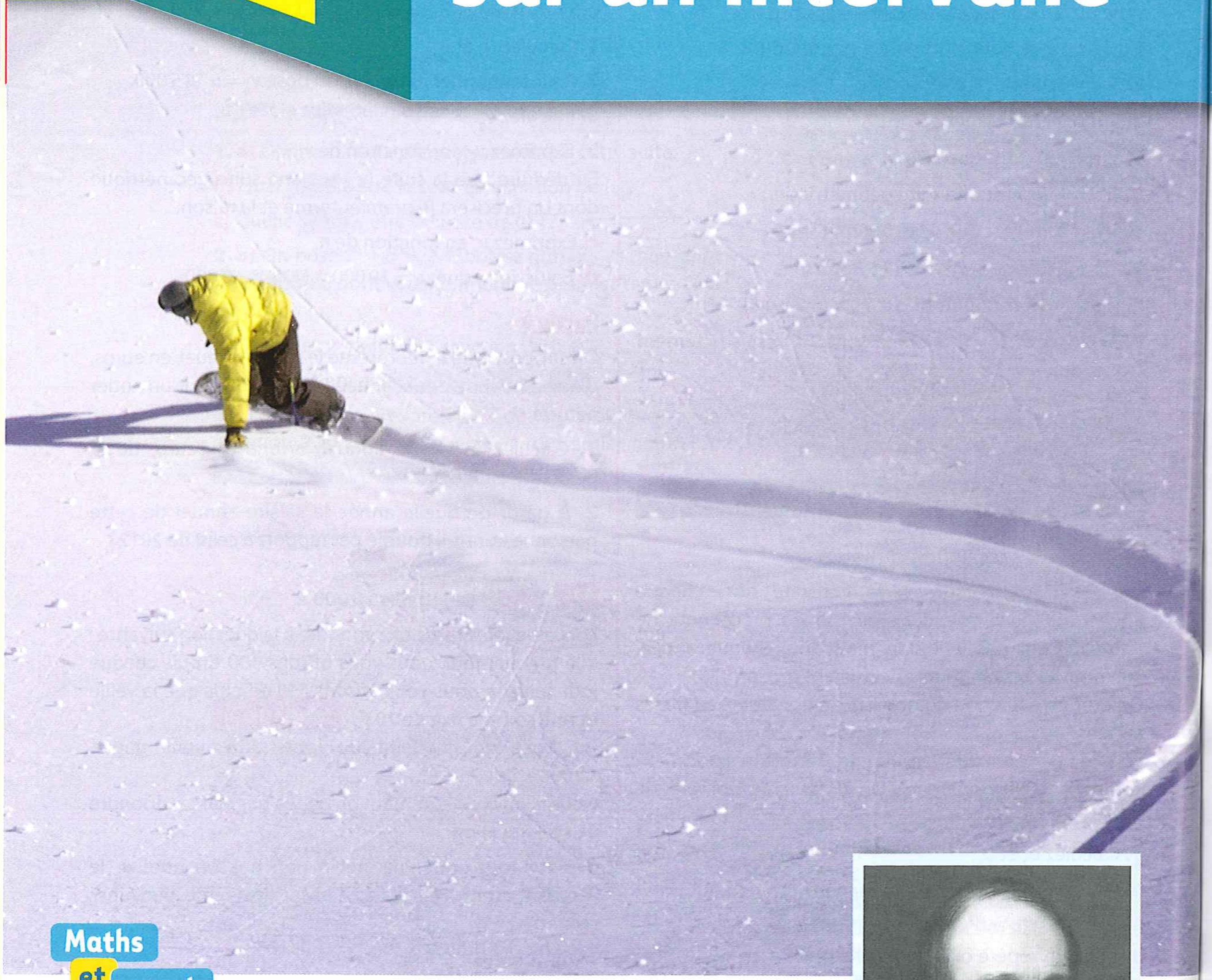
CHAPITRE

2

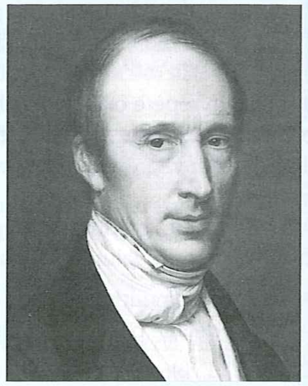
Continuité sur un intervalle



Maths et sport

Le surfeur qui descend dans la neige poudreuse laisse derrière lui une trace sinueuse d'un seul tenant, sans « trou » – sauf s'il a quitté le sol en passant sur une bosse !

Cette trace ininterrompue est une illustration de la notion mathématique de continuité : on dira qu'une fonction est continue lorsque sa courbe représentative est d'un seul tenant comme la trace du surfeur, et peut être dessinée sans lever le crayon.



Augustin-Louis Cauchy
1789-1857

→ Chercheurs d'hier p. 68

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur I, et a un élément de I.

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro, avec $h \neq 0$,

les nombres $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre fixé ℓ.

Nous dirons alors que f est dérivable en a et que ℓ est le nombre dérivé de f en a. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

① On pose $f(x) = x^2$.

Vérifiez que le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est égal à $2a + h$. Déduisez-en que le nombre dérivé de f en a est égal à $2a$.

Construisez la courbe représentant la fonction f, puis la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	$x \mapsto k$ (k constante réelle)	$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z} - \{0\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$x \mapsto \sqrt{x}$ $(x > 0)$
Dérivée	$x \mapsto 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

② Calculez $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = x^{-3}$.

Dérivée et sens de variation

f est une fonction dérivable sur $[a\,;b]$.

Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur l'intervalle $]a\,;b[$, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Exemple : on pose, pour tout réel x, $f(x) = x^2$.

Alors $f'(x) = 2x$, donc $f'(x) > 0$ si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si $x < 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Pour les exercices ③ à ⑦, déterminez l'ensemble de définition et le sens de variation de la fonction f indiquée :

③ **a)** $f : x \mapsto x^3 + 1$. **b)** $f : x \mapsto x^2 + x$.

④ **a)** $f : x \mapsto x^2 + 2x$. **b)** $f : x \mapsto -x^2 + x$.

⑤ **a)** $f : x \mapsto x^3 - 3x$. **b)** $f : x \mapsto x^3 + 3x$.

⑥ **a)** $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$. **b)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x}$.

⑦ **a)** $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

⑧ **a)** $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

⑨ **a)** $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2x$ **b)** $f : x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2} - x^3$.

→ Voir les corrigés p. 361

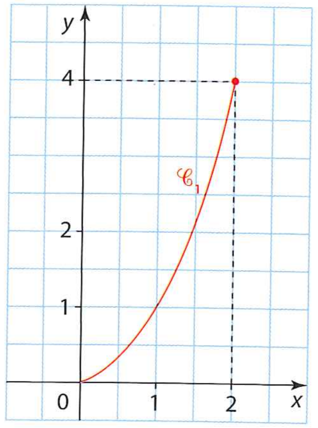
Activité SANS LEVER LE CRAYON ?

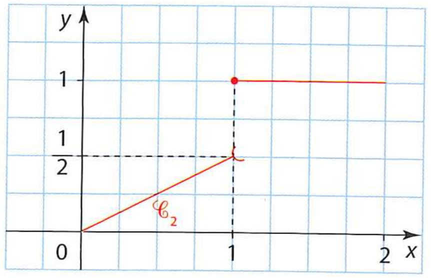
Considérons les trois fonctions f, g et h définies sur $[0\,;2]$ par :

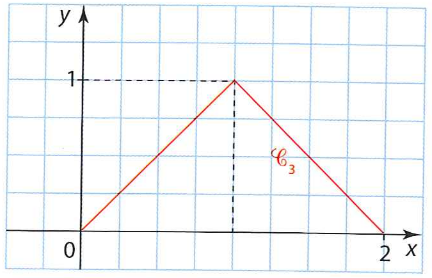
$$f(x)=x^2 \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}\text{ si } x\in[0\,;1[\\ 1 \text{ si } x\in[1\,;2]\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases}x\text{ si } x\in[0\,;1]\\ 2-x \text{ si } x\in\,]1\,;2]\end{cases}$$

A Propriété des courbes représentatives

1. Précisez laquelle de ces courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ représente la fonction f, la fonction g, la fonction h.







2. On constate que deux de ces courbes peuvent être tracées « sans lever le crayon » et qu'il n'en est pas de même pour la troisième.

Précisez de quelles courbes et de quelles fonctions il s'agit.

Les courbes représentatives de certaines fonctions peuvent être tracées sans lever le crayon. Il n'en est pas de même pour toutes les fonctions.

B Vers la propriété des valeurs intermédiaires

Rappel

f étant une fonction, « a est un antécédent de b » signifie que l'image de a par f est égale à b, c'est-à-dire $f(a)=b$.

1. Vérifiez graphiquement que :

a) pour la fonction f, tout nombre de l'intervalle $[0\,;4]$ admet un antécédent unique.

b) pour la fonction h, tout nombre de l'intervalle $[0\,;1[$ admet deux antécédents.

2. Pour la fonction g, expliquez pourquoi le nombre $\frac{3}{4}$ n'admet aucun ancédédent.

Pour certaines fonctions f définies sur $[a\,;b]$, il existe des nombres de l'intervalle $]f(a)\,;f(b)[$ n'admettant aucun antécédent.

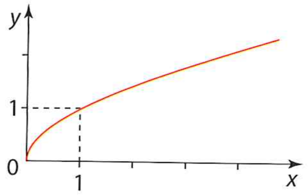
---

1 Notion de continuité : approche graphique

f est une fonction définie sur un intervalle I.

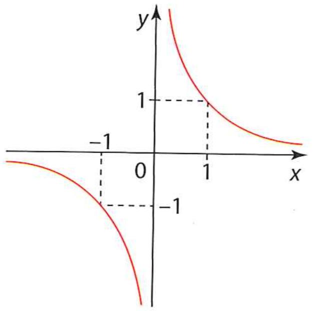
Lorsque la courbe de la fonction f se trace d'un trait continu, c'est-à-dire « sans lever le crayon », « sans sauts », on traduit cette idée intuitive en disant que la fonction f est **continue** sur l'intervalle I.

Exemples



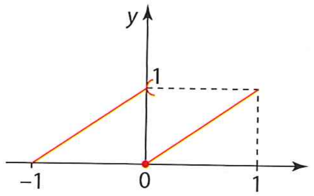
- $x\mapsto\sqrt{x}$

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.



- $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.



- Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par :

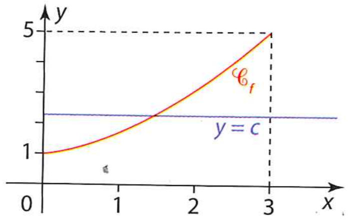
$$\begin{cases}f(x)=x+1 \text{ si } x\in[-1\,;0[\\ f(x)=x \text{ si } x\in[0\,;1].\end{cases}$$

Sa courbe représentative est tracée ci-contre.

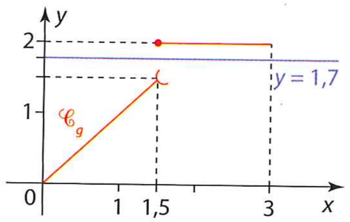
Cette fonction n'est pas continue sur $[-1\,;1]$.

2 Propriété des valeurs intermédiaires

2.1 Quelques exemples



f est continue et strictement croissante sur $[0\,;3]$. Alors f prend une fois et une fois seulement toute valeur c comprise entre $f(0)$ et $f(3)$, c'est-à-dire entre 1 et 5. En effet, la droite d'équation $y=c$ coupe $\mathscr{C}_f$ en un seul point.



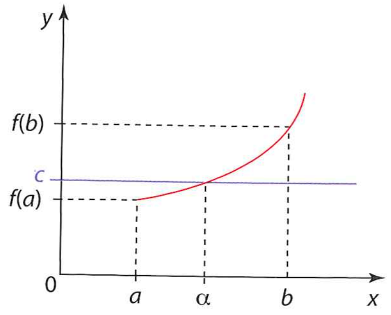
g n'est pas continue sur $[0\,;3]$; ici g ne prend pas toute valeur comprise entre $g(0)$ et $g(3)$, c'est-à-dire entre 0 et 2 ; par exemple, la valeur 1,7 n'est pas prise par g, car la droite d'équation $y=1{,}7$ ne rencontre pas $\mathscr{C}_g$.

2.2 Propriété des valeurs intermédiaires : cas d'une fonction strictement monotone

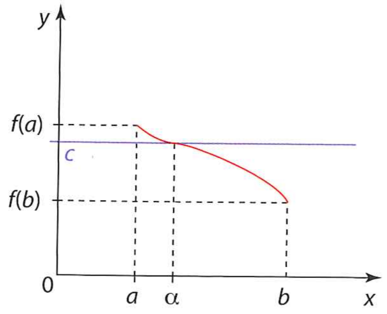
Nous admettrons le théorème suivant, illustré graphiquement ci-dessous.

Théorème 1 Si f est **continue** et **strictement monotone sur $[a\,;b]$**, f prend **une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$**.

Ceci signifie que, pour tout nombre c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique nombre α de $[a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = c$.



f est continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$.



f est continue et strictement décroissante sur $[a\,;b]$.

Remarque. Résolution d'équation

Le théorème ci-dessus peut être énoncé sous la forme suivante :

Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur $[a\,;b]$.

En effet, notons k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

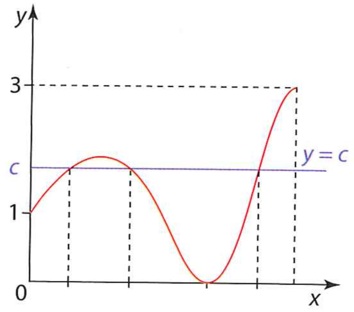
- Il existe un unique réel α de l'intervalle $[a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = k$.
- L'équation $f(x) = k$ admet α comme unique solution sur $[a\,;b]$.

2.3 Cas d'une fonction continue, mais non strictement monotone

Si la fonction continue f n'est pas strictement monotone, toute valeur c comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise par f, **mais pas forcément une seule fois.**

Ceci est illustré par la figure ci-contre : dans ce cas, la valeur c est prise trois fois.

Ce résultat est également connu sous le nom de **propriété des valeurs intermédiaires.**



2.4 Tableau de variation : une convention importante

On conviendra que, dans un tableau de variation, les flèches de variation traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple

Une fonction f définie sur $[-3\,;3]$ admet le tableau de variation suivant :

x	-3	1	3
$f(x)$	0 ↘	-5 ↗	-4

- D'après la convention précédente, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-3\,;\,1]$. Le nombre -2 est compris entre $f(-3)$ et $f(1)$. Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α de l'intervalle $]-3\,;1[$ tel que $f(\alpha) = -2$.
- De même, f est continue et strictement croissante sur $[1\,;3]$. Le nombre $-4{,}5$ est compris entre -5 et -4 ; donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre β de l'intervalle $]1\,;3[$ tel que $f(\beta) = -4{,}5$.

3 Résolution de l'équation $f(x) = 0$

3.1 Un exemple

Considérons une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et admettant le tableau de variation ci-contre.

x	1	2
$f(x)$	-2 ↗	3

D'après la convention du paragraphe **2.4**, f est continue et strictement croissante sur $[1\,;\,2]$.

$f(1) = -2$ et $f(2) = 3$. Or le nombre 0 appartient à l'intervalle $]-2\,;3[$.

Donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α de l'intervalle $]1\,;2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

3.2 Une propriété

Dire que le nombre 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ équivaut à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

On a donc :

Théorème 2 Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe un unique réel α de l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4 Cas particulier des fonctions dérivables

4.1 Dérivation et continuité

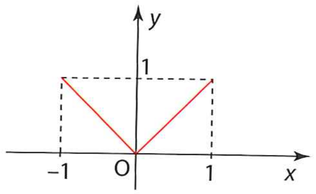
Considérons une fonction f, et notons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On conçoit graphiquement que, si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points, cette courbe peut être tracée de manière continue.

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 3 Toute fonction **dérivable** sur I est **continue** sur I.

Remarque. La réciproque de ce théorème est fausse, car une fonction peut être continue, mais non dérivable.

Il en est ainsi, par exemple, de la fonction continue sur $[-1\,;1]$ dont la courbe représentative est indiquée ci-contre : la courbe n'admet pas de tangente au point O.

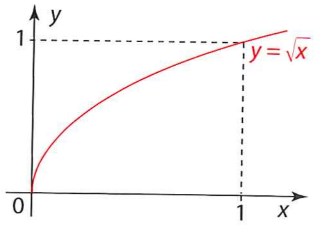


4.2 Continuité des fonctions usuelles

Théorème 4
- Les polynômes et les fonctions rationnelles sont continus sur leur ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration

- On sait que les polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition. Ces fonctions sont donc continues d'après le théorème 3.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; cette fonction est donc continue sur $]0\,;+\infty[$. Elle est aussi continue en 0 d'après l'allure de sa courbe représentative.



4.3 Dérivée de signe constant sur un intervalle

On sait que si $f' > 0$ sur $]a\,;b[$, alors f est strictement croissante sur $[a\,;b]$. D'où, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, f prend une fois et une seule toute valeur de l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$.

On a un résultat analogue si $f' < 0$ sur $]a\,;b[$.

Théorème 5 Si $f' > 0$ sur $]a\,;b[$ ou si $f' < 0$ sur $]a\,;b[$, alors :
- f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur $[a\,;b]$.

Exemple. On pose $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 + 2$; donc, pour tout réel x, $f'(x) > 0$. Or $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 4$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires appliquée sur l'intervalle $[0\,;1]$, on peut affirmer que, pour tout réel k de l'intervalle $[1\,;4]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur $[0\,;1]$.

Appliquons cette propriété sur $[-1\,;0]$. $f(0)$ et $f(-1)$ sont de signes contraires, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]0\,;1[$.

OBJECTIF 1 Exploiter un tableau de variation

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Dans un tableau de variation, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

EXERCICE RÉSOLU A

On considère une fonction f dont le tableau de variation sur l'intervalle $[-2\,;5]$ est indiqué ci-contre.

x	-2		0		5
$f(x)$	0	↗	4	↘	-3

1. Précisez le sens de variation de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

2. Expliquez pourquoi :

a) il existe un unique réel α de $]0\,;5[$ tel que $f(\alpha) = 0$;

b) l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

3. Résolvez chacune des inéquations :

a) $f(x) < 0$;

b) $f(x) \leqslant 0$.

Méthode

1. Il suffit d'observer le tableau de variation. Les flèches indiquent que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

2. a) Dans ce genre de problème, on utilise généralement la propriété des valeurs intermédiaires.

b) On utilise deux fois la propriété des valeurs intermédiaires.

3. a) La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;5]$ donc, pour $x > \alpha$, $f(x) < 0$.

b) Cette fois l'inégalité est large.
Attention ! Ne pas oublier dans S le nombre -2.

Solution

1. f est strictement croissante sur $[-2\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;5]$.

2. a) f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;5]$.
$f(0)$ et $f(5)$ sont de signes contraires.
Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, f s'annule en un unique point α de $]0\,;5[$.

b) On utilise la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-2\,;0]$ et sur l'intervalle $[0\,;5]$.
On en déduit que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $]-2\,;0[$, l'autre dans l'intervalle $]0\,;5[$.

3. a)

x	-2		0		α		5
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↘	-3

Ensemble des solutions : $S =]\alpha\,;5]$.

b) Ensemble des solutions : $S = [\alpha\,;5] \cup \{-2\}$.

Mise en pratique

1 On considère la fonction f dont le tableau de variation sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ est indiqué ci-dessous :

x	-3		1		4
$f(x)$	2	↗	5	↘	-3

1. Précisez le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

2. Expliquez pourquoi :

a) il existe un unique réel α de $]1\,;\,4[$ tel que $f(\alpha) = 0$;

b) l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions β et γ sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

3. Résolvez les inéquations :

a) $f(x) > 0$. **b)** $f(x) \geqslant 3$.

2 Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	2		4		9
$f(x)$	3	↘	-6	↗	2

1. Précisez le sens de variation de f sur l'intervalle $[2\,;\,9]$.

2. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions sur $]2\,;\,9[$. On notera ces solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

3. Résolvez l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

3 Voici le tableau de variation d'une fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	

On sait de plus que $f(3) = 5$.

1. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 0$ possède sur $]0\,;\,3[$ une solution unique.

2. En utilisant le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$, donnez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

4 On considère la fonction f définie sur $[-4\,;\,4]$ dont le tableau de variation est :

x	-4		-2		2		4
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-1	↗	0

1. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 0$:

a) admet deux solutions sur $]-4\,;\,4[$;

b) admet trois solutions sur $[-4\,;\,4]$.

2. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = -1$ admet une solution sur $[-4\,;\,2[$.

5 On considère la fonction f sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	3	↘	0	↘	

1. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-\infty\,;\,0]$ et sur $[0\,;\,+\infty[$. Précisez ces solutions.

2. Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions sur $[-2\,;\,2]$.

3. Résolvez les inéquations :

a) $f(x) < 0$;

b) $f(x) \geqslant 0$.

Pour se tester

Exercices interactifs

6 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

1. Lorsque la courbe de la fonction f se trace sur un intervalle I « sans lever le crayon », la fonction f est ...... sur I.

2. Toute fonction dérivable sur I est ...... sur I.

3. Si $f' > 0$ sur $[a\,;\,b]$ (ou $f' < 0$ sur $[a\,;\,b]$), alors pour tout réel k compris entre ...... et ......, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur $[a\,;\,b]$.

7 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. Toute fonction définie sur un intervalle I est continue sur I.

2. Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

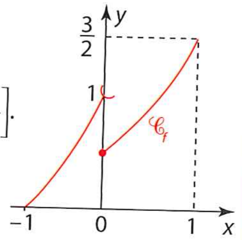
3. Toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I.

4. Si f est continue sur $[a\,;\,b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de même signe, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $[a\,;\,b]$.

8 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Voici la courbe représentative d'une fonction f sur $[-1\,;\,1]$.



1. f est continue sur :

a) $[-1\,;\,1]$ **b)** $[0\,;\,1]$ **c)** $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

2. Tout réel de $]0\,;\,1[$ admet un antécédent unique dans :

a) $]-1\,;\,1[$ **b)** $]0\,;\,1[$ **c)** $]-1\,;\,0[$.

3. Voici le tableau de variation d'une fonction f continue sur $[-3\,;\,4]$.

x	-3		3		4
$f(x)$	-1	↗	4	↘	-2

L'équation $f(x) = 0$ sur $[-3\,;\,4]$ admet exactement :

a) une solution

b) deux solutions

c) aucune solution.

4. Voici le tableau de variation d'une fonction f continue sur $[-1\,;\,4]$.

x	-1		2		4
$f(x)$	-3	↗	1	↗	5

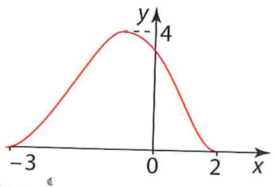
L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution comprise entre :

a) 2 et 4 **b)** -3 et 1 **c)** -1 et 2.

9 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. Voici la courbe représentative d'une fonction f continue sur $[-3\,;\,2]$.



Alors toute équation $f(x) = k$ possède exactement deux solutions lorsque :

a) $k \in [0\,;\,4[$ **b)** $k \in [0\,;\,2]$ **c)** $k \in [-3\,;\,2]$.

2. Si f est dérivable sur un intervalle I, alors :

a) f est définie sur I **b)** f est continue sur I

c) f est croissante sur I.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[a\,;\,b]$. Alors la droite d'équation $y = k$ coupe la courbe représentative de f en un seul point :

a) quel que soit le réel k

b) si $k \in [f(a)\,;\,f(b)]$

c) si $f(a) < k < f(b)$.

4. Si f est continue et strictement décroissante sur $[2\,;\,5]$, alors :

a) $f(2) \geqslant f(5)$ **b)** $f(2) \times f(5) < 0$

c) l'équation $f(x) = k$ où $k \in [2\,;\,5]$ possède une unique solution.

Voir les corrigés p. 361

Utiliser GeoGebra

→ Pour étudier les propriétés d'une fonction

10 Une famille de courbes

On considère la famille de fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante, a désignant un nombre réel de l'intervalle $[-4\,;4]$.

$$\begin{cases} \text{Si } x < 2,\ f(x) = ax - 1. \\ \text{Si } x \geqslant 2,\ f(x) = 2x - 3. \end{cases}$$

A Avec le logiciel GeoGebra

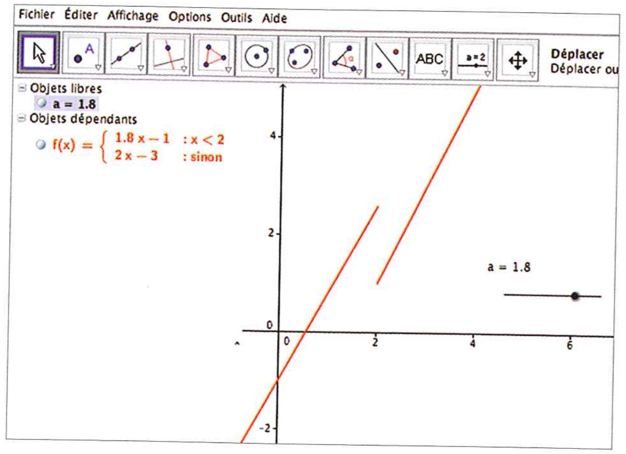
1. Créez un curseur pour a. Il fera varier a de –4 à 4.

2. À l'aide de l'instruction :
Si [<Condition>, <Alors>,<Sinon>], définissez $f(x)$ et dessinez la courbe correspondant à la valeur a donnée par le curseur.

3. Faites varier la valeur de a à l'aide du curseur.

a) Les fonctions représentées semblent-elles continues ?

b) Pour quelle valeur de a la fonction correspondante semble-t-elle continue ?



Objets libres
a = 1.8
Objets dépendants
$f(x) = \begin{cases} 1.8\,x - 1 & : x < 2 \\ 2\,x - 3 & : \text{sinon} \end{cases}$
a = 1.8

B Propriété des valeurs intermédiaires

Les figures ci-dessous représentent 3 des courbes de la famille.

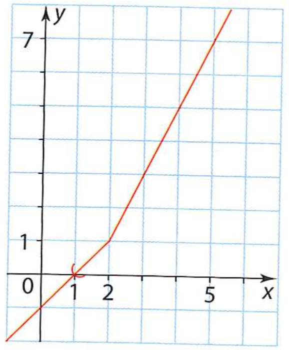


fig. 1

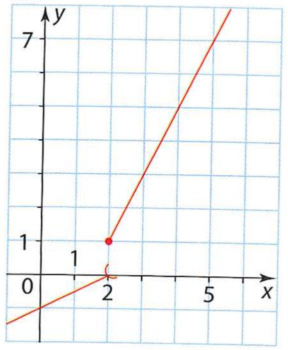


fig. 2

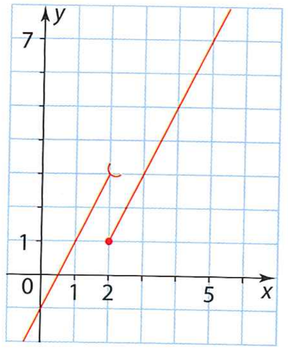


fig. 3

1. Quelles sont les valeurs de a correspondant aux figures 1, 2, 3 ?

2. À laquelle des trois fonctions représentées ci-dessus peut-on appliquer la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\,;5]$?

3. a) Pour cette fonction, lisez graphiquement une valeur approchée du réel α dont l'image est égale à $\frac{1}{2}$.

b) Retrouvez cette valeur à l'aide des résultats de la question **1.** ci-dessus.

4. Dans le cas de la figure 2, trouvez l'ensemble des réels c de $[-1\,;7]$ qui n'admettent aucun antécédent.

Utiliser sa calculatrice

→ Pour obtenir un encadrement de la solution d'une équation

11 Un algorithme pour encadrer une solution

Nous nous proposons d'étudier un algorithme permettant d'obtenir un encadrement d'une solution d'une équation $f(x) = 0$, cet encadrement ayant une amplitude inférieure ou égale à un nombre ℓ que nous pourrons choisir (par exemple $\ell = 10^{-2}$). Si besoin, vous pouvez vous reporter aux rappels d'algorithmique p. 16.

A Pour se préparer

On suppose que la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires.

1. Montrez qu'il existe une solution unique α à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a\,;b]$.

2. a) On pose $m = \frac{a+b}{2}$. Que représente le nombre m pour l'intervalle $[a\,;b]$?

b) Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, expliquez pourquoi $\alpha \in [m\,;b]$.

c) Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, à quel intervalle appartient α ?

d) Comparez la longueur de l'intervalle $[a\,;b]$ à celle des intervalles $[a\,;m]$ ou $[m\,;b]$.

Aide
Faites des dessins adaptés à chaque cas.

3. Pour savoir si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, on testera le signe du produit $f(a) \times f(m)$. Justifiez cette méthode.

B Algorithme

Faisons tourner cet algorithme à la main sur un exemple. Considérons l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$.
La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$, avec $f(0)$ et $f(1)$ de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur $[0\,;1]$.

```
Entrées
   Saisir f : fonction
          a, b : bornes de l'intervalle
          ℓ : amplitude maximum de
                l'encadrement
Traitement
   Tant que b-a>ℓ faire
   |     m prend la valeur (a+b)/2
   |     Si f(a)×f(m)>0
   |     |  alors a prend la valeur m
   |     |  sinon b prend la valeur m
   |     FinSi
   FinTantque
Sorties
   Afficher a, b.
```

1. Pour trouver un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}, que doit-on saisir pour f, a, b et ℓ ?

2. Remplissez les cases vides du tableau suivant, en faisant tourner l'algorithme à la main.

Numéro de passage sur l'instruction Tant que	a	b	$b - a > \ell$	m	Signe de $f(a) \times f(m)$
1	0	1	oui	0,5	négatif
2	0	0,5	…	…	…
3	…	…	…	…	…

3. a) Quelle condition doivent vérifier les nombres a et b qui ne permettront plus d'entrer dans la boucle « Tant que » ?

b) Expliquez pourquoi ces deux nombres constitueront un encadrement de α répondant à la question.

4. a) Cherchez la définition du mot « dichotomie ».

b) Expliquez pourquoi cet algorithme est dit « par dichotomie ».

C Traduction de l'algorithme en un programme adapté à la calculatrice

1. Écrivez le programme adapté à votre calculatrice.

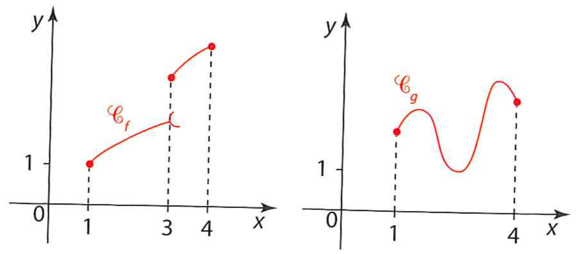
2. Donnez un encadrement de la solution de l'équation $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ avec $\ell = 10^{-2}$.

3. Obtient-on un encadrement de longueur exactement égale à 10^{-2} ? Expliquez.

Entraînement

DE TÊTE

12 Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g.



Pour chacune de ces fonctions, dites si elle est continue sur l'intervalle [1 ; 4].

13 La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

14 Sur quels intervalles la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle continue ?

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Pour les exercices 15 à 21

La fonction f est définie sur un intervalle I. Tracez la courbe représentative de f et dites si f est continue sur I.

15 I = [–2 ; 2] $\begin{cases} \text{Si } x \in [-2\,;0[,\ f(x) = -\frac{1}{2}x. \\ \text{Si } x \in [0\,;2],\ f(x) = 2x. \end{cases}$

16 I = [–1 ; 1] $\begin{cases} \text{Si } x \in [-1\,;0[,\ f(x) = 1. \\ \text{Si } x \in [0\,;1],\ f(x) = -2x+3. \end{cases}$

17 I = [0 ; 2] $\begin{cases} \text{Si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = x. \\ \text{Si } x \in [1\,;2],\ f(x) = -x+2. \end{cases}$

18 I = [0 ; 4] $\begin{cases} \text{Si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = 2x+1. \\ \text{Si } x \in [1\,;4],\ f(x) = x^2. \end{cases}$

19 I = [0 ; 2] $\begin{cases} \text{Si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = 2x-1. \\ \text{Si } x \in [1\,;2],\ f(x) = \frac{x^2+1}{2}. \end{cases}$

20 I = [1 ; 5] $\begin{cases} \text{Si } x \in [1\,;4[,\ f(x) = \frac{5}{x}. \\ \text{Si } x \in [4\,;5],\ f(x) = x-3. \end{cases}$

21 I = [0 ; 3] $\begin{cases} \text{Si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = 3x. \\ \text{Si } x \in [1\,;2],\ f(x) = 3. \\ \text{Si } x \in \,]2\,;3],\ f(x) = 4. \end{cases}$

22 **Tarifs postaux**

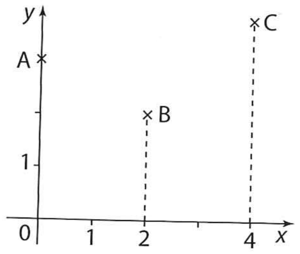
Le tableau suivant définit la fonction qui associe au poids x d'une lettre, en grammes, son tarif d'affranchissement en euros pour un envoi prioritaire en France métropolitaine d'une lettre de poids inférieur à 250 g (*source : La Poste 2011*).

Poids (en g) jusqu'à :	Tarif d'affranchissement (en €)
20	0,60
50	1,00
100	1,45
250	2,40

1. Représentez graphiquement cette fonction.

2. Est-elle continue sur l'intervalle [0 ; 250] ?

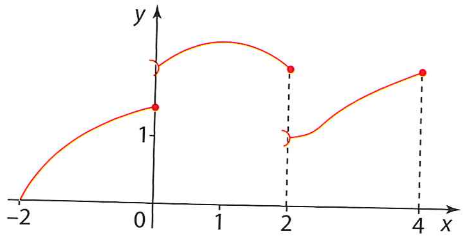
23 On donne les points A, B et C suivants :



1. Dessinez en bleu la courbe représentative d'une fonction continue sur [0 ; 4] passant par A, B et C.

2. Dessinez à présent en rouge la courbe représentative d'une fonction non continue sur [0; 4], cette courbe passant toujours par les point A, B et C.

24 La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. La fonction f est-elle continue sur :

a) [–2 ; 4] ? **b)**]0 ; 2] ? **c)** [0 ; 2] ?

2. Donnez des intervalles où f est continue.

25 Pour x réel positif, la fonction f est définie par $f(x) = \frac{x}{3}$ et la fonction g comme la fonction qui associe à x son quotient dans la division euclidienne de x par 3. Ainsi, $x = 3 \times g(x) + r$, avec $g(x) \in \mathbb{N}$ et $r \in [0\,;3[$.

1. Calculez $g(6)$, $g(1)$, $g(1{,}2)$.

2. Dessinez dans le même repère les courbes représentatives de f et de g.

3. Les fonctions f et g sont-elles toutes deux continues sur $\mathbb{R}^+$? Expliquez.

26 On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

1. Avec la calculatrice

a) Faites tracer la courbe représentative de f sur l'écran de votre calculatrice et constatez que vous obtenez une droite.

b) La courbe semble être une droite. Si tel est bien le cas, que pouvez-vous dire quant à la continuité de f ?

2. Une démonstration à présent

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) La fonction f peut-elle être continue sur $\mathbb{R}$?

c) Pour x appartenant à l'ensemble de définition de f, simplifiez l'expression de $f(x)$.

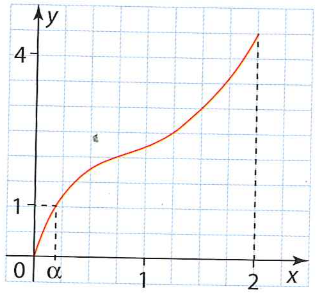
d) Expliquez pourquoi la représentation graphique de f est une droite privée d'un point. Précisez lequel.

e) Sur quels intervalles la fonction f est-elle continue ?

3. Expliquez pourquoi « on n'a rien vu » sur l'écran de la calculatrice.

PROPRIÉTÉ DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

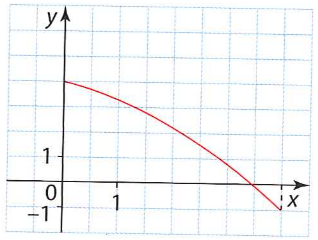
27 La figure ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle I = [0 ; 2].



1. Expliquez pourquoi on peut appliquer à f la propriété des valeurs intermédiaires sur I.

2. Donnez alors graphiquement un encadrement de α vérifiant $f(\alpha) = 1$.

28 Cette figure représente une fonction f définie sur I = [0 ; 4].



1. Expliquez pourquoi on peut appliquer à f la propriété des valeurs intermédiaires sur I.

2. Lisez alors graphiquement une valeur approchée de α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

29 Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie sur [–1 ; 4] :

x	–1		4
$f(x)$	–2	↗	6

Expliquez pourquoi il existe un unique réel α de l'intervalle [–1 ; 4] tel que $f(\alpha) = 0$.

30 f est une fonction continue et strictement croissante sur [–3 ; 4]. On sait de plus que $f(-3) = -1$ et $f(4) = 5$. Donnez le nombre de solutions dans [–3 ; 4] de l'équation $f(x) = 1$.

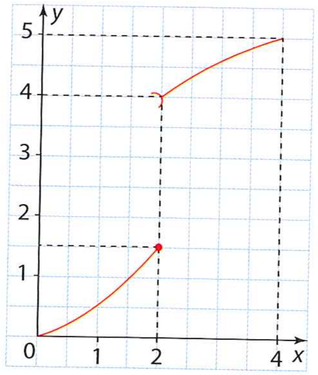
31 La fonction f, définie sur [–2 ; 3] admet le tableau de variation suivant :

x	–2		1		3
$f(x)$	3	↘	–1	↗	5

1. La fonction f est-elle strictement monotone sur [–2 ; 3] ?

2. En appliquant à deux reprises la propriété des valeurs intermédiaires à f, montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède dans l'intervalle]–2 ; 3[deux solutions.

32 La fonction f, définie sur [0 ; 4], est représentée ci-contre :



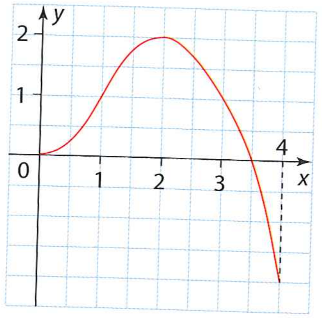
1. a) f est-elle continue sur $[0\,;4]$?

b) Peut-on trouver α tel que $f(\alpha) = 3$?

2. a) Expliquez pourquoi il existe β unique de l'intervalle $[0\,;2]$ tel que $f(\beta) = 1$.

b) Lisez alors graphiquement une valeur approchée de β.

33 On donne ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur $[0\,;4]$.



1. Dressez le tableau de variation de f.

2. a) Peut-on appliquer à f la propriété des valeurs intermédiaires sur $[0\,;4]$? Pourquoi ?

b) Expliquez pourquoi on peut appliquer à f la propriété des valeurs intermédiaires sur $[2\,;4]$.

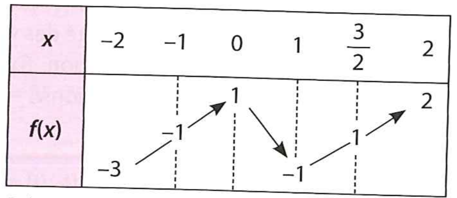
3. Déterminez alors par lecture graphique une valeur approchée de α appartenant à $[2\,;4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. On donne à présent l'expression de f :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = x^2 \\ \text{si } x \in [1\,;4],\ f(x) = 2 - (x-2)^2. \end{cases}$$

Calculez alors la valeur de α de la question 3.

34 Le tableau de variation ci-dessous est celui de f définie sur $\text{I} = [-2\,;2]$.



x	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-3	-1	1	-1	1	2

1. a) Déterminez, à l'aide de la propriété des valeurs intermédiaires, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Encadrez chaque solution par deux entiers consécutifs.

2. Résolvez dans I l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

35 La fonction f est définie sur $[0\,;3]$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = 2x^2\,; \\ \text{si } x \in [1\,;3],\ f(x) = -x + 3. \end{cases}$$

1. a) Dressez le tableau de variation de f.

b) Construisez sa courbe représentative et vérifiez graphiquement que f est continue sur $[0\,;3]$.

2. a) Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 1$ possède deux solutions sur $[0\,;3]$.

b) Lisez graphiquement une valeur approchée de chacune de ces solutions.

c) Pour chacune des solutions, calculez sa valeur exacte.

36 On définit une fonction f sur $[-1\,;2]$ ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-1\,;0[,\ f(x) = x\,; \\ \text{si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = x^2\,; \\ \text{si } x \in [1\,;2],\ f(x) = -x + 2. \end{cases}$$

1. a) Dressez le tableau de variation de f.

b) Construisez sa courbe représentative et vérifiez graphiquement que f est continue sur $[-1\,;2]$.

2. Tout nombre de l'intervalle $[-1\,;1]$ possède-t-il par f un antécédent et un seul ?

3. On considère l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$.

Combien cette équation possède-t-elle de solutions :

a) dans l'intervalle $[0\,;1]$?

b) dans l'intervalle $[-1\,;2]$?

c) Lisez graphiquement une valeur approchée de chacune des solutions dans l'intervalle $[-1\,;2]$, puis trouvez leur valeur exacte.

37 La fonction f est définie sur $[0\,;100]$ par $f(x) = x^2$.

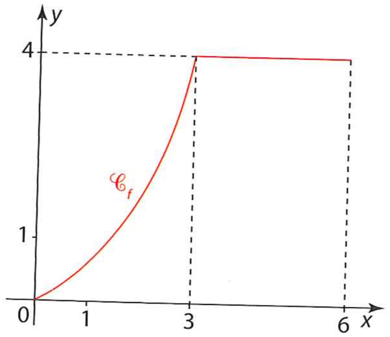
1. Montrez que tout élément y de $[0\,;10\,000]$ possède un antécédent unique dans $[0\,;100]$.

2. Grâce au résultat précédent, on peut définir une fonction : celle qui à tout réel y de $[0\,;10\,000]$ associe son antécédent unique par f dans $[0\,;100]$. Quelle est cette fonction ?

Commentaire

Cette fonction est appelée **fonction réciproque** de la fonction f.

38 La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. a) Lisez graphiquement les valeurs de $f(0)$ et de $f(6)$.

b) La fonction f est-elle continue sur $[0\,;6]$?

c) Est-elle strictement croissante sur cet intervalle ?

2. Peut-on appliquer la propriété des valeurs intermédiaires et conclure que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;6]$? Expliquez.

39 **ALGORITHMIQUE** **Pour encadrer une racine**

Lorsque l'on ne sait pas résoudre algébriquement une équation $f(x) = 0$, on arrive souvent à encadrer chaque racine α par deux entiers consécutifs a et $a + 1$, ceci grâce à la propriété des valeurs intermédiaires.
À partir de là, pour une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,; a + 1]$, voici un algorithme différent de celui par dichotomie (voir TD p. 61) et permettant, lorsqu'on lui donne a, de trouver un encadrement de α de longueur 10^{-1}. Cet algorithme est dit « par balayage ». En effet, la variable x va prendre successivement les valeurs a, $a + 10^{-1}$, $a + 2 \times 10^{-1}$… tant qu'on n'aura pas franchi la valeur α.

```
Entrée
  Lire $a$
Initialisation
  Pas prend la valeur $10^{-1}$
  $x$ prend la valeur $a$
Traitement
  Tant que $f(x) \times f(x + Pas) > 0$
    $x$ prend la valeur $x + pas$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher : $x < \alpha \leqslant x + pas$
```

1. Quelle est la valeur de $f(x) \times f(x + Pas)$ au premier passage dans la boucle Tant que ?

2. Qu'en déduit-on pour α :

a) lorsque cette valeur est strictement positive ?

b) lorsqu'elle est négative ?

3. Comment se rend-on compte que l'on franchit pour la première fois la valeur α ?

4. Que contient la variable x à la sortie de la boucle ?

5. On suppose que l'on obtient, après avoir fait tourner cet algorithme, le résultat suivant : $a + 0{,}4 < \alpha \leqslant a + 0{,}5$.

a) Comment modifier l'algorithme précédent pour obtenir à présent un encadrement de α de longueur 10^{-2} ?

b) Quelle valeur faut-il alors donner à a au début de l'exécution de l'algorithme ?

Remarque. *Constatez qu'avec cet algorithme dit « par balayage », on obtient un encadrement de α par deux nombres ayant chacun deux chiffres après la virgule et différant exactement de 0,01, contrairement à l'encadrement que l'on obtient avec l'algorithme par dichotomie.*

AVEC LA FONCTION DÉRIVÉE

40 f est une fonction dérivable sur $[0\,;5]$ telle que :

$$\forall x \in [0\,;5],\ f'(x) > 0.$$

On sait de plus que $f(0) = -4$ et $f(5) = \dfrac{7}{3}$.

Expliquez pourquoi l'équation $f(x) = 2$ possède une solution unique dans l'intervalle $[0\,;5]$.

41 La fonction f est définie sur $\text{I} = [3\,;4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

On se propose de montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans I.

1. Calculez $f'(x)$.

2. Étudiez le signe de $f'(x)$ sur I.

3. Calculez $f(3)$ et $f(4)$.

4. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans I.

5. Comment savoir si la solution appartient à $[3\,;3{,}5]$ ou bien à $]3{,}5\,;4]$?

Pour les exercices 42 à 45

En étudiant les variations d'une fonction, montrez que l'équation proposée possède une unique solution α dans l'intervalle I indiqué.
En utilisant la table de votre calculatrice, donnez un encadrement de α de longueur 10^{-1}.

42 $x^3 + 5x - 7 = 0 \quad ; \quad \text{I} = [1\,;2].$

43 $x^5 + \sqrt{x} - 3 = 0 \quad ; \quad \text{I} = [1\,;2].$

44 $x^3 + 12x - 1 = 0 \quad ; \quad \text{I} = [0\,;1].$

45 $x^3 - \dfrac{3}{x} + 1 = 0 \quad ; \quad \text{I} = [1\,;2].$

46 **1.** Est-il besoin d'étudier la continuité et les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ pour trouver le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$?

2. Peut-on trouver les solutions exactes ?

3. Résolvez l'inéquation : $x^2 - 3x + 1 < 0$.

47 **Combien d'antécédents ?**

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 + 2x - 5$.
On se propose de déterminer le nombre d'antécédents de 0 par f.

1. a) Calculez $f'(x)$ et précisez son signe.

b) Quel est le sens de variation de f ?

2. a) Trouvez deux nombres a et b tels que $f(a) < 0$ est $f(b) > 0$.

b) Montrez que dans l'intervalle $[a;\ b]$, 0 ne possède qu'un seul antécédent.

c) En utilisant le sens de variation de f, montrez que 0 n'a pas d'autre antécédent.

48 On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2-4=0.$$

1. a) Cette équation possède-t-elle des solutions dans $]-\infty\,;0[$?

b) Le nombre 0 est-il une solution ?

c) Déduisez de ce qui précède l'ensemble dans lequel on recherchera les solutions.

2. On ne sait pas résoudre exactement cette équation. On va voir qu'il est possible de démontrer qu'elle admet une solution unique, puis de trouver une valeur approchée de cette solution.

Posons $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2-4$.

a) Étudiez les variations de f.

b) Trouvez deux nombres a et b tels que $f(a)<0$ et $f(b)>0$.

c) Déduisez que l'équation possède sur $[a;\ b]$ une solution unique α.

d) En utilisant le sens de variation de f, montrez que l'équation ne possède pas d'autres solutions en dehors de $[a\,;b]$.

3. a) En utilisant la touche ⟮Trace⟯ de la calculatrice, donnez un encadrement de α.

b) Est-ce que cette méthode vous permet d'obtenir un encadrement de α de longueur donnée *a priori*, par exemple 10^{-2} ?

c) Expliquez comment obtenir avec votre calculatrice un encadrement de α de longueur 10^{-2}.
Donnez le résultat obtenu.

49 Équation et Inéquation

On se propose de résoudre l'équation $2x^3-6x+1=0$ et ensuite l'inéquation $2x^3-6x+1\geqslant 0$.

A. Équation $2x^3 - 6x + 1 = 0$

Soit la fonction $f: x\mapsto 2x^3-6x+1$.

1. Dressez le tableau de variation de f à partir du signe de $f'(x)$.

2. Montrez que dans l'intervalle $[-1;\ 1]$, l'équation possède une solution unique β.

3. a) Trouvez un nombre a inférieur à -1 tel que $f(a)<0$.

b) Montrez que sur l'intervalle $]-\infty;\ -1[$, il existe une unique solution α.

Aide Placez-vous sur l'intervalle $[a\,;-1]$ et ensuite sur $]-\infty\,;a[$.

4. Utilisez la méthode précédente pour montrer que sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, il existe une unique solution γ.

5. Donnez un encadrement de longueur 10^{-1} pour chacune des solutions α, β et γ. Indiquez le procédé utilisé.

B. Inéquation $2x^3 - 6x + 1 \geqslant 0$

En utilisant les variations de f, résolvez cette inéquation.

50 Différentes approches pour une équation

f est la fonction définie pour $x\geqslant 0$, par $f(x)=x-4\sqrt{x}+1$.
On se propose de résoudre l'équation $f(x)=0$.

1. Avec la calculatrice

a) Tracez sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f.

b) Combien l'équation semble-t-elle avoir de solutions ?

c) Donnez un encadrement de chacune des solutions en utilisant la touche ⟮Trace⟯.

2. Avec la propriété des valeurs intermédiaires

En étudiant les variations de f, montrez que l'équation possède exactement deux solutions, l'une dans $[0;\ 1]$, l'autre dans $[13\,;14]$.

3. Résolution exacte

En posant $y=\sqrt{x}$, constatez que l'on peut en fait résoudre exactement cette équation.

4. Comparez les résultats trouvés.

51 Inéquation

En utilisant les variations d'une fonction, résolvez l'inéquation : $x^4-4x+1\leqslant 0$.

Aide

Montrez d'abord que l'équation $x^4-4x+1=0$ possède dans $\mathbb{R}$ deux racines α et β.

52 Avec la dérivée seconde

On souhaite obtenir les variations de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+2x+1}$.

1. Dérivée de f

a) Déterminez l'ensemble de définition D de f.

b) Vérifiez que : $\forall x\in \mathrm{D},\ f'(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$.

c) Expliquez comment, connaissant le signe de :

$$g(x)=x^3+3x^2+2,$$

on peut en déduire sur D celui de $f'(x)$.

2. Signe de $g(x)$

a) Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe.

b) Dressez le tableau de variation de g.

c) Montrez que l'équation $g(x)=0$ possède une seule solution α dans l'intervalle $[-4\,;-3]$ et que, dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas d'autre solution.
Donnez un encadrement de α de longueur 10^{-2}.

d) Donnez le signe de $g(x)$.

3. Tableau de variation de f

a) Déduisez des questions précédentes le signe de $f'(x)$.

b) Dressez le tableau de variation de f.

53 Intersection de deux courbes

La fonction f est définie par $f(x)=(2x+1)^2$ et la fonction g par $g(x)=\dfrac{1}{x}$. On se propose de trouver les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de ces deux fonctions.

A. Avec un traceur

Avec le logiciel GeoGebra par exemple, tracez la courbe de f et celle de g.
En utilisant la fonction Intersection [<objet>, <objet>] située dans Calculs & Fonctions, constatez qu'il semble n'y avoir qu'un seul point d'intersection. Lisez sur l'écran ses coordonnées.

Note

Si vous ne disposez pas d'un ordinateur, tracez les deux courbes sur votre calculatrice et utilisez la fonction intersect située dans 2nd CALC pour TI ou, dans SHIFT G-Solv, puis ISCT, pour Casio.

B. Une démonstration à présent

1. Quelle équation doit-on résoudre pour obtenir les abscisses des points d'intersection des deux courbes ?

2. Montrez que la résolution de cette équation se ramène à celle de l'équation : $x(2x+1)^2-1=0$.

3. Soit h la fonction définie par $h(x)=x(2x+1)^2-1$.

a) Étudiez les variations de h.

b) Montrez que h ne s'annule qu'en une seule valeur α de $\mathbb{R}$.

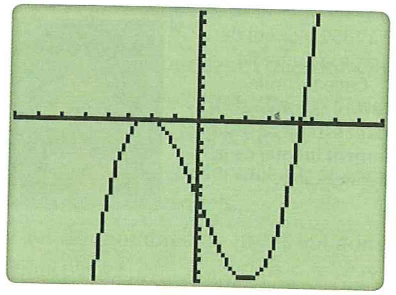
c) Donnez un encadrement de α de longueur 10^{-2}.

d) Comparez avec le résultat trouvé avec GeoGebra.

54 Un graphique trompeur

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-5x-\dfrac{22}{3}$.

1. L'écran graphique ci-dessous donne l'allure de la courbe représentative de f.



Quel semble être le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?

2. a) Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?

c) Ce résultat est-il en accord avec ce que vous avez observé sur la copie d'écran ci-dessus ?

d) Donnez un encadrement de longueur 10^{-3} de chacune des solutions.

e) Résolvez l'inéquation $f(x)<0$.

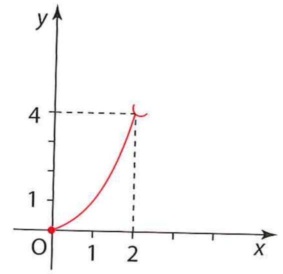
POUR LA LOGIQUE

Pour les exercices 55 et 56

f est une fonction continue strictement croissante sur $[0\,;4]$ telle que :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(4)=16.$$

Voici une partie de la courbe représentative correspondant aux réels x de l'intervalle $[0\,;2[$.



Pour chacune des propriétés suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse.

55 **1.** $\forall x\in[2\,;4],\ f(x)\neq 4$.

2. $\exists x\in\ ]2\,;4]$ tel que $f(x)=10$.

56 **1.** $\forall a\in[0\,;4]\ \forall b\in[0\,;4],\ a\neq b\Rightarrow f(a)\neq f(b)$.

2. $\forall x\in\ ]2\,;4],\ f(x)\geqslant 4$.

57 Démontrez que la propriété suivante est fausse : pour toute fonction f continue sur $[-2;\ 2]$, il existe au moins un $x\in[-2\,;2]$ tel que $f(x)=0$.

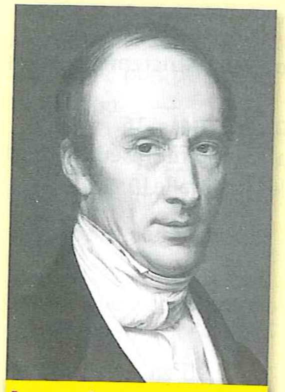
Un peu d'histoire

Chercheurs d'hier

Cauchy et la continuité

Les mathématiciens inventent le calcul différenciel (dérivation) sans avoir de définitions explicites et précises des notions de fonction, de limite, d'infiniment petit.

La nécessaire remise en ordre de cette théorie conduit à en dégager les notions fondamentales.



Augustin-Louis Cauchy
1789 - 1857

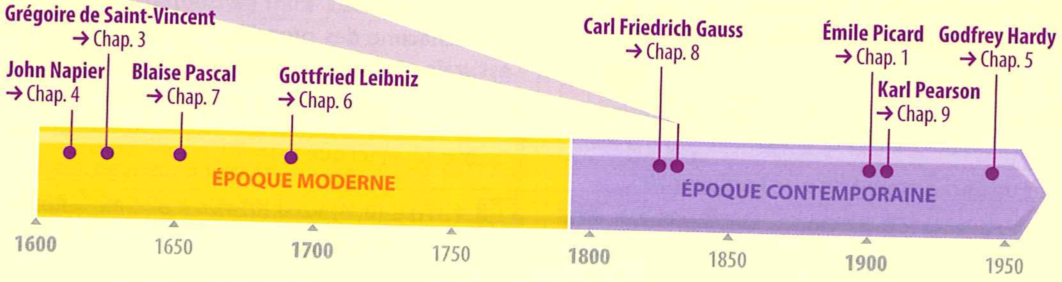
Euler, le premier, propose un nouvel ordre d'exposition, qui est à peu de choses près le même que celui d'aujourd'hui : fonctions, limites, dérivation, calcul intégral.

Au XIX^e siècle, un souci grandissant de rigueur conduit à l'élucidation de ces concepts de base. Cauchy symbolise en France ce mouvement.

Voici comment il définit la continuité d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$:

« La fonction $f(x)$ est continue si pour chaque valeur de x, la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ». Ceci est à comparer avec la définition moderne : f est continue en x si $\lim\limits_{\alpha\to 0} f(x+\alpha)=f(x)$.

Cauchy est devenu professeur à l'École polytechnique en 1814, après avoir débuté une carrière d'ingénieur des Ponts et Chaussées qui ne lui convenait pas. Il rédigea un cours d'Analyse, dans lequel il prit comme éléments fondateurs les notions de limite et de continuité : l'Analyse moderne était née.



À la même époque

En France

Le 8 juillet 1815, la montée sur le trône de Louis XVIII marque le début de la Restauration. Elle prendra fin en 1830 avec les émeutes des « Trois Glorieuses. »

Louis XVIII
(1755 - 1824)

À la même époque

En Littérature

De 1829 à 1850, Honoré de Balzac rédige la Comédie humaine. Cet ensemble composé de 137 romans, nouvelles et essais constitue un monument unique de la littérature mondiale.

Honoré de Balzac
(1799 - 1850)

Sur le Web
http://serge.mehl.free.fr/chrono/cauchy.html

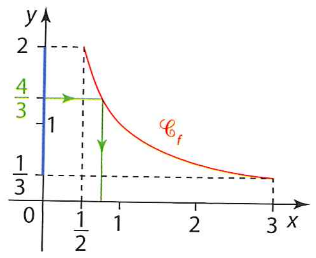
Accompagnement personnalisé

Soutien

58 Trouver graphiquement un antécédent

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;3\right]$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Sa courbe représentative, tracée ci-contre, est une partie de celle de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$.



→ *L'ensemble de toutes les images par f des nombres x de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;3\right]$ est dessiné en bleu sur l'axe des ordonnées.*

1. Placez sur l'axe des ordonnées le point $\frac{4}{3}$. Graphiquement, construisez un antécédent par f de ce nombre.

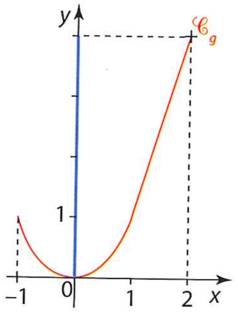
→ *Indication : il s'agit de trouver un réel x tel que $f(x)=\frac{4}{3}$. Le trajet tracé en vert permet d'obtenir un tel antécédent.*

2. Graphiquement, expliquez pourquoi tout nombre de $\left[\frac{1}{3}\,;2\right]$ admet un antécédent unique par f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $[-1\,;2]$ par :

$$g(x)=x^2.$$



1. a) Vérifiez que sa courbe représentative est la courbe ci-contre.

→ *L'ensemble de toutes les images des x de [–1 ; 2] est dessiné en bleu sur la figure.*

b) Quel est cet ensemble ?

2. Graphiquement, répondez aux questions suivantes :

a) Certains nombres de l'intervalle $[0\,;4]$ admettent un seul antécédent. Précisez lesquels.

b) Certains nombres de l'intervalle $[0\,;4]$ admettent 2 antécédents. Précisez lesquels.

c) Existe-t-il des nombres de $[0\,;4]$ qui admettent 3 antécédents par g ?

d) Indiquez un nombre sur l'axe des ordonnées qui n'admet aucun antécédent par g.

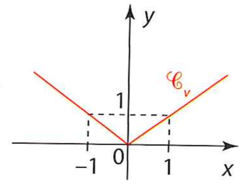
Approfondissement

59 **A.** Considérons la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$\begin{cases} v(x)=x \text{ si } x\geqslant 0\\ v(x)=-x \text{ si } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Cette fonction v est appelée valeur absolue ; on note $v(x)=|x|$, ce qui se lit « valeur absolue de x ».

1. Vérifiez que cette fonction admet comme courbe représentative la courbe ci-contre :



2. Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Une telle fonction est dite fonction affine par morceaux.

→ *On se propose à présent d'étudier le problème suivant :*

Étant donné une fonction affine par morceaux f, comment, en utilisant la fonction valeur absolue, donner une expression unique pour f(x) ? C'est le cas par exemple pour la fonction v ci-dessus : on a pu écrire v(x) = |x|.

B. Un premier exemple

Considérons la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=0 \text{ si } x\leqslant 0\\ g(x)=x \text{ si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

1. a) Représentez graphiquement cette fonction.

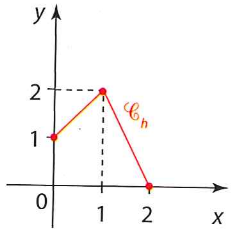
b) Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Trouvez deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=ax+b|x|$.

→ *Supposez que a et b existent et trouvez leur valeur en donnant à x la valeur 1, puis la valeur –1. N'oubliez pas d'expliquer pourquoi la fonction associée à ce couple (a ; b) est effectivement la fonction g.*

C. Un second exemple

On considère la fonction h affine par morceaux définie sur $[0\,;2]$ et admettant la courbe représentative ci-contre.



Trouvez trois réels c, d et e tels que, $\forall x\in[0\,;2]$, $h(x)=c(x-1)+d|x-1|+e$.

→ *Vous pouvez procéder comme dans la question B.2 ci-dessus (premier exemple).*

Note

Les calculatrices connaissent la fonction valeur absolue, notée abs().

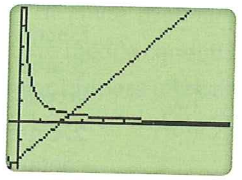
Le jour du BAC

60 Exercice commenté

→ **Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.**

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On se propose d'étudier cette équation par trois méthodes différentes.

1. a) Tracez sur votre calculatrice les courbes d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $y = x - 2$ pour $x > 0$. Vérifiez que l'on obtient le graphique ci-contre.



b) Au vu du graphique, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\,;+\infty[$?

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

a) Calculez $g'(x)$. Montrez que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) Déduisez-en le nombre de solutions de (E) et donnez-en un encadrement.

3. Vérifiez que (E) équivaut à l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$. Résolvez alors cette dernière équation sur $]0\,;+\infty[$.

Analyser l'énoncé

Il s'agit d'une résolution graphique.

Analyser l'énoncé

L'étude de la stricte croissance de g fait penser à une utilisation de la propriété des valeurs intermédiaires.

Analyser l'énoncé

Il s'agit d'une équation du second degré.

Conseils

1. b) Commencez par écrire que résoudre l'équation (E), c'est trouver les abscisses des points d'intersection entre les courbes d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $y = x - 2$.

2. a) On calcule $g'(x)$ et on détermine aisément son signe.

b) g étant strictement croissante, on peut appliquer la propriété des valeurs intermédiaires ; mais sur quel intervalle ? Recherchez deux nombres a et b tels que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.
Essayez par exemple des valeurs entières pour a et b.

3. Dans $]0\,;+\infty[$, on peut multiplier les deux membres de l'équation par x, qui ne s'annule pas, et on obtient une équation du 2^e degré.

Remarque

Répétez bien, dans votre réponse, le mot « semble » figurant dans l'énoncé. On ne vous demande pas de donner la valeur exacte de la solution.

Attention !

Attention au signe lors du calcul de la dérivée de $-\frac{1}{x}$.

Remarque

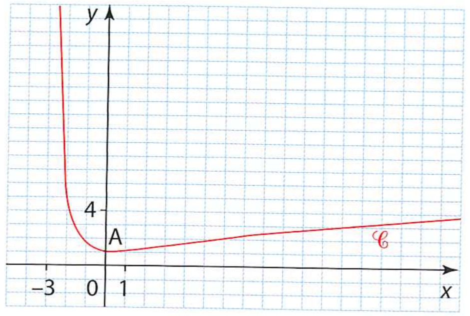
Veillez à ne retenir que la solution positive, car on résout dans $]0\,;+\infty[$.

→ **Voir les corrigés p. 361**

QCM

61 Pour chaque question, indiquez la seule réponse exacte.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.



On sait que le point A de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}$ et que la fonction f est strictement décroissante sur $]-3\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$. Alors :

a) $f'(0) = 1$;

b) $f'(1) = 0$;

c) $f'(0) = 0$.

2. L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est :

a) $y = 1$;

b) $y = x$;

c) $y = 0$.

3. Sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 2$:

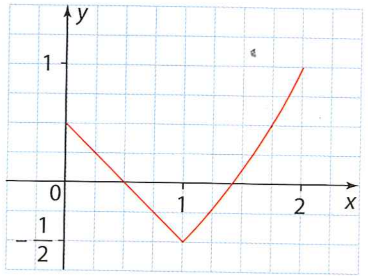
a) n'admet aucune solution ;

b) admet deux solutions de même signe ;

c) admet deux solutions de signes contraires.

LECTURE GRAPHIQUE

62 1. a) La fonction f représentée ci-dessous vous semble-t-elle continue sur [0 ; 2] ?



b) Montrez, en utilisant deux fois la propriété des valeurs intermédiaires, qu'il existe deux réels α et β de [0 ; 2] dont l'image par f est égale à 0.

c) Donnez par lecture graphique des valeurs approchées de α et β.

2. La fonction représentée est définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0\,;1[,\ f(x) = -x + a\,; \\ \text{si } x \in [1\,;2],\ f(x) = ax^2 - 1. \end{cases}$$

a) À l'aide du graphique, déterminez la valeur de a.

b) Dressez le tableau de variation de f.

c) Résolvez dans [0 ; 2] l'équation $f(x) = 0$.

63 Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Une courbe $\mathscr{C}$ admet dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ une équation du type :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c, d sont des réels.

Cette courbe :

- est tangente à la droite d'équation $y = -1$ au point A d'abscisse 0,
- admet au point B d'abscisse $\frac{2}{3}$ une tangente horizontale,
- admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$.

Déterminez les réels a, b, c, d.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1.$$

a) Calculez $f'(x)$ et étudiez les variations de f.

b) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On note α cette solution.

c) Montrez que $1 < \alpha < 2$.
Donnez, en expliquant la méthode utilisée, une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3. a) Tracez dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = x^3 - 1$.

b) Montrez que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ se coupent en un unique point M dont on exprimera les coordonnées en fonction de α.

64 On considère la fonction h définie sur [0 ; 4] par :

$$h(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0\,;2]. \\ x + 2 \text{ si } x \in \,]2\,;4]. \end{cases}$$

1. Tracez la courbe représentative de h dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

2. Graphiquement, expliquez pourquoi le nombre 3 n'admet aucun antécédent par h.