# Devoir maison n°6

EXERCICE 1 : PROPRIETES ALGEBRIQUES DE LA FONCTION *ln*

1. Exprimer chaque nombre en fonction de *ln* 2 , *ln* 3

a) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{8}\right) = \ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 8=\ln 2-3\ln 2=-2\ln 2$

b) $\ln(\sqrt{15})-\ln(\sqrt{10})=\ln\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=\ln\left(\sqrt{\frac{15}{10}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$

2. Simplifier l'écriture du nombre.

$$a)\ln(72)-2\ln\left(\frac{27}{256}\right)+\ln(\sqrt{108})=\ln(3^2 x 2^3)-2\ln\left(\frac{3^3}{2^8}\right)+\frac{1}{2}\ln(3^3 x 2^2)$$

$$=2\ln 3+3\ln 2-6\ln 3+16\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2$$

$$=20\ln 2-\frac{5}{2}\ln 3$$

$$b)\ln\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{2}\ln(36)+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)=\ln\left(\frac{2^2}{3^2}\right)+\frac{1}{2}\ln[(3x2)^2]+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{3^2}{2}\right)$$

$$=2\ln 2-2\ln 3+\ln 3+\ln 2+\frac{2}{3}x2\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3$$

$$c)\ln(2e)+\ln(e\sqrt{e})-\ln(4)+\ln\left(\frac{2}{e^2}\right)+\ln(\sqrt{e})+\ln(e^3)-2=\ln 2+\ln e+\ln e+\frac{1}{2}\ln e-2\ln 2+\ln 2-2+\frac{1}{2}+3-2$$

$$=\ln 2+1+1+\frac{1}{2}-2\ln 2+\ln 2-2+\frac{1}{2}+1$$

$$=2$$

3. Ecrire l'expression sous la forme *ln* A.

$$a)\ln\left(\frac{7}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln\left(\frac{7x2x5}{2x5x4}\right)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$b)\ln(5)-3\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{10}\right)=\ln 5-\ln 8-\ln 10=\ln 5-(\ln 8+\ln 10)=\ln\left(\frac{5}{8x10}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\cancel{5}}{8x\cancel{5}x2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^4}\right)=-4\ln 2$$

3. On sait que *ln* 2 ≈ 0,7. En déduire, sans calculatrice une valeur approchée de :

a) $\ln(4)=2\ln 2\approx 1,4$ b) $\ln(8)=3\ln 2\approx 2,1$

c) $\ln\left(\frac{1}{16}\right)=-\ln 16=-\ln(2^4)=-4\ln 2\approx -2,8$

d) $\ln(\sqrt{8})=\frac{1}{2}\ln 8=\frac{1}{2}x3\ln 2\approx 0,7+0,35\approx 1,05$

EXERCICE 2 : RESOLUTION D'EQUATIONS OU D' INEQUATIONS

1. Résoudre chacune de ces équations :
   a. $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln 3$ L'équation existe pour tout $x$ tel que $x > 0$ et $x-2 > 0$ : E = ] 2 ; +∞ [

   Résolvons dans E l'équation :
   Pour tout $x\in ]2\ ;\ +\infty[$ : $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln[x(x-2)] = \ln 3$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $x_1 = -1$ est racine évidente de ce trinôme s

on en déduit $x_2 = 3$ ; or $-1 \notin E$

On conclut : $\ln(x) + \ln(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow x = 3$

b. $\ln[x(x-2)] = \ln 3$ L'équation existe pour tout $x$ tel que $x(x-2) > 0$
Il s'agit de la forme factorisée d'un trinôme dont les racines sont 0 et 2. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. E = $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

Résolvons dans E l'équation :
Pour tout $x \in ]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ : $\ln[x(x-2)] = \ln 3$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ (d'après question a)

On conclut : $\ln[x(x-2)] = \ln 3 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ : $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 3\}}$

c. $\ln(2x-3) = 3$ L'équation existe pour tout $x$ tel que $(2x-3) > 0$ : E = $]\frac{3}{2}; +\infty[$

Résolvons dans E l'équation :

Pour tout $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$ : $\ln(2x-3) = 3$

$\Leftrightarrow \ln(2x-3) = \ln(e^3)$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = e^3$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^3+3}{2}$ valeur approchée de $\frac{e^3+3}{2} \approx 11{,}543 > \frac{3}{2}$

On conclut : $\ln(2x-3) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{e^3+3}{2}$

d. $10 - 5\ln(x-5) = 0$ L'équation existe pour tout $x$ tel que $(x-5) > 0$ E = $]5; +\infty[$

Résolvons dans E l'équation :
Pour tout $x \in ]5; +\infty[$ : $10 - 5\ln(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x-5) = 2$

$\Leftrightarrow \ln(x-5) = \ln e^2$

$\Leftrightarrow x - 5 = e^2$

$\Leftrightarrow x = e^2 + 5$ valeur approchée de $e^2 + 5 \approx 12{,}389 > 5$

On conclut : $10 - 5\ln(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 + 5$

2. Résoudre chacune des inéquations :
 a. $\ln(x-3) + \ln(x-1) > 3\ln 2$ L'inéquation existe pour tout $x$ tel que $x - 3 > 0$ et $x - 1 > 0$
 E = ] 3 ; $+\infty$ [

Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x \in ]3; +\infty[$ : $\ln(x-3) + \ln(x-1) > 3\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln[(x-3)(x-1)] > \ln 8$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) > 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 8$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 4x - 5 > 0$ $x_1 = -1$ est racine évidente de ce trinôme s on en déduit $x_2 = 5$
Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. $s = \;]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

$\mathcal{S} = s \cap E = \;]5;+\infty[$

On conclut : $\ln(x-3) + \ln(x-1) > 3\ln 2 \;\Leftrightarrow\; x > 5$ : $\boxed{\mathcal{S} = \;]5;+\infty[}$

b. $\ln[(x-3)(x-1)] > 3\ln 2$ L'inéquation existe pour tout $x$ tel que $(x-3)(x-1) > 0$
Il s'agit de la forme factorisée d'un trinôme dont les racines sont 1 et 3. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. E = $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

Résolvons dans E l'inéquation :
Pour tout $x \in \;]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ : $\ln[(x-3)(x-1)] > 3\ln 2$

$\Leftrightarrow \; \ln[(x-3)(x-1)] > \ln 8$

$\Leftrightarrow \; (x-3)(x-1) > 8$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 4x + 3 > 8$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 4x - 5 > 0$ Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. $s = \;]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

$\mathcal{S} = s \cap E = \;]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

On conclut : $\ln(x-3) + \ln(x-1) > 3\ln 2 \;\Leftrightarrow\; x \in \;]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$ : $\boxed{\mathcal{S} = \;]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[}$

c. $\ln(2x-3) > 2$ L'inéquation existe pour tout $x$ tel que $(2x-3) > 0$
E = $]\frac{3}{2};+\infty[$

Résolvons dans E l'inéquation :
Pour tout $x \in \;]\frac{3}{2};+\infty[$ : $\ln(2x-3) > 2$

$\Leftrightarrow \; \ln(2x-3) > \ln(e^2)$

$\Leftrightarrow \; 2x - 3 > e^2$

$\Leftrightarrow \; x > \frac{e^2+3}{2}$ valeur approchée de $\frac{e^2+3}{2} \approx 5{,}195 \; > \frac{3}{2}$

On conclut : $\ln(2x-3) = 3 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{e^3+3}{2}$ : $\boxed{\mathcal{S} = \;]\frac{e^2+3}{2};+\infty[}$

d. $\ln(3-x) + 2 \geq 0$ L'inéquation existe pour tout $x$ tel que $(3-x) > 0$
E = $]-\infty;3[$

Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x \in \;]-\infty;3[$ : $\ln(3-x) + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \; \ln(3-x) \geq -2$

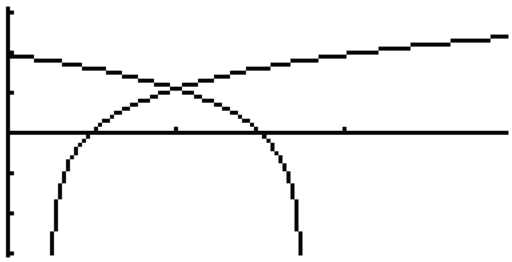
$\Leftrightarrow \; \ln(3-x) \geq \ln(e^{-2})$

$\Leftrightarrow \; 3 - x \geq e^{-2}$

$\Leftrightarrow \; x \leq 3 - e^{-2}$ valeur approchée de $3 - e^{-2} \approx 2{,}865 \; < 3$

On conclut : $\ln(3-x)+2\geq 0 \iff x\leq 3-e^{-2}$ : $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty;3-e^{-2}]}$

3. Soit $f$ et $g$ les fonctions définies respectivement par $f(x)=\ln(4x-1)$ et $g(x)=\ln(7-4x)$.
Voici les courbes représentatives de $f$ et $g$ obtenues à l'écran de la calculatrice (fenêtre : $0\leq X\leq 3 \quad -3\leq Y\leq 3$).



a. Ensemble de définition de $f$ : $f$ est définie pour tout $x$ tel que $(4x-1)>0$

$\mathcal{D}f = ]\frac{1}{4};+\infty[$

Ensemble de définition de $g$. $g$ est définie pour tout $x$ tel que $(7-4x)>0$

$\mathcal{D}g = ]-\infty;\frac{7}{4}[$

b. $f(1)=\ln 3$
$g(1)=\ln 3$

$f(1)=g(1)=\ln 3$ donc les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en un point $A$ de coordonnées $A(1\,;\ln 3)$

c. D'après le cours, on sait que les fonctions $u$ et $\ln u$ ont mêmes variations.

$f$ est donc croissante et $g$ est décroissante.
Graphiquement $f(x)>g(x) \iff x\in\ ]1;\frac{7}{4}[$

d. Résolvons algébriquement $f(x)>g(x)$.

L'inéquation existe pour tout $x$ tel que $(4x-1)>0$ et $(7-4x)>0$

$$E=\mathcal{D}f\cap\mathcal{D}g=\left]\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right[$$

Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x\in\left]\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right[$ : $f(x)>g(x)$

$$\begin{aligned}&\iff \ln(4x-1)>\ln(7-4x)\\&\iff 4x-1>7-4x\\&\iff 4x+4x>7+1\\&\iff 8x>8\\&\iff x>1\end{aligned}$$

On conclut : $f(x)>g(x) \iff \left]1;\frac{7}{4}\right[$ : $\boxed{\mathcal{S}=\left]1;\frac{7}{4}\right[}$