Exercices sur les suites et les algorithmes

EXERCICE 1 Les abeilles

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	C est un nombre réel
Traitement :	Affecter à C la valeur 300
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $C < 400$ faire
	$\quad$ C prend la valeur $C - C \times 0{,}08 + 50$
	$\quad$ n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

a. Justifier que pour tout entier n, $C_{n+1} = 0{,}98C_n + 50$.

b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0{,}92 \times V_n$.

c. Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n, on a

$$C_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n.$$

d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

b. A l'aide de votre calculatrice et en expliquant votre démarche, donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

EXERCICE 2 Les singes

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.

Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004+n$. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a. au 1er janvier 2005;
   b. au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0,85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

PARTIE B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. **a.** Calculer v_1 et v_2.
   b. justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
   d. Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 Placement

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 € par an.

On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

Partie A

On considère l'algorithme ci-dessous :

Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
Tant que $C < 2\,000$ faire
Affecter à N la valeur $N + 1$
Affecter à C la valeur $1{,}02C - 25$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

1. a. On saisit la valeur 1 900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de N	0		
Valeur de C	1 900		

   b. Quel est le résultat affiché par l'algorithme ? Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.

2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1 250 à C ?

Partie B

Valentine a placé 1 900 € à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1{,}02c_n - 25$.
2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1250$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_n = 650 \times 1{,}02^n + 1250$.
3. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que la valeur du capital dépasse 2 100 €.

EXERCICE 4 Somme des termes

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.

On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000+n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120000 \times 0{,}98^n$.
2. **a.** Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

   b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

   c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

   Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

```
1   Variables :       A est un réel
2                     n est un entier naturel
3
4   Initialisation :  Affecter à A la valeur 120 000
5                     Affecter à n la valeur 0
6
7   Traitement :      Tant que A ⩾ 90000
8                        n prend la valeur ...
9                        ...
10                    Fin Tant que
11
12  Sortie :          Afficher n
```

3. **a.** Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.

   b. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

   Montrer que $S_n = 6000000 \times \left(1 - 0{,}98^{n+1}\right)$.

   c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.