CHAPITRE 1

Suites

Maths et vie quotidienne

En tombant, le premier domino entraîne le domino suivant dans sa chute, qui à son tour entraîne le domino d'après… Ce mouvement « en cascade » fournit une analogie frappante avec les suites récurrentes, dont les termes sont calculés de proche en proche, chaque terme étant calculé en fonction du terme précédent.

Les relations de récurrence ont été largement utilisées pour résoudre des problèmes à « temps discret », notamment en économie où elles fournissent un modèle de l'évolution de la production et du revenu d'une année sur l'autre.

Émile Picard
1856-1941

→ Chercheurs d'hier p. 46

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Qu'est-ce qu'une suite ?

- Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée de nombres réels**, finie ou infinie.
On note (u_n) la suite $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$.
Le nombre u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n).
- Il y a deux procédés usuels pour définir une suite :
– par une expression du type $u_n = f(n)$;
– par récurrence : ce procédé signifie que l'on donne le premier terme u_0 et une relation permettant de définir chaque terme à partir du précédent.
- La représentation graphique, dans un repère, des termes d'une suite (u_n) est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0\,;u_0), (1\,;u_1), (2\,;u_2), \dots, (n\,;u_n), \dots$

1 (u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n, par $u_n = 3^n$ et $v_n = n^2 + 2n$.
a) Calculez $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}$.
b) Calculez $v_0, v_1, v_2, v_3, V_{10}$.
c) Exprimez v_{n+1} en fonction de n.

2 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
Calculez u_1, u_2, u_3.

3 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{6}{n+2}$.
Placez dans un repère les cinq premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n).

Sens de variation d'une suite

- La suite (u_n) est dite **strictement croissante** si pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n < u_{n+1}}$.
La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n > u_{n+1}}$.
- On définit de même une suite croissante en utilisant une inégalité large : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
De même, pour une suite décroissante, on remplace $u_n > u_{n+1}$ par $u_n \geqslant u_{n+1}$.

4 (u_n) est la suite définie pour tout naturel n par $u_n = 5n + 1$.
Montrez que (u_n) est strictement croissante.

5 (u_n) est la suite définie pour tout naturel n par :
$$u_n = -n^2 + 4.$$
Montrez que (u_n) est strictement décroissante.

Suites arithmétiques

- Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = u_n + r.$$
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier naturel n :
$$u_n = u_0 + nr.$$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p :
$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

6 (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 8$.
Calculez u_1, u_2, u_3.

7 (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.
a) Exprimez u_n en fonction de n.
b) Calculez u_{50}.

8 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1{,}5$.
a) Calculez u_{32}.
b) Calculez u_0.

→ Voir les corrigés p. 361

Activité SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps-là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier. »
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.

En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1 Quelques calculs

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.

a) Calculez $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{10}$.

b) Comment passe-t-on d'un terme au terme suivant ?

c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

d) Exprimez u_n en fonction de n. Calculez u_{64}.

2. On note S le nombre total de grains sur l'échiquier. Ainsi, $S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{64}$.

a) Expliquez pourquoi $2S = 2^2 \times 2^3 + \dots + 2^{64} + 2^{65}$.

b) Déduisez-en que $2S - S = 2^{65} - 2$.

2 Le Roi avait-il raison de sourire ?

Pour répondre, sachez qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse en moyenne une tonne.

Quelles pourraient être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?

Étant donné une suite géométrique $(v_n)_{n \geqslant 1}$, de premier terme v_1 et de raison q, on va voir qu'il est possible d'expliciter la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de q et de n.

1 Suites géométriques

1.1 Qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Définition 1 Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Exemple. (u_n) est une suite géométrique de raison 5.
Si $u_0 = 2$, alors $u_1 = 5 \times u_0 = 10$; $u_2 = 5 \times u_1 = 50$.

1.2 Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et q

Théorème 1
1. (u_n) est une suite géométrique de raison q.
Alors, pour tout naturel n :

$$u_n = q^n u_0.$$

2. Si pour tout naturel n, $u_n = ba^n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. On utilise la définition d'une suite géométrique.
1. $u_1 = qu_0$; $u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2u_0$;
et ainsi, de proche en proche, on obtient : $u_3 = q^3u_0$, …, puis $u_n = q^n u_0$.
2. $u_{n+1} = ba^{n+1} = b(a^n) \times a = u_n \times a$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison a.

Exemple
1. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$. Alors : $u_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 3 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$.
2. On pose pour tout naturel n, $u_n = 4^n \times 5$.
Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 4.

1.3 Calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et q

Théorème 2 (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$.
Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration. On utilise la formule $u_n = u_0 q^n$.
$u_n = q^n u_0$; or $u_p = q^p u_0$, donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \frac{u_p}{q^p}$.
D'où $u_n = q^n \frac{u_p}{q^p} = u_p q^{n-p}$.

Remarque. Si $p = 0$, on retrouve le théorème 1.

Exemple. (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et telle que $u_{10} = 5$.
Alors : $u_{50} = u_{10} \times q^{50-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{40}$; $u_6 = u_{10} \times q^{6-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{-4} = 5 \times \frac{2^4}{9^4}$.

1.4 Sens de variation de la suite (q^n)

Théorème 3

La suite de terme général $u_n = q^n$ est :
- **strictement croissante** si $q > 1$;
- **strictement décroissante** si $0 < q < 1$;
- **ni croissante, ni décroissante** si $q < 0$.

Démonstration

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q - 1)$.

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ si $q > 1$ et $u_{n+1} - u_n < 0$ si $0 < q < 1$.

Si $q < 0$, $q^n > 0$ pour n pair et $q^n < 0$ pour n impair, donc la suite (q^n) n'est ni croissante ni décroissante.

1.5 Variation relative

Théorème 4

(u_n) est une suite géométrique non nulle de raison q strictement positive.

Alors $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ **est constant.**

Démonstration

On va vérifier que $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ ne dépend pas de n.

$u_{n+1} = qu_n$ donc $u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q - 1)u_n$. Donc $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = q - 1$.

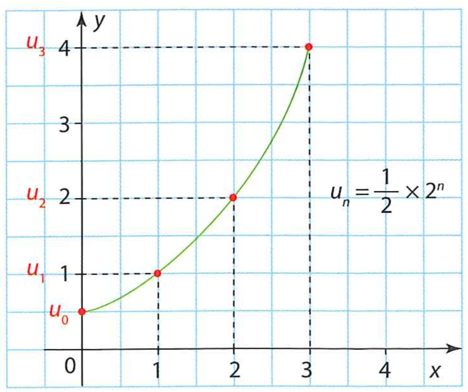
Définition 2

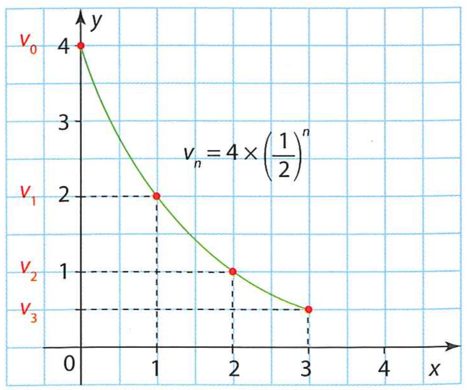
Le rapport $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ est appelé **variation relative.**

1.6 Évolution exponentielle

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison 2, et la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

On représente graphiquement les quatre premiers termes de chacune de ces deux suites et on relie les points ainsi obtenus.





On dit que ces suites ont une **évolution exponentielle.**

2 Somme des termes d'une suite géométrique

2.1 Calcul de $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ ($q \neq 1$)

Théorème 5

Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $1 - q$, on constate qu'elle est équivalente à $(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = 1 - q^{n+1}$.

Démontrons cette dernière égalité :

$(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = (1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^n}) - (\cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^n} + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$.

Remarque. Si $q = 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$.

Exemple. Posons $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{10}}$.

Appliquons le résultat du théorème 5 avec $q = \dfrac{1}{2}$.

On obtient $S = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{11}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{11}}}{\dfrac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^{11}}\right)$, c'est-à-dire $2 - \dfrac{1}{2^{10}}$.

2.2 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème 6

(u_n) est une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Alors $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration. On sait que pour tout entier naturel p,

$u_p = u_0 q^p$ donc $S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^n = u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$.

Donc d'après le théorème 5 : $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Remarque. Pour calculer une somme de termes consécutifs quelconques, $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), on peut procéder de manière analogue.

3 Limite de la suite (q^n), $q > 0$

3.1 Notion de limite

Étudier la limite d'une suite, c'est se demander ce que deviennent les nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, « vers $+\infty$ ».

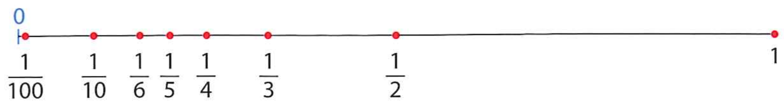
Plus précisément c'est s'intéresser aux questions suivantes :
- Les nombres u_n finissent-ils par s'accumuler près d'un nombre fixe ?
- Les nombres u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

Exemples

1. Écrivons la liste des termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$:

$1 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{4} ; \ldots ; \dfrac{1}{10} ; \ldots ; \dfrac{1}{100} ; \ldots ; \dfrac{1}{10^3} ; \ldots ; \dfrac{1}{10^{10}} ; \ldots$

Il est clair que les termes finissent par s'accumuler autour de zéro.



On dit que la suite (u_n) converge vers 0, ou encore qu'elle admet 0 comme limite.

On écrit **lim $(u_n) = 0$.**

2. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$.

$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4, \ldots, u_{10} = 10^2 = 100, u_{100} = 100^2 = 10\,000, \ldots, \ldots$

Il est clair que les termes finissent par être aussi grands que l'on veut.

On dit que la suite (v_n) tend vers $+\infty$ ou encore qu'elle admet $+\infty$ comme limite.

On écrit **lim $(v_n) = +\infty$.**

On définit de manière analogue la notion de limite égale à $-\infty$.

Par exemple lim $(-n^2) = -\infty$.

En effet, n^2 devient aussi grand que l'on veut mais $-n^2$ est négatif.

3.2 Limite de la suite (q^n), $q > 0$

- Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On a $u_0 = 1, u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{1}{4}, \ldots, u_{10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1\,024}, \ldots$, etc.

Les termes de cette suite finissent par s'accumuler près de 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On écrit lim $(u_n) = 0$.

Plus généralement, on conçoit qu'il en est ainsi pour toute suite (q^n) avec $0 < q < 1$.

- Considérons la suite (v_n) de terme général $v_n = 3^n$.

On a $v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 9, \ldots, v_{10} = 3^{10} = 59\,049, \ldots$, etc.

Les termes de cette suite prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut lorsque n tend vers $+\infty$.

On écrit lim $(v_n) = +\infty$.

- Si $q = 1$, tous les termes de la suite (q^n) sont égaux à 1, donc la limite de la suite (q^n) est égale à 1.

On écrit lim $(1^n) = 1$.

Théorème 7

Si $0 < q < 1$, lim $(q^n) = 0$.
Si $q > 1$, lim $(q^n) = +\infty$.
Si $q = 1$, lim $(q^n) = 1$.

Exemples

- lim $\left(\dfrac{3{,}4}{3{,}5}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{3{,}4}{3{,}5} < 1$.
- lim $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n = +\infty$ car $\pi > 3$ donc $\dfrac{\pi}{3} > 1$.

3.3 Compléments

Les propriétés suivantes sont intuitives :

1. Si lim $(u_n) = 0$ alors :
- pour tout réel a, lim $(au_n) = 0$;
- pour tout réel b, lim $(b + u_n) = b$;
- pour tout réel a et tout réel b, lim $(au_n + b) = b$.

2. Si lim $(u_n) = +\infty$ alors, pour tout réel a :
- lim $(au_n) = +\infty$ si $a > 0$;
- lim $(au_n) = -\infty$ si $a < 0$.

- Si lim $(u_n) = +\infty$ alors, pour tout réel b, lim $(b + u_n) = +\infty$.
- Si lim $(u_n) = -\infty$ alors, pour tout réel b, lim $(b + u_n) = -\infty$.

Exemples

1. Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

On sait que $u_n = 2 \times 3^n$, or lim $(3^n) = +\infty$, donc lim $(u_n) = +\infty$.

2. Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

On sait que $u_n = -3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, or lim $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$, donc lim $(u_n) = 0$.

3. Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{2}{3}$.

On note $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.

On sait que $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ c'est-à-dire $S_n = 2 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{2}{3}} = 2 \times 3\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Or lim $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 0$ donc lim $S_n = 2 \times 3 = 6$.

Remarque. Notons que cette suite S_n est croissante et que sa limite n'est pas égale à $+\infty$.

4 Suites arithmético-géométriques

4.1 Définition

Définition 3

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique si elle satisfait à une relation de récurrence du type $\boldsymbol{u_{n+1} = au_n + b}$ où a et b désignent deux réels.

Exemple

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Ici $a = 2$ et $b = -1$.

Ses termes peuvent être calculés successivement en utilisant la relation de récurrence.

$u_1 = 2\,u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5 ; u_2 = 2\,u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9, \ldots$, etc.

Remarque. Cas particuliers :
- Si $b = 0$, la suite est une suite géométrique de raison a.
- Si $a = 1$, la suite est une suite arithmétique de raison b.

4.2 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Conformément au programme, on verra sur des exemples que l'étude d'une suite arithmético-géométrique (u_n) peut être ramenée à l'étude d'une suite géométrique (v_n).

EXERCICES

Application

Compléments numériques

OBJECTIF 1 Reconnaître et exploiter une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q. Alors :
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$;
- pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$;
- pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

EXERCICE RÉSOLU A

Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année.
En 1990, il y avait 500 adhérents.
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?

2. a) Précisez la nature de la suite (u_n). **b)** Exprimez u_n en fonction de n.

3. En quelle année le nombre d'adhérents a-t-il doublé par rapport au nombre d'adhérents en 1990 ?

Méthode

1. D'après la définition de u_n, u_0 est le nombre d'adhérents en 1990 et u_1 le nombre d'adhérents en 1991.

2. a) Augmenter une quantité A de 5 % revient à multiplier A par 1,05.

b) Lorsqu'une suite est géométrique on peut exprimer le terme u_n en fonction du premier terme u_0, de la raison q et de n.

3. Il s'agit de trouver le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 2u_0$.

Solution

1. $u_0 = 500$
$u_1 = 500 \times \frac{5}{100} + 500 = 525$.

2. a) $u_{n+1} = u_n \times \frac{5}{100} + u_n = 1{,}05u_n$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

b) $u_n = u_0 \times q^n$.
Donc $u_n = 500 \times (1{,}05)^n$.

3. $u_n \geqslant 2u_0$ équivaut à :
$500 \times (1{,}05)^n \geqslant 2 \times 500$
c'est-à-dire $(1{,}05)^n \geqslant 2$.
À l'aide d'une calculatrice on calcule successivement $(1{,}05)^2$, $(1{,}05)^3$, etc.
On trouve $(1{,}05)^n > 2$ dès que $n \geqslant 15$.
Donc le nombre d'adhérents a doublé en $1990 + 15 = 2005$.

Mise en pratique

1 Une feuille de papier a une épaisseur de 0,20 mm.
On note e_0 cette épaisseur. On plie la feuille, on obtient alors une épaisseur de papier $e_1 = 0{,}4$ mm.
Puis on plie une 2e fois, une 3e fois, … et on note e_2, e_3, … les épaisseurs respectivement obtenues.
1. Quelle est la nature de la suite (e_n) ?
Calculez e_2, e_3, e_4.
2. Exprimez e_n en fonction de n.
En supposant que cela soit possible, quelle serait l'épaisseur de papier après 15 pliages ?

2 En période de sécheresse, une mare perd chaque semaine un quinzième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient $V_0 = 60$ m³ d'eau.
On note V_1, V_2, …, V_n les volumes d'eau de la mare au bout, respectivement, d'une semaine, de deux semaines, …, de n semaines.
1. Calculez V_1, V_2.
2. Comment calcule-t-on V_{n+1} à partir de V_n ?
3. Quelle est la nature de la suite (V_n) ?
4. Quel sera le volume d'eau dans la mare à la fin de la huitième semaine ?

OBJECTIF 2 Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison $q > 0$

EXERCICES

Si $0 < q < 1$ alors $\lim (q^n) = 0$.
Si $q > 1$ alors $\lim (q^n) = +\infty$.
Si $q = 1$ alors $\lim (q^n) = 1$.

Propriétés
1. Si $\lim (u_n) = 0$ alors $\lim (au_n) = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Si $\lim (u_n) = +\infty$ alors $\lim (au_n) = +\infty$ si $a > 0$.
$\lim (au_n) = -\infty$ si $a < 0$.

EXERCICE RÉSOLU B

Déterminez la limite de la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q dans chacun des cas suivants :

1. a) $v_0 = 3$ et $q = \frac{5}{6}$. **b)** $v_0 = -2$ et $q = \frac{4}{5}$.

2. a) $v_0 = 5$ et $q = 1{,}1$. **b)** $v_0 = -\frac{1}{2}$ et $q = \frac{6}{5}$.

Méthode

1. a) On utilise la propriété 1.
Ici $a = 3$ et $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) On utilise la propriété 1.
Ici $a = -2$ et $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

2. a) On utilise la propriété 2.
Ici $a = 5$ donc $a > 0$ et $u_n = (1{,}1)^n$.

b) On utilise la propriété 2.
Ici $a = -\frac{1}{2}$ donc $a < 0$ et $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$.

Solution

1. a) $v_n = 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Or $\frac{5}{6} < 1$ donc $\lim \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 0$
d'où $\lim \left[3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = 0$.

b) $v_n = -2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
Or $\frac{4}{5} < 1$ donc $\lim \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 0$
d'où $\lim \left(-2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 0$.

2. a) $v_n = 5 \times (1{,}1)^n$.
Or $1{,}1 > 1$ donc $\lim ((1{,}1)^n) = +\infty$
d'où $\lim [5 \times (1{,}1)^n] = +\infty$.

b) $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$.
Or $\frac{6}{5} > 1$ donc $\lim \left[\left(\frac{6}{5}\right)^n\right] = +\infty$
d'où $\lim \left[-\frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5}\right)^n\right] = -\infty$.

Mise en pratique

3 Déterminez la limite de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q :
1. Si $u_0 = 100$ et $q = 0{,}9$.
2. Si $u_0 = -1\,000$ et $q = 0{,}99$.

4 Déterminez la limite de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q :
1. Si $u_0 = 0{,}1$ et $q = 1{,}1$.
2. Si $u_0 = -\frac{3}{4}$ et $q = \frac{100}{99}$.

5 Déterminez la limite de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison q dans chacun des cas suivants :
1. $q = 0{,}8$.
2. $q = 1{,}2$.
Indication : Discutez suivant le signe de u_0.

OBJECTIF 3 Calculer $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ avec $q \neq 1$

Si $q \neq 1$, $1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

EXERCICE RÉSOLU C

On pose $S_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (S_n).

2. a) Exprimez S_n en fonction de n. **b)** Déduisez-en que, pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant 4$.

3. Déterminez la limite de (S_n).

Méthode

1. Par définition de S_n, on « passe » de S_n à S_{n+1} en ajoutant $\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

2. a) S_n est de la forme $1 + q + \ldots + q^n$ avec $q = \frac{3}{4}$.

3. On sait que, si $\lim (q^n) = 0$ alors, pour tous réels a et b, $\lim (aq^n) = 0$ et $\lim (b - aq^n) = b$.

Solution

1. $S_{n+1} - S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$. Donc pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - S_n > 0$ d'où $S_{n+1} > S_n$.
La suite (S_n) est donc strictement croissante.

2. a) $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$

$= 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$.

Donc $S_n = 4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

b) $4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n < 4$ donc $S_n < 4$.

3. $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $\frac{3}{4} < 1$. Donc :

$\lim \left(3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$ et $\lim \left(4 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 4$.

Commentaires

- La suite (S_n) est une suite strictement croissante dont la limite n'est pas égale à $+\infty$.
- S_n est une somme de $(n + 1)$ termes strictement positifs. Lorsque n tend vers $+\infty$, on peut interpréter la limite de S_n comme une « somme infinie » de termes strictement positifs. Paradoxalement une telle « somme » n'est pas égale à $+\infty$, elle est égale à 4. Dans l'histoire des mathématiques, ce type de situation a perturbé les plus grands mathématiciens.

Mise en pratique

6 On pose $S_n = 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (S_n).

2. Exprimez S_n en fonction de n.

3. Déterminez un réel M tel que pour tout entier naturel n, $S_n < M$.

4. Déterminez la limite de (S_n).

7 On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite S_n.

2. Exprimez S_n en fonction de n.

3. a) Calculez S_3.

b) Montrez que pour tout naturel $n \geqslant 3$, $1{,}875 \leqslant S_n < 2$.

4. Déterminez la limite de (S_n).

8 On pose $S_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (S_n).

2. Exprimez S_n en fonction de n.

3. En utilisant le fait que $\lim q^n = +\infty$ si $q > 1$, déterminez la limite de (S_n).

OBJECTIF 4 Mettre en œuvre un algorithme pour calculer q^n, $0 < q < 1$

Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) a pour limite 0.
Ceci signifie que le nombre q^n se rapproche de 0 aussi près que l'on veut.

EXERCICE RÉSOLU D

1. On pose $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

a) Construisez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} < 10^{-5}$.

b) En utilisant cet algorithme, déterminez le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant 10^{-5}$.

2. On considère plus généralement la suite (q^n) où $0 < q < 1$ et un nombre a strictement positif. Construisez un algorithme permettant, pour chaque valeur de q et de a, de trouver un seuil à partir duquel $q^n < a$.

Méthode

1. a) On utilise le fait que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n$.
La nature de la question incite à utiliser une boucle « tant que ». Voir aussi les rappels d'algorithmique, p. 14.

b) On programme cet algorithme sur une calculatrice ou un ordinateur.

2. Pour écrire un algorithme pouvant être utilisé pour tout nombre q de $]0 ; 1[$ et pour tout nombre a strictement positif, il suffit de faire saisir au début de l'algorithme les valeurs de q et de a correspondant à la situation que l'on veut étudier.

Solution

1. a)

```
Initialisation
N prend la valeur 0
U prend la valeur 1
Traitement
Tant que U > 10^-5
  N prend la valeur N + 1
  U prend la valeur U × 4/5
Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

b) En programmant et en faisant tourner l'algorithme, on obtient $n_0 = 52$.

2.

```
Entrée
Saisir q
Saisir a
Initialisation
N prend la valeur 0
U prend la valeur 1
Traitement
Tant que U ⩾ a
  N prend la valeur N + 1
  U prend la valeur U × q
Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

Mise en pratique

9 On pose $u_n = (0{,}17)^n$.

1. Construisez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-7}$.

2. En utilisant cet algorithme déterminez cet entier n_0.

10 On pose $u_n = (0{,}99)^n$.

1. Construisez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-3}$.

2. En utilisant cet algorithme déterminez cet entier n_0.

OBJECTIF 5 Modéliser une situation à l'aide d'une suite arithmético-géométrique

- Une suite (u_n) est arithmético-géométrique si elle satisfait à une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent deux réels.
- L'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite géométrique.
- Si $\lim (v_n) = 0$ alors pour tout réel a et tout réel b, $\lim (av_n + b) = b$.

EXERCICE RÉSOLU E

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 75 % ainsi que l'apparition d'environ 4 000 nouveaux abonnés.
On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1. Expliquez pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 4\,000$.

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 16\,000 - a_n$.
a) Montrez que la suite (u_n) est une suite géométrique.
b) Pour tout entier naturel n, exprimez u_n en fonction de n, puis a_n en fonction de n.

3. En utilisant le résultat précédent, déterminez la limite de la suite (a_n).

Méthode	Solution
1. Les hypothèses indiquent comment on passe de l'année n à l'année $n + 1$.	**1.** $a_{n+1} = \dfrac{75}{100} a_n + 4\,000$, c'est-à-dire $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 4\,000$.
2. a) On essaie de trouver une relation de la forme $u_{n+1} = ku_n$ où k est un nombre à déterminer.	**2. a)** $u_n = 16\,000 - a_n$ donc $u_{n+1} = 16\,000 - a_{n+1}$. $u_{n+1} = 16\,000 - (0{,}75a_n + 4\,000)$. $u_{n+1} = 12\,000 - 0{,}75a_n$. $u_{n+1} = 12\,000 - 0{,}75\,(16\,000 - u_n) = 0{,}75u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $u_0 = 16\,000 - a_0$ c'est-à-dire $u_0 = 6\,000$.
b) On sait exprimer le terme d'indice n d'une suite géométrique en fonction de n. On en déduit alors une expression de a_n en fonction de n.	**b)** $u_n = u_0q^n = 6\,000 \times (0{,}75)^n$. Or $u_n = 16\,000 - a_n$, donc $a_n = 16\,000 - u_n$, c'est-à-dire $a_n = 16\,000 - 6\,000 \times (0{,}75)^n$.
3. Si $\lim (u_n) = 0$, alors $\lim (au_n + b) = b$.	**3.** $\lim (0{,}75)^n = 0$ car $0{,}75 < 1$. Donc $\lim (a_n) = 16\,000$. Lorsque n devient de plus en plus grand, le nombre d'abonnés devient très voisin de 16 000.

Mise en pratique

11 Une société de crédit propose à ses clients de mettre à leur disposition une somme s de 6 000 € remboursable par des prélèvements mensuels fixes de 300 €. Le taux d'intérêt mensuel annoncé est 1,5 %. On se propose de déterminer le nombre de mois nécessaires au remboursement de cette somme et le montant effectivement payé par chaque client. Si le montant dû le dernier mois est inférieur à 300 €, le client paye le forfait de 300 €.
On pose $u_0 = 6000$ et on appelle u_n le montant restant à rembourser après n prélèvements.

1. Montrez que $u_1 = 6\,000 \times 1{,}015 - 300$.
Calculez u_1, puis u_2.

2. Montrez de manière générale que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (1{,}015)u_n - 300$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 20\,000$.
a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique.
b) Calculez alors v_n, puis u_n en fonction de n.

4. Combien de mois sont-ils nécessaires à l'extinction de la dette ?

Pour se tester

Exercices interactifs

12 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

1. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors $u_n = u_0 \times \ldots\ldots$.

2. Si $q \neq 1$, alors $1 + q + \ldots + q^n = \ldots\ldots$.

3. Si $q > 1$, alors $\lim (q^n) = \ldots\ldots$.

4. Si $0 < q < 1$, alors $\lim (q^n) = \ldots\ldots$.

5. Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = a \times \ldots\ldots + b$.

13 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $q > 0$ et $u_0 > 1$. Alors pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

2. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_5 = 5$. Alors $u_8 = 20$.

3. Si $q \neq 1$, alors $1 + q + q^2 + q^3 = \dfrac{1 - q^5}{1 - q} - q^4$.

4. $\lim \left(\dfrac{2\pi}{7}\right)^n = 0$.

14 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$. Alors $S_{n+1} - S_n$ est égale à :
a) q^n
b) q^{n+1}
c) q^{n-1}.

2. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3}$ est égale à :
a) $1 - \dfrac{1}{2^4}$ **b)** $\dfrac{15}{8}$ **c)** $\dfrac{1 - \dfrac{1}{2^4}}{2}$.

3. E désigne l'ensemble des nombres a strictement positifs tels que $\lim \left(\dfrac{a}{\pi}\right)^n = 0$. Alors
a) $E = [3\,;+\infty[$
b) $E =]\pi\,;+\infty[$
c) $E =]0\,;\pi[$.

15 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 2 alors :
a) $u_n = 2^{n+1}$ **b)** $u_n = 2^n$ **c)** $u_n = 2 \times 2^n$.

2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$ est égal à :
a) $u_0(1 + q + \ldots + q^{10})$ **b)** $u_0\dfrac{1 - q^{11}}{1 - q}$ **c)** $\dfrac{16 - u_{10}}{1 - q}$.

3. La suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$:
a) est géométrique
b) est arithmétique
c) a pour raison $\dfrac{2}{3}$.

Voir les corrigés p. 361

EXERCICES

TRAVAUX DIRIGÉS

Utiliser un tableur

→ Pour calculer les termes d'une suite arithmético-géométrique

16 Calcul des mensualités fixes lors de la réalisation d'un emprunt

A Étude d'un exemple

Monsieur X emprunte 10 000 € au taux mensuel de 0,5 % et il désire rembourser en 48 mensualités fixes m. À la fin de chaque mois les intérêts sont calculés sur le capital restant à rembourser et ajoutés à ce capital.

La première mensualité interviendra un mois après la réalisation du prêt. Avant le paiement de cette première mensualité le capital à rembourser sera donc égal à $10\,000 \times 1{,}005$.

On note u_0 le capital emprunté, donc ici $u_0 = 10\,000$.

On note u_1 le capital restant dû par Monsieur X au bout d'un mois, après le versement de la 1[re] mensualité, u_2 le capital restant dû au bout de deux mois après le versement de la 2[e] mensualité, …, u_n le capital restant dû après le versement de la nième mensualité.

1. a) Expliquez pourquoi $u_1 = u_0 \times (1 + 0{,}005) - m$.

b) Expliquez pourquoi pour tout n entier naturel tel que $n \leqslant 47$, $u_{n+1} = u_n \times (1 + 0{,}005) - m$.

c) Expliquez pourquoi $u_{48} = 0$.

2. a) On pose $v_n = u_n - \dfrac{m}{0{,}005}$. Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,005 et exprimez v_n en fonction de n, de u_0 et de m.

b) Montrez que $u_n = (1{,}005)^n u_0 + m\left(\dfrac{1-(1{,}005)^n}{0{,}005}\right)$.

c) Montrez que $m = \dfrac{u_0 \times (1+0{,}005)^{48} \times 0{,}005}{(1{,}005)^{48} - 1}$ puis calculez m.

B Utilisation d'un tableur

On va voir à présent comment construire, à l'aide d'un tableur, un tableau générique (appelé tableau d'amortissement) permettant d'étudier n'importe quelle situation de prêt.

Ce tableau permet de calculer le montant de la mensualité et de déterminer, pour chaque mois, le montant restant à rembourser, et la part de capital et d'intérêts dans la mensualité.

Les paramètres du prêt (montant, taux, durée) sont saisis sur la première ligne du tableau dans les cellules B1, D1, F1. Le montant de la mensualité correspondante est calculé en cellule C3.

Les formules pour calculer les informations du mois 1 étant saisies sur la ligne 7, il suffit pour obtenir le tableau complet de recopier vers le bas ces formules.

C3 =(B1*D1*(1+D1)^F1)/(-1+(1+D1)^F1)

	A	B	C	D	E	F
1	Montant	10000	Taux	0,50%	Durée	48
2						
3		Mensualité	234,85			
4						
5	Mois	Capital restant	Part capital	Intérêts		
6	0	10000				
7	1	9815,15	184,85	50,00		
8	2	9629,38	185,77	49,08		
9	3	9442,67	186,70	48,15		
10	4	9255,03	187,64	47,21		
11	5	9066,46	188,58	46,28		
12	6	8876,94	189,52	45,33		
13	7	8686,48	190,47	44,38		
14	8	8495,06	191,42	43,43		
15	9	8302,68	192,37	42,48		
16	10	8109,35	193,34	41,51		
17	11	7915,04	194,30	40,55		
18	12	7719,77	195,28	39,58		

1. On a saisi dans la cellule C3 la formule =(B1*D1*(1+D1)^F1)/(–1+(1+D1)^F1). Justifiez cette formule.

2. Justifiez les formules suivantes, saisies respectivement dans les cellules B6, B7, C7 et D7 :

- «=B1»
- «=B6*(1+D$1)–C$3»
- «=B6-B7»
- «=C$3–C7»

3. À l'aide d'un tableur, reproduisez le tableau et faites calculer le coût total du crédit, c'est-à-dire la somme des intérêts.

4. Faites afficher les caractéristiques des prêts suivants :

a) 100 000 euros au taux mensuel de 0,3 % sur 120 mois.

b) 150 000 euros au taux mensuel de 0,35 % sur 300 mois.

EXERCICES

TRAVAUX DIRIGÉS

Utiliser sa calculatrice

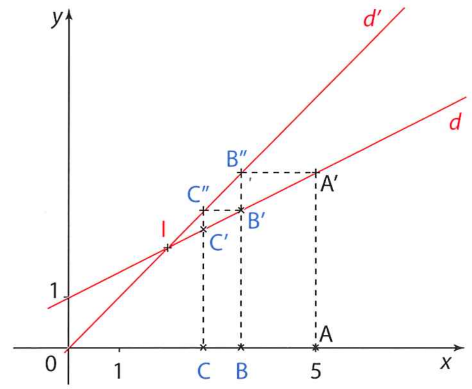
→ Pour conjecturer la limite d'une suite

17 Suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$

A Limite de (u_n) : comment conjecturer

1. 1[re] méthode : graphiquement

Sur le graphique ci-contre sont représentées les droites d d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et d' d'équation $y = x$.



a) Déterminez les coordonnées du point I intersection de d et d'.

b) A est le point de coordonnées $(u_0 ; 0)$ c'est-à-dire $(5 ; 0)$.

Expliquez pourquoi les points A′, B″, B′, B, C″, C′, C ont pour coordonnées respectives $(u_0 ; u_1)$, $(u_1 ; u_1)$; $(u_1 ; u_2)$; $(u_1 ; 0)$; $(u_2 ; u_2)$; $(u_2 ; u_3)$; $(u_2 ; 0)$.

c) En utilisant le même principe de construction, déterminez une valeur approchée de u_4.

d) En observant le graphique, conjecturez la limite de la suite (u_n).

2. 2[e] méthode : avec la calculatrice

a) Tapez sur votre calculatrice les instructions suivantes :

TI	5 Enter 1 ÷ 2 × 2nd ANS + 1 Enter
Casio	5 EXE 1 ÷ 2 × Shift ANS + 1 EXE

Vous obtenez 3,5.

À chaque appui sur Enter ou EXE la calculatrice va reproduire la dernière séquence de calcul (accolades) à partir du dernier résultat obtenu.

Expliquez pourquoi on obtient ainsi à chaque appui sur Enter ou EXE les termes successifs de la suite (u_n).

b) Faites afficher les trois premiers termes de la suite (u_n).

c) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

B Une démonstration à présent

Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrez que cette suite (v_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$.

2. a) Exprimez v_n en fonction de n.

b) Déduisez-en une expression de u_n en fonction de n.

c) Retrouvez alors le résultat conjecturé précédemment, c'est-à-dire : $\lim (u_n) = 2$.

Entraînement

DE TÊTE

18 (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_{10} = 16$.

a) Calculez u_{11}.

b) Calculez u_8.

19 (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $u_{25} = 90$ et $u_{24} = 30$.
Calculez q.

20 On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 10$.
Expliquez pourquoi (u_n) n'est pas géométrique.

21 On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_5 = 3$ et $u_6 = 6$. Calculez u_7 et u_8.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

22 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 5n^2 + 3n$.

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Calculez u_{100}.

3. Calculez le centième terme de la suite.

4. Exprimez u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n.

23 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 2^n + 3n$.

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Calculez le dixième terme de la suite.

3. Exprimez u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n.

24 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = n^2 + 4n - 1$.

1. Calculez les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Représentez les quatre premiers termes de la suite dans un repère.

3. Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

25 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 5}{2}$.

1. Donnez les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Représentez les cinq premiers termes de la suite dans un repère.

26 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Donnez les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Représentez les cinq premiers termes de la suite dans un repère.

27 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 2$ et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + n + 1. \end{cases}$$

1. Donnez les trois premiers termes de la suite (u_n) et les trois premiers termes de la suite (v_n).

2. Jean pense que les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Jean a-t-il raison ou tort ?

Pour les exercices 28 à 30

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

28 $r = 3$ et $u_0 = -5$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Calculez u_{50}.

29 $u_0 = 5$ et $u_1 = 9$.

1. Calculez r.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Calculez u_{100}.

30 $u_0 = 2$ et $u_3 = -4$.

1. Calculez r.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Calculez u_{10}.

Pour les exercices 31 à 34

Étudiez le sens de variation de la suite (u_n)

31 (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 7$.

32 (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

33 (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

34 (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 15$.

ÉTUDE DE SUITES GÉOMÉTRIQUES

Pour les exercices 35 à 40

Expliquez pourquoi la suite (u_n) est géométrique.

35 **a)** (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times \dfrac{2^n}{3^n}$.

b) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{5^n}{2^n}$.

36 **a)** (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

b) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$.

37 **a)** (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5^n \times 3^n$.

b) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n \times 3^{n+1}$.

38 **a)** (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2^n} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

b) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{3^n} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$.

39 **a)** (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout naturel n, $2u_{n+1} = 3u_n$.

b) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout naturel n, $5u_{n+1} = -2u_n$.

40 **a)** (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour tout naturel n, $-u_{n+1} = 2u_n$.

b) (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout naturel n, $\dfrac{3u_{n+1}}{4} = \dfrac{2u_n}{5}$.

Pour les exercices 41 à 46

On donne les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 d'une suite (u_n). Indiquez si (u_n) peut être une suite géométrique.

41 $u_0 = 3\,;\ u_1 = 5\,;\ u_2 = \dfrac{25}{3}$.

42 $u_0 = 1\,;\ u_1 = \sqrt{2}\,;\ u_2 = 2\sqrt{2}$.

43 $u_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\ u_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\,;\ u_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{6}$.

44 $u_0 = \sqrt{2} - 1\,;\ u_1 = 1\,;\ u_2 = \sqrt{2} + 1$.

45 $u_0 = -5\,;\ u_1 = 20\,;\ u_2 = -80$.

46 $u_0 = 7\,;\ u_1 = -42\,;\ u_2 = 246$.

47 (u_n) est une suite géométrique de raison q positive. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = 50$.

1. Calculez u_1.

2. Exprimez (u_n) en fonction de n.

48 (u_n) est une suite géométrique de raison q. On sait que $u_0 = -1$ et $u_3 = -27$.

1. Calculez q, u_1 et u_2.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Calculez le 10^e terme de cette suite.

4. Calculez u_{10}.

49 (u_n) est une suite géométrique de raison q. On sait que $u_0 = -2$ et $u_3 = 250$.

1. Calculez q, u_1 et u_2.

2. Exprimez u_n en fonction de n.

3. Calculez le 7^e terme de cette suite.

4. Calculez u_7.

50 (u_n) est une suite géométrique de raison q négative. On sait que $u_0 = 7$ et $u_2 = 63$.

1. Calculez u_1.

2. Exprimez (u_n) en fonction de n.

Pour les exercices 51 et 52

Donnez le sens de variation de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q.

51 **a)** $u_0 = 2$ et $q = 3$.

b) $u_0 = -3$ et $q = 2$.

52 **a)** $u_0 = 5$ et $q = \dfrac{1}{3}$.

b) $u_0 = -7$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

Pour les exercices 53 à 55

(u_n) est une suite géométrique. Donnez son sens de variation en justifiant votre réponse.

53 **a)** $u_0 = 5\,;\ u_1 = 15$.

b) $u_0 = \dfrac{1}{4}\,;\ u_1 = \dfrac{3}{4}$.

54 **a)** $u_0 = 10\,;\ u_1 = 5$.

b) $u_0 = \dfrac{1}{3}\,;\ u_1 = \dfrac{1}{6}$.

55 **a)** $u_0 = -5\,;\ u_1 = -1$.

b) $u_0 = -\dfrac{1}{3}\,;\ u_1 = -\dfrac{2}{3}$.

56 **Désintégration**

Lors de la catastrophe nucléaire de Fukushima, de grandes quantités d'iode 131 et de césium 137, substances radioactives nocives, ont été relâchées dans l'atmosphère.

Les demi-vies de ces substances sont respectivement de 8 jours pour l'iode 131 et de 30 ans pour le césium 137.

On appelle demi-vie d'une substance radioactive la durée au bout de laquelle la moitié de la substance a été détruite par désintégration.

1. On note u_0 la quantité d'iode 131 émise lors de la catastrophe, u_1 la quantité restante au bout d'une durée

EXERCICES

égale à une demi-vie, u_2 la quantité restante au bout d'une durée égale à deux demi-vies, …, u_n la quantité restante au bout d'une durée égale à n demi-vies.

a) Montrez que l'on définit ainsi une suite géométrique dont on donnera la raison q.

b) Exprimez u_n en fonction de u_0 et de q.

2. a) Déterminez le plus petit réel n_0 tel que $u_{n_0} < \frac{u_0}{100}$.

b) Déterminez la durée au bout de laquelle la quantité résiduelle d'iode 131 devient inférieure à 1 % de la quantité émise lors de la catastrophe.

3. On note v_0 la quantité de césium 137 émise lors de la catastrophe, v_1 la quantité restante au bout d'une durée égale à une demi-vie, v_2 la quantité restante au bout d'une durée égale à deux demi-vies, …, v_n la quantité restante au bout d'une durée égale à n demi-vies.

a) Montrez que l'on définit ainsi une suite géométrique dont on donnera la raison q.

b) Exprimez v_n en fonction de v_0 et de q.

4. Déterminez la durée au bout de laquelle la quantité résiduelle de Césium 137 devient inférieure à 1 % de la quantité émise lors de la catastrophe.

Maths et vie quotidienne **Une pollution durable**

Lors d'un accident nucléaire grave, comme celui survenu à Fukushima en 2011, il peut arriver que des substances radioactives soient répandues dans l'environnement. On parle alors de contamination radioactive.
La dégradation spontanée des substances radioactives est un processus lent, qui peut prendre plusieurs dizaines d'années : c'est pour cela que les zones avoisinant les sites d'accidents nucléaires restent polluées – et donc « interdites » – pour de nombreuses années.

57 Bande de papier

On dispose d'une feuille de papier de 30 cm de long.
On la coupe dans le sens de la longueur et l'on fixe bout à bout les deux parties obtenues pour former une bande de 60 cm de long.
On recommence cette manipulation pour obtenir une nouvelle bande de 120 cm de long, etc.
On note $u_0 = 30$, u_1 la longueur après la première manipulation, u_2 la longueur après la deuxième manipulation, u_n la longueur après la n-ième manipulation.

1. Déterminez u_3, u_4.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. En supposant que cela soit possible, combien de manipulations faudra-t-il effectuer pour obtenir une bande de plus de 10 km de long ?

58 Économies

Louis a placé un capital de 10 000 euros le 1er janvier 2010 au taux annuel de 4 %. À la fin de chaque année les intérêts sont capitalisés et rajoutés au capital. On suppose que Louis n'effectue pas de retrait avant le 1er janvier 2020.
On note $u_0 = 10\,000$, u_1 le capital au 1er janvier 2011, …, u_n le capital au 1er janvier 2010 + n.

1. Calculez u_1, u_2, u_3.

2. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Exprimez u_n en fonction de n.

3. De quelle somme disposera Louis au 1er janvier 2020 ?

59 Poids d'une larve

On note p_n le poids en milligrammes d'une larve de ténébrion meunier (ou ver de farine) en fonction de son âge n mesuré en semaines. On note p_0 le poids de naissance.
Le taux d'accroissement du poids d'une semaine à la suivante vérifie $\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = \frac{9}{10}$.

1. Montrez que la suite (p_n) est une suite géométrique.

2. Exprimez p_n en fonction de p_0 et de n.

3. Au bout de combien de semaines le poids de la larve aura-t-il été multiplié par 50 ?

60 Pression atmosphérique

Le pression atmosphérique est la force exercée par la couche d'air qui se trouve à la verticale du point d'observation : lorsque l'altitude augmente, la pression atmosphérique diminue. On admet que la mesure de la pression atmosphérique diminue de 1 % à chaque fois que l'on s'élève de 100 m.
On note p_0 la pression au niveau de la mer et p_n la pression à l'altitude $(100n)$ mètres.

1. a) Montrez que l'on définit ainsi une suite géométrique et précisez sa raison q.

b) Exprimez p_n en fonction de p_0 et de q.

2. Dans cette question $p_0 = 1\,013$ hPa.

a) Quelle est la pression à 1 000 mètres d'altitude ?

b) Si la pression observée est égale à 900 hPa, quelle est l'altitude de l'observateur ?

Pour les exercices 61 à 65

Expliquez pourquoi les algorithmes proposés permettent de faire afficher un terme d'une suite géométrique dont le premier terme est donné par l'initialisation. Donnez la valeur et l'indice du terme affiché.

61

```
Initialisation
U prend la valeur 2
Traitement
Pour i variant de 1 à 3
   Donner à U la valeur 3/2 U
Fin Pour
Sortie
Afficher U
```

62

```
Initialisation
U prend la valeur -3
Traitement
Pour i variant de 1 à 5
   Donner à U la valeur 4/3 U
Fin Pour
Sortie
Afficher U
```

63

```
VARIABLES
 ├ i EST_DU_TYPE NOMBRE
 ├ U EST_DU_TYPE NOMBRE
 └ N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
 ├ N PREND_LA_VALEUR 4
 ├ U PREND_LA_VALEUR 10
 ├ POUR i ALLANT_DE 1 A N
 │  ├ DEBUT_POUR
 │  ├ U PREND_LA_VALEUR 2*U
 │  └ FIN_POUR
 └ AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

64

```
Initialisation
U prend la valeur 5
Traitement
Tant que U < 100
   Donner à U la valeur 2U
Fin Tant Que
Sortie
Afficher U
```

65

```
VARIABLES
 └ U EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
 ├ U PREND_LA_VALEUR 4
 ├ TANT_QUE (U>0.1) FAIRE
 │  ├ DEBUT_TANT_QUE
 │  ├ U PREND_LA_VALEUR 0.5*U
 │  └ FIN_TANT_QUE
 └ AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

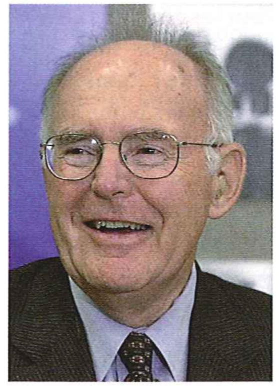
66 Transistors et microprocesseurs

Le premier microprocesseur, baptisé Intel 4004, intégrait en 1971, 2 300 transistors.
En 1975 Gordon Moore a prédit que le nombre de transistors intégrés dans un microprocesseur devait doubler tous les deux ans. Cette prédiction s'est parfaitement vérifiée de 1971 à 2003.

1. On note $u_0 = 2300$, u_1 le nombre de transistors contenus dans un microprocesseur en 1973, u_2 ce nombre en 1975, u_3 en 1977, etc.
Montrez que l'on définit ainsi une suite géométrique finie dont on donnera la raison.

2. Donnez le nombre de transistors contenus dans un microprocesseur en 2003.

Maths et technologie **La loi de Moore**



Gordon Moore est l'un des co-fondateurs d'Intel. Quelques années après l'invention du premier microprocesseur en 1971, il énonça la version la plus connue de la loi qui porte son nom : le nombre de transistors contenus dans un microprocesseur double tous les deux ans. Cette croissance exponentielle a un impact direct sur l'augmentation de la puissance et sur la diminution du prix de revient des microprocesseurs.
Bien qu'elle soit empirique, la loi de Moore s'est révélée étonnamment exacte entre 1973 et 2003. Depuis 2003, le rythme de croissance du nombre de transistors s'est légèrement ralenti.

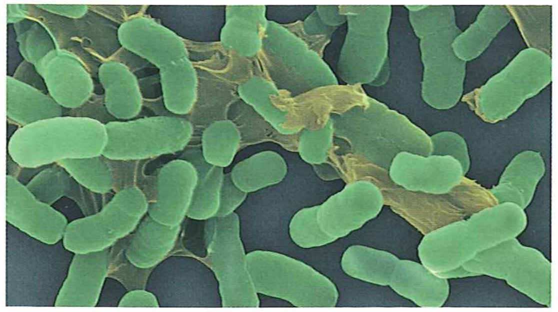
67 Bactéries

Dans un milieu riche et à température ambiante de 37 °C, la bactérie Escherichia Coli se reproduit par scissiparité toutes les vingt minutes, c'est-à-dire qu'elle se partage en deux bactéries identiques à la bactérie mère.
Par conséquent, s'il y a une bactérie à un instant 0, au bout de vingt minutes il y a deux bactéries, puis quatre au bout de quarante minutes, et ainsi de suite.
On note u_0 le nombre de bactéries à l'instant 0, u_1 le nombre de bactéries au bout de vingt minutes, u_2 le nombre de bactéries au bout de quarante minutes, etc.
On suppose le milieu suffisamment riche pour que le processus se prolonge pendant au moins 10 heures.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. Si $u_0 = 1$, quel est le nombre de bactéries au bout d'une heure ? Au bout de deux heures ?

3. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries dépassera-t-il 1 000 000 ?



SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Pour les exercices 68 à 72

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Calculez la somme S des 10 premiers termes.

68 $u_0 = 100$ et $q = \frac{1}{2}$.

69 $u_0 = 3$ et $q = 5$.

70 $u_0 = \frac{1}{31}$ et $q = \sqrt{2}$.

71 $u_0 = -3$ et $q = \frac{1}{3}$.

72 $u_0 = 5$ et $q = -3$.

Pour les exercices 73 à 76

Écrivez, sans utiliser votre calculatrice, les sommes suivantes sous forme d'un quotient de deux entiers.

73 $S = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

74 $S = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 + 27 + 81$.

75 $S = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + 1 + 5 + 25 + 125 + 625$.

76 $S = 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$.

Pour les exercices 77 et 78

(u_n) est une suite géométrique, déterminez n.

77 $u_0 = 1$; $q = 2$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 63$.

78 $u_0 = 2$; $q = 3$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 2\,186$.

79 ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
N est un entier naturel
Initialisation
P prend la valeur 0
U prend la valeur 4
S prend la valeur 4
Traitement
Tant que P < N
  Donner à P la valeur P+1
  Donner à U la valeur U×3
  Donner à S la valeur S+U
Fin Tant Que
Sortie
Afficher S
```

1. Pour N = 5, faites apparaître les différentes étapes du déroulement de l'algorithme dans un tableau comme ci-dessous :

	Valeur de P	Valeur de U	Valeur de S
Initialisation	0	4	4
Étape 1	1		
Étape 2	2		
⋮			
Affichage			

2. Expliquez pourquoi le nombre S affiché est égal à la somme des six premiers termes d'une suite géométrique (u_n) que l'on précisera.

3. En vous inspirant de l'algorithme précédent construisez un algorithme permettant d'obtenir la somme des vingt premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 2.

Pour les exercices 80 à 82

Expliquez pourquoi les algorithmes proposés permettent de faire afficher la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. Indiquez le premier terme de cette somme, son dernier terme et le nombre de termes. Donnez la valeur de la somme affichée à la fin de l'algorithme.

80

```
Initialisation
U prend la valeur 3
S prend la valeur 0
Traitement
Pour i variant de 1 à 4
  S prend la valeur S+U
  U prend la valeur U×5
Fin Pour
Sortie
Afficher S
```

81

```
Initialisation
U prend la valeur 8
S prend la valeur 8
Traitement
Pour i variant de 1 à 4
  U prend la valeur U×3/2
  S prend la valeur S+U
Fin Pour
Sortie
Afficher S
```

82

```
Initialisation
U prend la valeur 3
S prend la valeur 0
Traitement
Tant que S < 100
  S prend la valeur S+U
  U prend la valeur U×2
Fin Tant Que
Sortie
Afficher S
```

LIMITES

Pour les exercices 83 à 85

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
Précisez sa limite.

83 a) $q = 10$. b) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

84 a) $q = \frac{\pi}{3}$. b) $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

85 a) $q = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}$. b) $q = \frac{3}{4} + \frac{3}{11}$.

Pour les exercices 86 à 88

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Précisez sa limite.

86 $u_0 = -2$ et $q = 1{,}1$.

87 $u_0 = -5$ et $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

88 $u_0 = 10^{10}$ et $q = 0{,}99$.

Pour les exercices 89 à 93

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Expliquez pourquoi la suite (S_n) est strictement croissante et donnez sa limite.

89 a) $q = \frac{1}{2}$. b) $q = \frac{1}{3}$.

90 a) $q = 0{,}1$. b) $q = 0{,}9$.

91 a) $q = \frac{4}{7}$. b) $q = \frac{9}{11}$.

92 a) $q = 1{,}1$. b) $q = 3$.

93 a) $q = \frac{4}{3}$. b) $q = \frac{\pi}{3}$.

94 (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 90$ et de raison q.

1. Exprimez $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n et de q.

2. Déterminez la raison de la suite (u_n) si S_n a pour limite 150.

95 **Écriture décimale**

On sait que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est soit finie, soit périodique à partir d'un certain rang.
Par exemple, $\frac{15}{4} = 3{,}75$: écriture décimale finie; et $\frac{15}{11} = 1{,}\mathbf{36\ 36\ 36}\ldots$: écriture décimale illimitée avec une période de longueur 2. Réciproquement toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang est l'écriture décimale d'un nombre rationnel.
Par conséquent, 3,236 236 236… avec une période de longueur 3 est l'écriture décimale d'un nombre rationnel.
On veut retrouver ce rationnel r.

1. Justifiez que $r = 3 + 236 \times 10^{-3} + 236 \times 10^{-6} + 236 \times 10^{-9} + \ldots$

2. On pose $u_1 = 236 \times 10^{-3}$, $u_2 = 236 \times 10^{-6}$, $u_3 = 236 \times 10^{-9}$, …
Montrez que la suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

3. Exprimez $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

4. Déterminez la limite de (S_n).

5. Donnez l'écriture fractionnaire de r.

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

96 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n - 3$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. Exprimez u_n en fonction de n.

4. Déterminez la limite de la suite (u_n).

97 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n - 8$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. a) Exprimez u_n en fonction de n.

b) Calculez u_{10}.

4. Déterminez la limite de la suite (u_n).

98 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n + a$.

a) Montrez que $v_{n+1} = 3u_n + 5 + a$.

b) Montrez que $v_{n+1} = 3v_n + 5 - 2a$.

c) Pour quelle valeur de a, la suite (v_n) est-elle géométrique ?

3. On pose $a = \frac{5}{2}$.

a) Exprimez v_n en fonction de n.

b) Exprimez u_n en fonction de n.

c) Calculez u_{10}.

99 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 6$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n + a$.

a) Montrez que $v_{n+1} = -2u_n + 6 + a$.

b) Montrez que $v_{n+1} = -2v_n + 6 + 3a$.

c) Pour quelle valeur de a la suite (v_n) est-elle géométrique ?

3. On pose $a = -2$.

a) Exprimez v_n en fonction de n.

b) Exprimez u_n en fonction de n.

c) Calculez u_{15}.

100 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 15$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3.

2. On pose $v_n = u_n - 10$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

c) Calculez $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

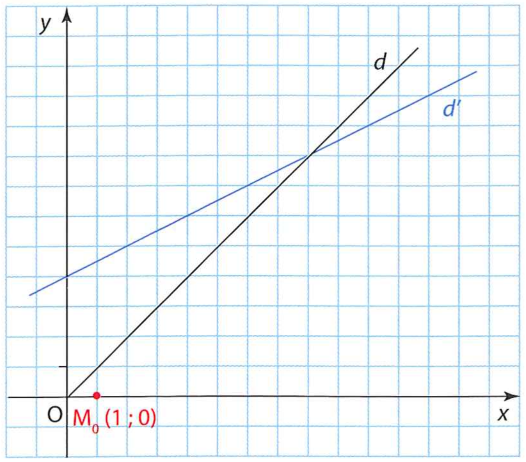
3. a) Exprimez u_n en fonction de n.

b) Calculez $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

c) Déterminez la limite de la suite (S_n).

101 Sur le graphique ci-dessous on a construit les droites d et d' d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$ et le point M_0 (1 ; 0).
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.
Utilisez le graphique pour construire, sans calcul les points M_1, M_2, M_3 de l'axe des abscisses, d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

Note Se reporter au TD « Utiliser sa calculatrice », p. 33.



102 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et par tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{3}$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 4}{3}.$$

a) Tracez la représentation graphique d de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b) En utilisant d et Δ, construisez u_1, u_2 et u_3.

Note Se reporter au TD « Utiliser sa calculatrice », p. 33.

c) Conjecturez $\lim (u_n)$ à l'aide de la construction, que l'on peut imaginer, d'un grand nombre de termes de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 4.$$

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimez v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Déterminez la limite de la suite (u_n).

103 **BAC** **Gymnastique**

Dans un village, l'association de gymnastique comptait 50 adhérents en 2006.
Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année 2006 + n.
On a donc $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 18$ pour tout entier naturel n.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geqslant 0$.

a) Montrez que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $a_n = 120 - 70 \times 0{,}85^n$.

c) Étudiez le sens de variation de la suite (a_n).

d) Montrez que pour $n \geqslant 20$, $117 \leqslant a_n < 120$. Interprétez ce résultat.

2. Chaque année, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40 % pour deux heures de gymnastique.

a) Exprimez en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique à prévoir par semaine pour l'an 2006 + n.

b) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrez qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0{,}85^n < 8$.
Résoudre cette inéquation et conclure.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

104 **BAC** **Vente de magazines**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8.$$

1. Sur une feuille de papier millimétré, construire un repère orthonormé (unité : 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.

a) Dans ce repère, tracez les droites d'équations respectives :

$$y = 0{,}85x + 1{,}8 \quad \text{et} \quad y = x.$$

b) Dans ce repère, placez u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparents les traits de construction.

c) À l'aide du graphique, conjecturez la limite de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.

a) Démontrez que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimez pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n,
$u_n = 12 - 4 \times 0{,}85^n$.

c) Étudiez le sens de variation de la suite (v_n), puis celui de la suite (u_n).

d) Déterminez la limite de la suite (u_n).

e) Montrez que pour $n > 8$, on a $10 < u_n < 12$.

3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement.
On a constaté que :
– il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
– d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.
En 2010 il y avait 8 000 abonnés.

a) Montrez que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en (2010 + n).

b) En utilisant la question **2.b)**, calculez une estimation du nombre d'abonnés en 2020.

105 **BAC** **Réduction de l'empreinte écologique**

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2010, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit

EXERCICES

par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2010 + n)$.
On a donc $r_0 = 40\,000$.

1. a) Calculez r_1 et r_2.

b) Justifiez que pour tout entier n naturel, on a $r_{n+1} = 0{,}95 r_n + 200$.

2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4\,000$.

a) Démontrez que la suite (s_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Pour tout entier naturel n, exprimez s_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$r_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000.$$

c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifiez.

d) Déterminez la limite de la suite (r_n).

e) Calculez une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2015.

3. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?

106 BAC Croissance et rentabilité

Les résultats numériques seront donnés arrondis à l'unité.
En janvier 2012, un artisan a réalisé une recette de 2 300 euros alors que ses coûts se sont élevés à 800 euros. Son bénéfice est donc de 1 500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, la recette, c'est-à-dire le chiffre d'affaires de cet artisan, augmente de 1 % tous les mois.
Cependant les coûts, c'est-à-dire les frais, augmentent pendant le même temps de 2,5 %.

1. Recopiez et complétez le tableau suivant :

	Janvier 2012	Février 2012	Mars 2012
Rang du mois	0	1	2
Recette	2 300		
Coûts	800		
Bénéfice	1 500		

2. Pour le mois de rang n, avec n entier naturel, on note R_n le montant de la recette, C_n le montant des coûts et B_n le montant du bénéfice.

a) Exprimez R_n et C_n en fonction de n ; justifiez votre réponse.

b) Montrez que $B_n = 2\,300\,(1{,}01)^n - 800\,(1{,}025)^n$.

3. Pour étudier le sens de variation de la suite (B_n), on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$.

a) Établissez que, pour tout entier positif n :

$$B_{n+1} - B_n = 23\,(1{,}01)^n - 20\,(1{,}025)^n.$$

b) Établissez que :

$$23\,(1{,}01)^n - 20\,(1{,}025)^n > 0 \text{ équivaut à } \left(\frac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n < \frac{23}{20}.$$

En déduire les valeurs de n telles que l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifiée. Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

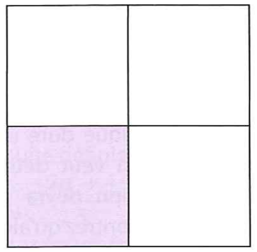
4. Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

107 Coloriage

On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 dm.

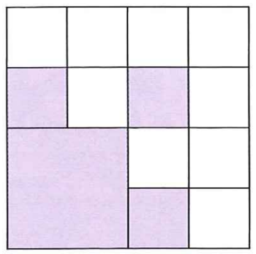
Première étape du coloriage

On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé. Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en dm², de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi $A_1 = 1$.

La surface coloriée sur la figure à la 2e étape du coloriage a donc pour aire A_2.
Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

A. Avec un algorithme

1. Calculez A_2 puis montrez que $A_3 = \frac{37}{16}$.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
P un entier naturel non nul.
Initialisation
N = 1; U = 1.
Traitement
Tant que N ≤ P
  Afficher U
  Affecter à N la valeur N+1
  Affecter à U la valeur 5/4×U+1/2
Fin Tant Que
```

a) Faites fonctionner cet algorithme avec P = 3.

b) Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite de terme général U_n.
Dites si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifiez la réponse.
Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n = A_n$.
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = A_n$.

B. Démonstration

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \frac{3}{4} A_n + 1$.

1. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.

a) Calculez B_1.

b) Montrez que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \frac{3}{4} B_n$.

c) Quelle est la nature de la suite (B_n) ?

d) Exprimez, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

2. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifiez la réponse. Donnez une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

108 Oscillateur de Samuelson

En économie, on désigne par R_n le revenu national la n-ième année suivant une année de référence. Ce revenu se répartit en une consommation directe C_n et l'investissement $I_n = R_n - C_n$. La consommation dépend du revenu, mais avec retard d'une période :

$$C_n = aR_{n-1} + b \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

L'investissement est réalisé pour répondre à l'accroissement de la consommation totale, on supposera qu'il y a proportionnalité et qu'il y a un délai de réponse d'une période entre la variation du revenu et la réalisation de l'investissement :

$$I_n = c(R_{n-1} - R_{n-2}).$$

1. Montrez que $R_n = (a + c)R_{n-1} - cR_{n-2} + b$.

2. Dans cette question $a = 1$, $b = 0$.

a) Montrez que la suite (R_n) vérifie pour tout naturel n $(n \geqslant 2)$:

$$R_{n+2} - R_{n+1} = c(R_{n+1} - R_n) \text{ et } R_{n+2} - cR_{n+1} = R_{n+1} - cR_n.$$

b) On pose $u_n = R_{n+1} - R_n$.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c) Exprimez u_n en fonction de c, de n et de u_0 puis $R_{n+1} - R_n$ en fonction de c, de n, de $R_1 - R_0$.

d) On pose $v_n = R_{n+1} - cR_n$. Montrez que (v_n) est une suite constante.

e) Calculez $u_n - v_n$ et déduisez-en que :

$$R_n = \frac{1}{1-c}\left[(R_1 - cR_0) - c^n (R_1 - R_0)\right].$$

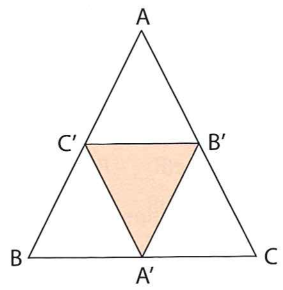
3. On garde dans cette question les conditions du **2.** c'est-à-dire $a = 1$ et $b = 0$ et on pose $R_0 = 100$ et $R_1 = 110$.
À l'aide d'un tableur, faites afficher dans la colonne A les valeurs de n (0, 1, 2, …) et dans la colonne B les valeurs de la suite (R_n) pour $c = \frac{1}{4}$.

Maths et économie — Paul Samuelson

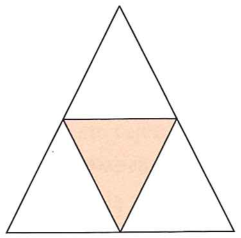
Paul Samuelson (1915-2009) est un économiste américain. Formé à l'université de Chicago puis à Harvard, il est considéré comme l'un des fondateurs de la « synthèse néo-classique » cherchant à expliquer les phénomènes macro-économiques par la micro-économie. Ses travaux touchent de nombreux aspects du champ de l'économie, notamment l'inflation, la modélisation des cycles économiques, le commerce international et les dépenses publiques.
Samuelson a obtenu le prix Nobel d'économie en 1970 pour sa contribution au développement de la discipline.

109 Triangle de Sierpinski

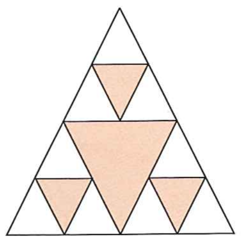
On se propose d'étudier les propriétés de la figure construite selon l'algorithme suivant.
1re étape : On considère un triangle équilatéral ABC d'aire égale à 1. On note A′, B′, C′ les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].



En traçant les segments [A'C'], [C'B'] et [B'A'] on obtient quatre triangles équilatéraux AC'B', C'BA', A'CB' et A'B'C'. On colorie en rouge le triangle central A'B'C'.



2e étape : Pour chaque triangle non colorié on procède de la même manière que pour la première étape.
On obtient la figure suivante :



On poursuit le processus : plus précisément à chaque étape pour chaque triangle non colorié on procède de la même manière que pour la première étape.
On va étudier l'évolution du nombre de triangles coloriés et de triangles non coloriés ainsi que l'évolution de l'aire des surfaces coloriées et non coloriées.

1. On note $u_0 = 1$, puis u_1 le nombre de triangles non coloriés après une étape, u_2 le nombre de triangles non coloriés après deux étapes, …, u_n le nombre de triangles non coloriés après n étapes.

a) Montrez que l'on définit ainsi une suite géométrique.

b) Exprimez u_n en fonction de n.

2. On note $v_0 = 0$, puis v_1 le nombre de triangles coloriés après une étape, v_2 le nombre de triangles coloriés après deux étapes, …, v_n le nombre de triangles coloriés après n étapes.

a) Expliquez pourquoi $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. Étudiez la limite de la suite (u_n) puis de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On note $w_0 = 1$ puis w_1 l'aire de la surface non coloriée après la première étape, w_2 l'aire de la surface non coloriée après la deuxième étape, …, w_n l'aire de la surface non coloriée après la n-ième étape.

a) Expliquez pourquoi (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b) Étudiez la limite de la suite (w_n), quand n tend vers $+\infty$.

Paradoxe
On obtient, à l'aide de la construction précédente, une surface non coloriée composée d'un nombre de triangles qui tend vers l'infini et dont l'aire tend vers 0.

Maths et vie quotidienne — **Les fractales**

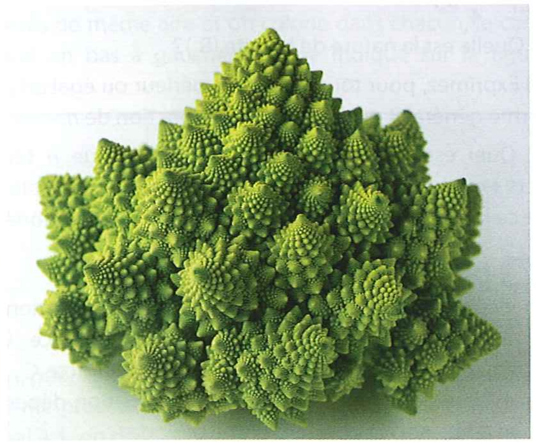
Le triangle de Sierpinski (ci-contre) et le flocon de Von Koch (page suivante) sont deux exemples de figures fractales.

Le mathématicien Benoit Mandelbrot (1924-2010) est surtout connu pour ses travaux sur ces figures géométriques, qui semblent se répéter à l'infini.

On dit que leur structure est invariante par changement d'échelle.

Mandelbrot a utilisé l'outil informatique pour obtenir à l'aide des fractales des images spectaculaires, en particulier l'image célèbre de la représentation de l'ensemble qui porte son nom.

Dans la nature, on rencontre de nombreuses formes fractales approximatives, telles ce chou romanesco.



110 Les flocons de neige ou les courbes de Von Koch (1870-1934)

Donnons-nous un triangle équilatéral dont la longueur du côté est 1 (figure 1).

Sur chaque côté, considérons les deux points qui partagent ce côté en trois parties de même longueur. Sur chaque côté, on obtient ainsi trois segments ; sur le segment central construisons alors vers l'extérieur un triangle équilatéral, et supprimons ce segment central : on obtient le polygone représenté par la figure 2 ; on peut réitérer le processus indéfiniment, du moins en théorie, car en pratique…

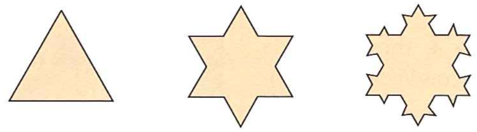


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Notons C_n le polygone obtenu à la n-ième étape, avec la convention suivante : C_0 désigne le triangle équilatéral donné au départ.
Pour le polygone C_n, notons x_n le nombre de ses côtés, ℓ_n la longueur de chaque côté, p_n son périmètre et A_n son aire.

1. Calculez x_1, ℓ_1, p_1, A_1 et x_2, ℓ_2, p_2, A_2.

2. Exprimez x_{n+1} en fonction de x_n.
Déduisez-en l'expression de x_n explicitement en fonction de n.

3. Exprimez ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n.
Déduisez-en l'expression de ℓ_n explicitement en fonction de n.

4. Exprimez p_n explicitement en fonction de n.
Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

5. Démontrez que $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Déduisez-en que, pour tout naturel $n \geqslant 1$:

$$A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

Quelle est la limite de la suite (A_n) ?

Paradoxe
On obtient, à l'aide de cette construction, un domaine dont l'aire est toujours inférieure à 2 et dont la frontière est une ligne polygonale de longueur « infiniment » grande.

POUR LA LOGIQUE

111 On considère la proposition ($\mathscr{P}$) suivante :
($\mathscr{P}$) : Pour tout entier naturel p et pour tout entier naturel q tels que $p \leqslant q$, on a $u_p \leqslant u_q$.

1. Écrivez la propriété (non $\mathscr{P}$).

2. a) Que signifie la propriété ($\mathscr{P}$) ?

b) Que signifie la propriété (non $\mathscr{P}$) ?

Pour les exercices 112 et 113
Indiquez pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.

112 a) Si $q \in \,]2\,;+\infty[$ alors $\lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$.

b) Si $\lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$, alors $q \in \,]2\,;+\infty[$.

113 a) Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3 alors $\frac{u_5}{u_4} = 3$.

b) Si $\frac{u_5}{u_4} = 3$ alors (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

114 Écrivez la négation de la proposition indiquée.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$. **b)** $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{N}$.

Un peu d'histoire

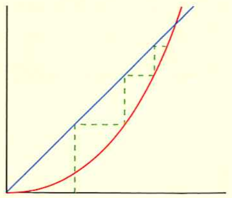
Chercheurs d'hier

Émile Picard et les suites récurrentes

Les suites constituent un exemple de fonctions (définies sur les entiers). Ce n'est pas ainsi qu'elles furent d'abord perçues, mais connues sous des formes particulières : suites arithmétiques et géométriques. C'est lorsque le concept de fonction a été précisé dans toute sa généralité, au début du XXe siècle, que les suites deviennent des fonctions.

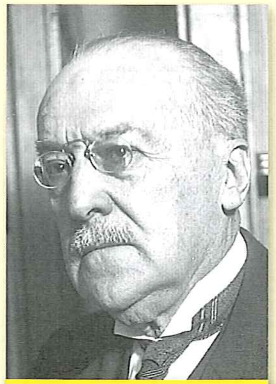
La suite géométrique (q^n) a certainement fourni le modèle de la convergence (la démonstration est fournie par François Viète en 1593).

Les suites interviennent alors en algèbre lorsqu'il faut calculer, par approximations, les racines des polynômes. C'est de cette façon, qu'à la Renaissance, sont intervenues les approximations successives des solutions des équations de la forme $f(x) = x$. On interprète ces solutions comme l'intersection d'une courbe, représentée par la fonction f dans des axes orthogonaux, et de la première bissectrice.

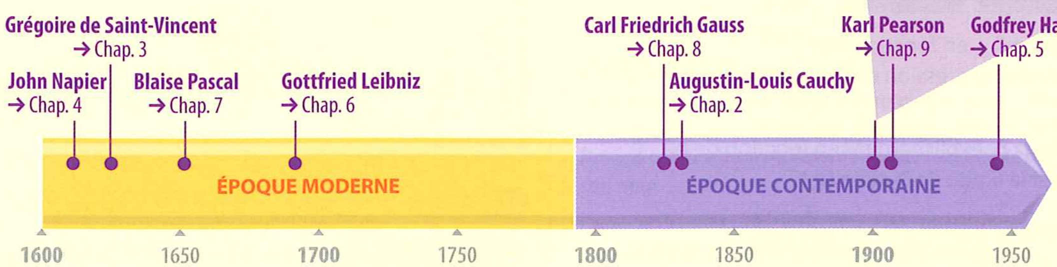


On pose $x_{n+1} = f(x_n)$, et la question des approximations successives est de savoir si la suite converge. Si la suite converge vers x, et si la fonction f est continue, alors $f(x) = x$.

Émile Picard a généralisé cette procédure pour la résolution des équations de la physique mathématique.



Émile Picard
1856 - 1941



À la même époque

Alfred Dreyfus
(1859 - 1935)

En France

En 1894, le capitaine Dreyfus est condamné au bagne à perpétuité pour trahison. Le scandale lié à cette « affaire » déclenche une crise politique, sociale et religieuse majeure en France.

À la même époque

Georges Méliès
(1861 - 1938)

Au cinéma

Georges Méliès réalise en 1902 son *Voyage dans la Lune* est le premier à utiliser des effets spéciaux. Le « septième art » s'éloigne du réel dès sa naissance.

Sur le Web
http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/pointfixe.html

Accompagnement personnalisé

Soutien

115 Somme des termes d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1\,500$ et de raison $q = 0{,}9$. On se propose de calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{100}$.

1. Expliquez pourquoi $u_1 = 1\,500 \times 0{,}9$; $u_2 = 1\,500 \times 0{,}9^2$; … ; $u_n = 1\,500 \times 0{,}9^n$.

➡ ***Indication.*** *On sait depuis la classe de 1re qu'une suite (u_n) est géométrique si chaque terme s'obtient à partir du précédant en le multipliant par un même nombre. Ce nombre est appelé raison.*

2. Vérifiez que :
$$S = 1\,500 + 1\,500 \times 0{,}9 + \ldots + 1\,500 \times 0{,}9^{100}.$$

➡ *Il s'agit de trouver une expression explicite de S, c'est-à-dire, en quelque sorte, de supprimer les points de suspension. On pourrait effectuer le calcul de tous les termes qui interviennent dans la définition de S et en faire la somme. On va voir qu'il est possible de procéder bien plus rapidement en utilisant la formule établie au théorème 6 p. 23 : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

3. Expliquez pourquoi $S = 1\,500 \times \dfrac{1-0{,}9^{101}}{0{,}1}$.

4. En utilisant la calculatrice, vérifiez que $S \approx 14\,999{,}6$.

➡ *Pour les exercices 116 et 117 vous pouvez vous reporter, si besoin, à l'exercice 115 ci-dessus.*

116 On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}1$.
On se propose de calculer la somme :
$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{120}.$$

1. Expliquez pourquoi $u_1 = 1\,000 \times 1{,}1$; $u_2 = 1\,000 \times 1{,}1^2$; … ; $u_n = 1\,000 \times 1{,}1^n$.

2. Vérifiez que :
$$S = 1\,000 + 1\,000 \times 1{,}1 + \ldots + 1\,000 \times 1{,}1^{120}.$$

3. Expliquez pourquoi $S = 1\,000 \times \dfrac{1-1{,}1^{121}}{-0{,}1}$.

4. En utilisant la calculatrice, vérifiez que :
$$S \approx 1{,}02 \times 10^9.$$

117 On considère la suite géométrique (u_n) de permier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.
Calculez la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{50}$.

Approfondissement

118 APPRENDRE À CHERCHER

On se propose de résoudre l'équation :
$$(E)\ x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0$$
où n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. a) Résolvez cette équation pour $n = 1$, c'est-à-dire l'équation $x + 1 = 0$.

b) Résolvez cette équation pour $x = 2$.

2. Les résultats de la question **1.** semblent indiquer que l'équation (E) n'admet pas toujours de solutions.
Pour $n = 3$, (E) est une équation du troisième degré. Dans ce cas, contrairement au second degré, nous ne disposons pas de formules permettant de résoudre cette équation.
Il en est de même pour $n > 3$.
Dans le cas particulier de l'équation étudiée dans ce problème, on va voir qu'il est possible de la résoudre.

a) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ est la somme des termes d'une suite géométrique. Précisez le premier terme et la raison de cette suite.

b) Calculez la somme $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ pour $x \neq 1$.

c) Retrouvez alors le résultat de la question **1.b)**.

3. Résolvez l'équation (E).

Aide Discutez suivant la parité de n.

119 1. Comparez les nombres $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^{15}$ et $B = 2^{16}$.

2. Montrez que pour tout entier naturel n,
$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n < 2^{n+1}.$$

3. Montrez que si $q \geqslant 2$ alors pour tout entier naturel n :
$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n < q^{n+1}.$$

120 Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 1$ (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$. (v_n) est la suite définie par $v_n = u_n + c$ pour tout entier naturel n.

1. Montrez que pour tout naturel n,
$$v_{n+1} = av_n + b + c(1-a).$$

2. Montrez que si $c = \dfrac{b}{a-1}$ alors (v_n) est une suite géométrique donc vous donnerez le premier terme et la raison.

Le jour du BAC

121 Exercice commenté

→ **Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. a) Donnez les dix premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être le sens de variation de (u_n) ?

c) Quelle semble être la limite de (u_n) ?

2. a) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrez que (v_n) est une suite géométrique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

b) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déduisez-en les limites de (v_n) et de (u_n).

3. En utilisant l'expression de u_n obtenue à la question **2.b)** montrez que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est un nombre négatif. Concluez.

Analyser l'énoncé
(u_n) est une suite arithmético-géométrique car elle vérifie une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$.

Analyser l'énoncé
Il s'agit d'émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur sa limite.

Analyser l'énoncé
On reconnaît la méthode classique d'étude d'une suite arithmético-géométrique : on se ramène à une suite géométrique.

Analyser l'énoncé
À présent, on étudie rigoureusement la limite et le sens de variation de (u_n).

Conseils

1. a) On calcule de proche en proche les termes de la suite (u_n).

b) La suite (u_n) semble décroissante.

c) Les termes de la suite (u_n) semblent se rapprocher de 2.

2. a) Il s'agit de démontrer que $v_{n+1} = qv_n$, avec $q \in \mathbb{R}$.

b) On sait exprimer v_n en fonction de n, car la suite (v_n) est géométrique. On exprime alors facilement u_n en fonction de n.

c) On sait calculer la limite d'une suite géométrique. On déduit la limite de (u_n) de celle de (v_n).

3. Vous devez obtenir une différence de la forme :

$$k \times \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

avec $k < 0$.

Attention !
On ne peut pas indiquer le sens de variation de (u_n) en s'appuyant sur le comportement des dix premiers termes seulement. De même, la limite de (u_n) ne peut pas être déterminée à partir des dix premiers termes seulement.

Remarque
Le calcul de la limite de (v_n) permet d'obtenir la limite de (u_n).

Remarque
On étudie à présent la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout n, et plus seulement pour les dix premiers termes de la suite.

→ Voir les corrigés p. 361

VRAI OU FAUX

122 On pose $u_0 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux nombres strictement positifs.
Pour chacune des propriétés suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. Si $a = 2$ et $b = -1$, alors $u_2 = 5$.

3. Si $a = 3$ et $b = 1$, alors $u_3 = 67$.

4. Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique.

5. Si $a = 1$, (u_n) est une suite géométrique.

6. Si $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique.

7. Si $b = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times a^{n+1}$.

8. Si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + nb$.

9. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

PROBLÈMES

123 BAC Association caritative

Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note u_n le nombre de donateurs lors de la n-ième année ; on a donc $u_1 = 1\,000$.

1. Calculez u_2 et u_3.

2. Montrez que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 300.$$

3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représentez les droites d'équation $y = x$ et $u = 0{,}8x + 300$.
À l'aide d'une construction graphique, émettez une conjecture sur l'évolution du nombre de donateurs.

4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $v_n = 1\,500 - u_n$.

a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.

b) Calculez la limite de (v_n).
Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?

124 BAC Évolution de salaire

Partie A

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 14\,000$ et par la relation :
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 200$.

1. Calculez u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 5\,000$.

a) Calculez v_0.

b) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.
En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimez v_n en fonction de n.

d) En déduire que $u_n = 19\,000 \times (1{,}04)^n - 5\,000$.

Partie B

On suppose que u_n représente le salaire annuel, en euros, d'une personne pour l'année $2012 + n$, n étant un entier naturel.

1. Calculez le salaire annuel, arrondi à l'euro, de la personne en 2020.

2. À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2012 ?

125 BAC Le jeu des 10 000 €

Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :
« Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €.
Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 € ? »
Nous allons voir comment on peut aider Marc à répondre à cette question.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en euros versé à Marc le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 100$.

a) Calculez u_2.

b) Justifiez que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 20$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 400$.

a) Calculez v_1.

b) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique et précisez sa raison.

c) Exprimez v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = 500 \times 1{,}05^{n-1} - 400$.

d) Déterminez en fonction de n, la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, puis la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?