût moyen pour une quantité $q\geqslant 6$.

3 Existe-t-il une quantité pour laquelle le coût marginal est minimal ? Si oui, en donner une valeur approchée.

Représentation Coût total, en millier d'euros, pour une quantité en millier d'unités :



Aide

Pour une production q, le **coût marginal** est le coefficient directeur de la **tangente** à $\mathscr{C}$ en M et le **coût moyen** est le coefficient directeur de la **sécante (OM)**.

Savoir étudier le signe d'un polynôme du 2d degré

74 Sur la feuille de calcul ci-dessous, on obtient la résolution d'équations $ax^2+bx+c=0$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a*	*b*	*c*	Delta	solutions ?	x_1	x_2
2	2	3	-5	49	oui	-2,5	1
3	100	-140	49	0	oui	0,7	0,7
4	10	8	2	-16	non	#######	#######

a. Quelle formule est saisie en cellule **D2** pour obtenir le discriminant ?

b. Expliquer la formule ci-contre `=SI(D2>=0;"oui";"non")` saisie en **E2**.

c. Donner les formules saisies en **F2** et **G2**, et expliquer les résultats obtenus en **F4** et **G4**.

75 Étudier le signe des expressions suivantes en utilisant la position relative de la parabole par rapport à l'axe des abscisses :

$A(x)=(x-3)^2(x+1)$ $\qquad B(x)=2x(x+3)$

$C(x)=-4x^2+4x-1$ $\qquad D(x)=-3x^2+4x-1$

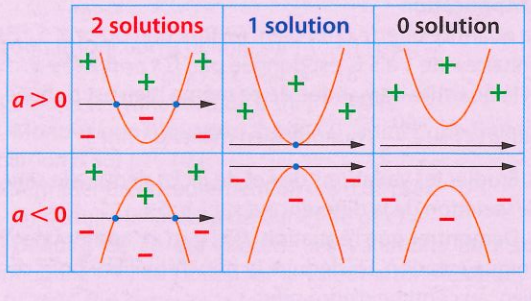
$E(x)=\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}$ $\qquad F(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}-4$

Aide

L'existence des solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si Δ est **strictement positif**, l'équation a **deux solutions** : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}$.
- Si Δ est **égal à zéro**, l'équation a **une seule solution** : $\alpha=\dfrac{-b}{2\times a}$.
- Si Δ est **strictement négatif**, l'équation n'a **pas de solution**.

Signe du polynôme :



Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente

76 **1** Sur le graphique ci-contre, déterminer l'équation de la tangente T tracée.
2 Sur le graphique de l'exercice **73**, déterminer l'équation de la tangente en A et celle de la tangente T.

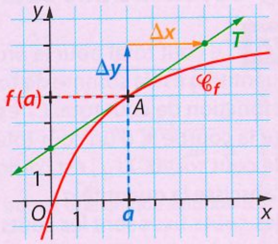
77 Pour chaque courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$, déterminer l'équation de la tangente en a.
a. $y = \dfrac{1}{2x+1}$ en $a = 2$;
b. $y = 2\sqrt{x} + 3$ en $a = 4$;
c. $y = -x^2 + 3x - 1$ en $a = 3$.

Aide

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel a de I, l'équation de la **tangente** T à la courbe $\mathscr{C}$ **en** a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Le **coefficient directeur** de la tangente est le **nombre dérivé de** f **en** a.



Savoir étudier la position relative de deux courbes

78 Une fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = -x^2 + 2x$.
Soit T sa tangente au point d'abscisse 0 et $\mathscr{D}$ celle au point d'abscisse 2.
a. Déterminer l'équation de la tangente T sous la forme $y = t(x)$.
b. Exprimer $d(x) = f(x) - t(x)$ en fonction de x.
c. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T.
d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

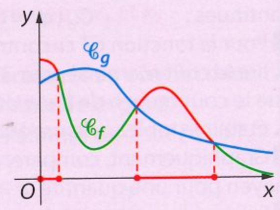
79 Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^3 - 3x$.
Étudier la position relative :
a. de $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -3x$;
b. de $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = -2x$.

Aide

Soit deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentations graphiques de deux fonctions f et g.
Pour étudier la position relative de ces deux courbes, on étudie le signe de la différence :

$$d(x) = f(x) - g(x).$$

• Si $d(x)$ est **positive**, alors $f(x) \geqslant g(x)$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_g$.
• Si $d(x)$ est **négative**, alors $f(x) \leqslant g(x)$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de la courbe $\mathscr{C}_g$.



Pour aller plus loin

80 Démontrer un théorème

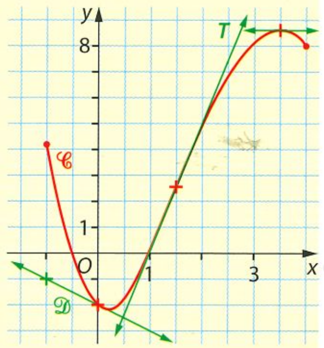
1 Soit f une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I, et g une fonction dérivable et décroissante sur le même intervalle.
Démontrer que la différence d, définie sur l'intervalle I par $d(x) = f(x) - g(x)$, est croissante sur I.
2 Application
La quantité offerte d'un bien, en fonction du prix unitaire x de 1 à 5 €, est donnée par $f(x) = 0{,}2x^2 + 3$ et la quantité demandée de ce même bien est donnée par $g(x) = \dfrac{40}{x+3}$, quantités en millier d'unités.
a. Étudier les variations de f et de g. En déduire le sens de variation de la différence d sur $[1\,;5]$.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution. En déduire le prix d'équilibre pour ce bien, au centime d'euro près.

81 Raisonner et chercher à démontrer

Sur la courbe de coût total de l'exercice **73**, on remarque une tangente particulière en A.
1 a. D'après le graphique, combien y a-t-il de tangente(s) à la courbe $\mathscr{C}$ passant par l'origine ?
b. Proposer une manière de déterminer ce point A d'abscisse a.
c. L'appliquer à la fonction de coût total :
$CT(q) = q^3 - 12q^2 + 48q$, pour $q \in [0\,;9]$.
2 Sachant que le coût moyen est $C_M(q) = \dfrac{CT(q)}{q}$, calculer la dérivée de $C_M(q)$ en fonction de q.
En déduire que le coût moyen est égal au coût marginal quand le coût moyen est minimum.
3 Démontrer que le coût marginal est minimum pour la quantité q_0, où la courbe de coût total admet un point d'inflexion.

82 QCM – Utiliser la courbe d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1,5 sont respectivement $\mathscr{D}$ et T.
Pour chaque proposition, donner la bonne réponse.



1 $f'(0)$ est égal à :
a. -2. **b.** -1. **c.** $-0{,}5$.
2 La dérivée f' s'annule en :
a. $-0{,}5$. **b.** 0. **c.** $3{,}5$.
3 Sur $[-1\,;4]$, la fonction f est :
a. convexe. **b.** concave. **c.** ni l'un ni l'autre.
4 La dérivée f' est croissante sur :
a. $[-1\,;4]$. **b.** $[-1\,;1{,}5]$. **c.** $[1{,}5\,;4]$.

83 Vrai ou faux ? – Utiliser un tableau

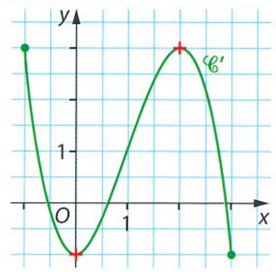
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\,;6]$ dont on donne le tableau de variations :

x	-3		1		4		6
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	-1

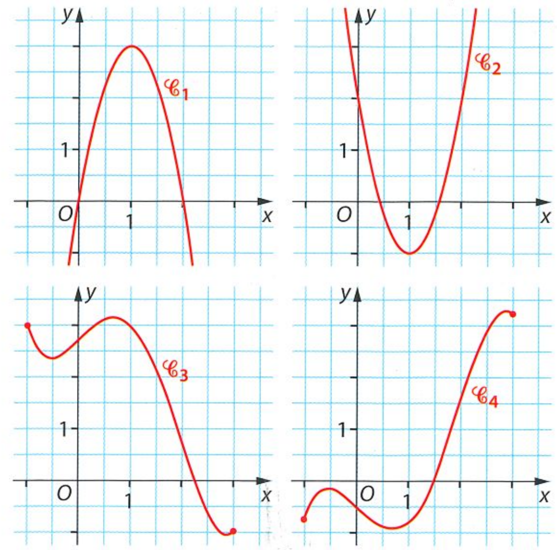
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1 L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3\,;6]$.
2 La droite d'équation $y = 4$ est tangente à la courbe représentative de f.
3 Pour tout réel x de $[-3\,;4]$, $f(x) > 0$.
4 Pour tout réel x de $[-3\,;4]$, $f'(x) \geqslant 0$.

84 Sur la courbe de la dérivée

Soit une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;3]$. $\mathscr{C}'$ est la courbe de sa dérivée.



1 a. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, avec la précision permise par le graphique.
b. Indiquer le signe de $f'(x)$.
2 a. Dresser le tableau de variations de f'.
b. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion ?
3 Pour les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ suivantes, préciser celle qui représente la fonction f et celle qui représente la dérivée seconde f'' de f, en justifiant celles qui ne conviennent pas.



85 Déterminer une plage de bénéfice

Le bénéfice d'une entreprise est donné par :
$B(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$, pour $x \in [0\,;6]$,
où x est la quantité de produit en millier et $B(x)$ est exprimé en centaine de milliers d'euros.
1 Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;6]$. En déduire la quantité de produit qui optimise le bénéfice.
2 a. À l'aide du tableau de variations de la fonction B, déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;6]$.
b. Déterminer la plage de bénéfice de cette production.
On donnera les valeurs approchées à 10 unités près des points morts de la production, c'est-à-dire les quantités qui donnent un bénéfice nul.

86 Signe de la fonction dérivée

Soit la fonction f définie sur $[1\,;10]$ par :
$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x + 9}{x^2}.$$
1 Écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme.
Montrer que pour tout réel x de $[1\,;10]$, on a :
$$f'(x) = \frac{x^3 - 12x - 18}{x^3}.$$
2 Soit la fonction g définie sur $[1\,;10]$ par :
$$g(x) = x^3 - 12x - 18.$$
a. Étudier les variations de g sur $[1\,;10]$.
b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;10]$.
Déterminer un encadrement de α à 0,01 près.
c. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.
3 Déduire de ce qui précède les variations de f sur l'intervalle $[1\,;10]$. Donner la valeur arrondie de α, à 0,01 près, qui optimise la fonction f.

87 Étude d'une fonction de coût total

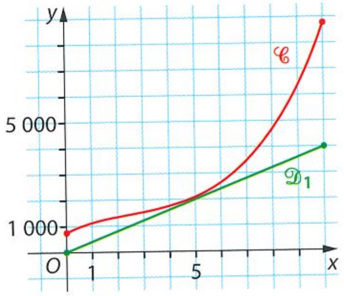
L'entreprise chinoise Shishi produit du tissu en coton qu'elle conditionne en « roules » de 2 000 m de long et 1,5 m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10 km en continu.

Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750 \text{, où } x \in [0\,;10].$$

PARTIE A Étude du bénéfice

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 400x$.



1 Au vu du graphique, expliquer pourquoi l'entreprise Shishi ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est égal à 400 euros par km.

2 Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.

a. Reproduire le plus précisément possible le graphique précédent. *(Utiliser le tableau de valeurs de la fonction C sur calculatrice.)* Puis tracer sur le graphique la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 680x$.

Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise Shishi réalise un bénéfice si le prix du marché est de 680 euros par km.

b. Soit la fonction B définie sur $[0\,;10]$ par :

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;10]$, on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

c. Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.

En déduire la quantité produite et vendue pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise Shishi est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B Étude du coût marginal

Le **coût marginal** C_m peut être assimilé à la dérivée du coût total. Ainsi, sur $[0\,;10]$, $C_m(x) = C'(x)$.

1 Calculer $C_m(x)$ et étudier les variations de C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$.

2 En déduire que le coût marginal C_m admet un minimum au point d'inflexion de la courbe de coût total C.

PARTIE C Étude du coût moyen

Le **coût moyen** CM mesure le coût par unité produite.

Ainsi, sur $]0\,;10]$, $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1 Par calcul formel, on a obtenu :

	Terminé
$cm(x) := \dfrac{15\cdot x^3 - 120\cdot x^2 + 500\cdot x + 750}{x}$	
$\text{factor}\left(\dfrac{d}{dx}(cm(x))\right)$	$\dfrac{30\cdot(x-5)\cdot(x^2+x+5)}{x^2}$

Justifier l'expression obtenue pour la dérivée $CM'(x)$ du coût moyen.

2 En déduire les variations de CM sur $]0\,;10]$.

3 **a.** Pour quelle longueur x_0 de tissu produite le coût moyen est-il minimum ? Que valent dans ce cas le coût moyen, le coût marginal et le coût total ?

b. Si le prix du marché est 680 euros par km, quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle fabrique et vend une longueur de tissu de x_0 km ?

88 Fonction d'offre

Un supermarché souhaite acheter des pommes à un fournisseur qui propose des prix au kg dégressifs en fonction de la masse de pommes commandée.

Pour une commande de x kg de pommes, le prix $P(x)$, en euro par kg de fruits, est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100}, \text{ pour } x \in [100\,;1\,000].$$

PARTIE A Étude du prix P proposé par le fournisseur

1 Calculer $P'(x)$.

2 En déduire le sens de variation de la fonction P sur $[100\,;1\,000]$. Interpréter économiquement le résultat.

PARTIE B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la dépense, en euro, du supermarché pour une commande de x kg de pommes au prix de $P(x)$ euros par kg.

Ainsi : $S(x) = x \times P(x)$, pour $x \in [100\,;1\,000]$.

Par calcul formel, on a obtenu les résultats ci-contre, qu'on utilisera sans justifier.

1	S(x):=x*(x+300)/(x+100)
	$x \to x\cdot\dfrac{(x+300)}{x+100}$
2	factoriser(deriver(S(x)))
	$\dfrac{x^2+200\cdot x+30000}{(x+100)^2}$

1 Étudier le sens de variation de la fonction S sur $[100\,;1\,000]$.

Interpréter économiquement le résultat.

2 Le magasin dispose d'un budget de 900 € pour la commande de fruits.

a. Justifier que l'équation $S(x) = 900$ admet une unique solution x_0 sur $[100\,;1\,000]$.

Déterminer la valeur arrondie, au kg près, de la masse maximum de pommes que le supermarché peut commander sans dépasser son budget.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

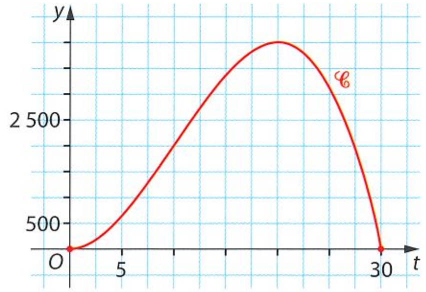
Déterminer la valeur exacte « mathématique » de x_0.

89 Propagation d'une maladie

Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

PARTIE A Lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jour depuis le début de la maladie.



1 Donner les jours où il y a 2 000 malades.

2 Donner le jour où le nombre de malades est maximal. Quel est alors ce maximum ?

3 Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

PARTIE B Étude théorique

Le nombre de personnes malades en fonction du temps t, en jour, peut être modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par : $f(x) = -t^3 + 30t^2$.

La **vitesse de propagation** de la maladie au jour t est assimilée au nombre dérivé $f'(t)$.

1 Étudier le sens de variation de la fonction f.

2 Déterminer le nombre de solutions sur $[0\,;30]$ de l'équation $f(t) = 2\,000$.

Déterminer un encadrement à l'entier près de la solution non entière.

3 **a.** Calculer la dérivée seconde $f''(t)$.

b. Étudier le sens de variation de la dérivée f'.

En déduire la convexité de la fonction f et en donner une interprétation.

c. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. En donner une signification concrète.

d. Calculer la vitesse de propagation de la maladie le 10e jour.

90 Rythme de croissance

On a recensé ci-dessous la superficie de l'espace urbain en France, en millier de km², depuis 1954.

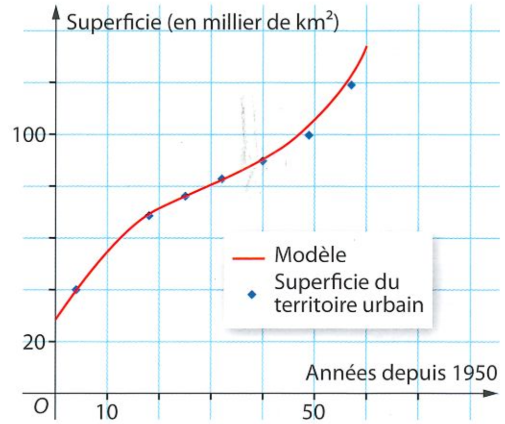
Années	1954	1968	1975	1982	1990	1999	2007
Superficie urbaine	41,1	68,9	76,3	83,4	89,6	100	118,8

Source : INSEE.

Une modélisation consiste à estimer la superficie urbaine $S(x)$, en millier de km² par :

$$S(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 3{,}6x + 28,$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 1950.



On suppose que le modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire pour $x \in [0\,;70]$.

Le **rythme de croissance instantané** de la superficie est assimilé à la dérivée de S.

1 **a.** Calculer la valeur estimée de la superficie urbaine en 1990, à l'aide de ce modèle.

b. Calculer le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur effective de la superficie urbaine en 1990.

c. Estimer la superficie urbaine en 2015.

2 **a.** Calculer $S'(x)$, puis $S''(x)$.

b. Justifier que la fonction S est croissante sur $[0\,;70]$. Interpréter le résultat.

3 Au cours de quelle année le rythme de croissance est-il le plus faible ? Que représente cette année pour la fonction S ? Retrouver graphiquement le résultat.

4 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On a pu lire le commentaire suivant à propos du recensement de la superficie urbaine :

« Le rythme de croissance de l'espace urbain entre les recensements de 1999 et 2007 a été plus important que lors des décennies précédentes, et se rapproche de ce que l'on avait connu dans les années 1950-1960. »

Source : INSEE Première – Août 2011.

Expliquer le commentaire.

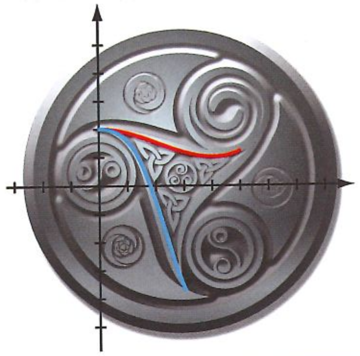
91 ... en décoration

Le triskel

On modélise deux morceaux des trois branches d'un triskel par les courbes de deux fonctions f et g :

$$f(x)=\frac{x^3}{32}-\frac{3x^2}{16}+2 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{x^4}{8}-\frac{7x^3}{12}+2,$$

sur des intervalles que l'on précisera.



1 Étude d'une des branches

a. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant les extrema locaux.

c. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

2 Étude sur la seconde branche

a. Calculer la dérivée $g'(x)$.

b. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de g en précisant les extrema locaux.

3 Étude du modèle

a. D'après le croquis, associer à chaque branche la fonction qui la modélise, en précisant l'intervalle qui peut convenir. *On s'aidera de la visualisation sur une calculatrice.*

b. En quelle valeur x_0 de l'abscisse a-t-on le raccordement ?

c. Ce raccordement est-il « bon », c'est-à-dire que les deux courbes ont la même tangente en leur point de raccordement ?

92 ... en technologie

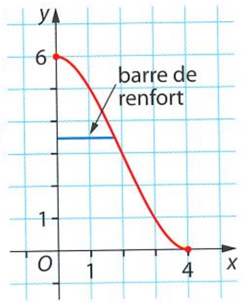
Le toboggan

Un toboggan est formé d'une échelle verticale et d'une glissière qui suit la courbe d'équation :
$y=0{,}1875x^3-1{,}125x^2+6$, où $x\in[0\,;4]$.
Les dimensions sont en mètre.

1 Pour des raisons de sécurité, la pente du toboggan doit être horizontale en haut de l'échelle et au niveau du sol. Est-ce le cas ?

2 En quel point du toboggan la pente est-elle la plus forte ?

3 Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale à 3,5 m du sol. Quelle est la longueur de la barre, arrondie au cm près ?



93 ... en sciences

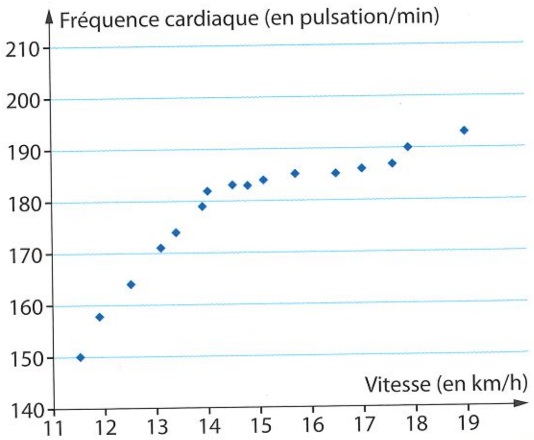
Test de Conconi et entraînement sportif

Lors d'un test d'effort ou **test de Conconi**, les pulsations cardiaques augmentent régulièrement jusqu'à un point de « cassure » où l'on remarque une **discontinuité du rythme**. Ce point correspond à une transition entre aérobie et anaérobie, c'est-à-dire entre un rythme d'endurance que l'on peut tenir « facilement » et un effort plus soutenu, mais qu'il est impossible de tenir longtemps. L'abscisse de ce point s'appelle « Vitesse Maximale Aérobie » (VMA).

Les sportifs (cyclistes, marathoniens, etc.) se servent de ce test pour déterminer leur VMA et leur progression à l'entraînement.

Le test de Conconi de Julie est donné ci-contre.

Déterminer la VMA de Julie à la vue du graphique.



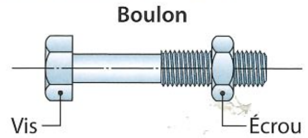
Réinvestir...

94 ... en économie

Rythme de production et rendements

Une entreprise fabrique des boulons. En courte période, sa **production totale** P, en nombre de boulons, dépend du **facteur travail** L selon la relation :

$$P(L)=-15L^3+175L^2+150L,$$



où la quantité de travail L est exprimée en heure et est comprise entre 0 et 8.

Le **rythme de production** V (ou vitesse de production) est égal à la dérivée P' et est exprimé en boulon produit par heure : $V(L)=P'(L)$.

1 Quelle est la production au bout de 2 h de travail ? au bout de 4 h de travail ?

2 a. Calculer $V(L)$.
En déduire le rythme de production au bout de 2 h de travail et au bout de 4 h de travail.

b. Étudier le sens de variation de P sur $[0\,;8]$. Interpréter.

3 a. Étudier le sens de variation de V sur $[0\,;8]$.

b. Pour quelle quantité de travail le rythme de production est-il maximum ? *Arrondir à 10 minutes près.*

c. Phases de rendements

Définitions
- Sur un intervalle où le rythme de production est croissant, on parle de « **phase de rendements croissants** ».
- Sur un intervalle où le rythme de production est décroissant, on parle de « **phase de rendements décroissants** ».

Identifier ces deux phases pour la production. Interpréter graphiquement les résultats.

4 L'entreprise doit livrer à un client une commande de 3 000 boulons.
À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures de travail nécessaires pour honorer la commande, en arrondissant à 10 minutes près.

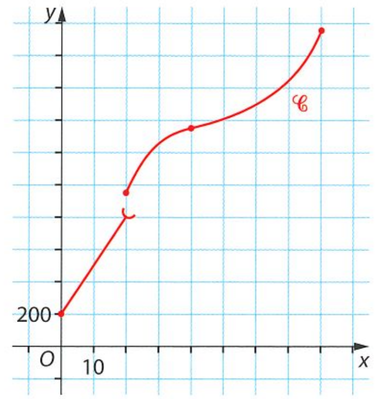
95 ... en économie

Des coûts par morceaux

Une entreprise fabrique au maximum 80 verres de lunettes par jour, à l'aide d'une machine. Cette machine nécessite une intervention technique à certaines phases de la production, ce qui augmente les coûts. Le coût total $C(x)$, en euro, dépend du nombre x de verres fabriqués :

$$C(x)=\begin{cases}30x+200, \text{ si } 0\leqslant x<20\\ -x^2+80x-250, \text{ si } 20\leqslant x<40\\ 1\,050-\dfrac{18\,000}{x-100}, \text{ si } 40\leqslant x\leqslant 80\end{cases}.$$

Un grapheur a permis d'obtenir la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction de coût total C :



1 a. La fonction C est-elle continue sur $[0\,;80]$? Justifier par un calcul.

b. Étudier le sens de variation de C sur chaque intervalle de définition.

2 On rappelle que le **coût marginal** C_m est assimilé à la dérivée du coût total :

$$\text{pour } x\in[0\,;80],\ C_m(x)=C'(x).$$

a. Calculer le coût marginal m lorsqu'on fabrique entre 0 et 19 verres. Interpréter.

b. Lorsqu'on produit entre 20 et 39 verres, le coût marginal peut-il être égal à m ?
Interpréter graphiquement le résultat.

c. Même question lorsqu'on produit entre 40 et 80 verres.

3 On rappelle que le **coût moyen** CM est le coût de production par unité produite :

$$\text{pour } x\in\,]0\,;80],\ CM(x)=\frac{C(x)}{x}.$$

a. Rappeler comment se lit graphiquement le coût moyen.
Par lecture graphique, indiquer le sens de variation du coût moyen.

b. Déterminer la valeur arrondie à l'unité de la quantité qui conduit à un coût moyen minimal. Indiquer la démarche employée pour cette détermination.