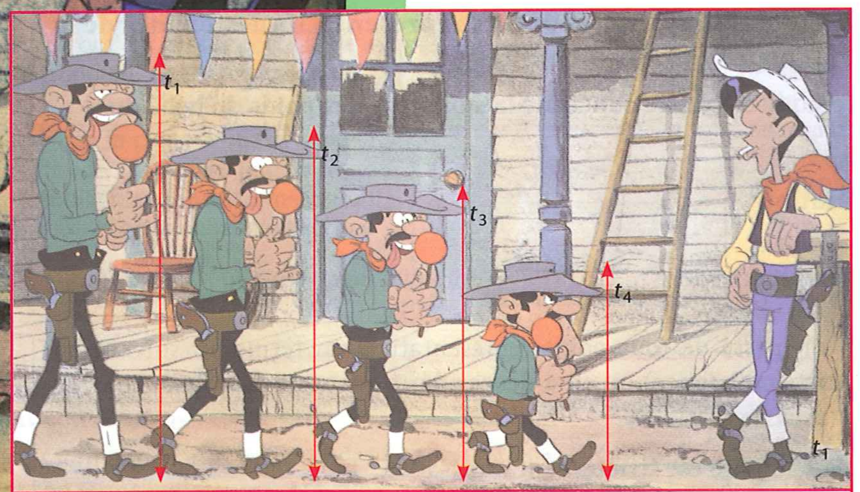
4 Suites



Suite des tailles : t_1, t_2, t_3, t_4,...

1 Suites numériques

Activité Promenade numérique

Le comité des loisirs d'un village balise un chemin en plaçant un panneau tous les 0,5 km.
Le panneau de début du chemin est numéroté 1, le panneau suivant numéroté 2, etc.
Un promeneur part du centre du village, situé à 2 km du début du chemin.
On note d_1 la distance parcourue par le promeneur lorsqu'il atteint le panneau numéro 1, d_2 la distance parcourue lorsqu'il atteint le panneau numéro 2, etc.
Reproduire et compléter le tableau suivant.

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
2						

Cours

1 Définition

Une **suite numérique** est une liste de nombres réels, « numérotés » avec les nombres entiers naturels, soit à partir de 0, soit à partir de 1.

Exemple de numérotation à partir de 1 : la suite d_1, d_2, d_3, ... de l'activité.
Exemple de numérotation à partir de 0 : la liste de nombres 3,500; 3,400; 3,550; 3,700; ..., est la suite des poids d'un bébé, en kg, relevés chaque semaine depuis sa naissance.
Le poids à la naissance est noté p_0 et les suivants p_1, p_2, p_3, ...
La suite peut donc s'écrire : $p_0 = 3{,}500$; $p_1 = 3{,}400$; $p_2 = 3{,}550$; $p_3 = 3{,}700$; ... .

RAPPEL
Vous avez oublié ce qu'est :
– un nombre réel ?
– un nombre entier naturel ?
➜ *Voir Lexique p. 201.*

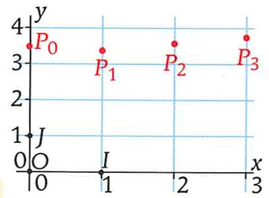
2 Vocabulaire et notations

Une suite numérique se note (u_n), ou (v_n), ... ; la lettre n représente un nombre entier naturel. Le nombre u_n, ou v_n, ..., est appelé le **terme de rang n** (ou **terme général**) de la suite.
Ainsi, le nombre u_3 est le terme de rang 3 de la suite (u_n), le nombre u_8 est le terme de rang 8 de cette suite, etc.
Le **terme initial** de la suite (u_n) est :
soit u_0 (numérotation à partir de 0), soit u_1 (numérotation à partir de 1).

Le plan étant rapporté à un repère, les **points représentatifs des termes de la suite** (u_n) sont les points U_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Exemple : le graphique ci-contre concerne la suite (p_n) des poids du bébé du paragraphe 1.

BON À SAVOIR
• u_n se lit « u indice n » ou « u-ène » ;
• u_0 se lit « u indice zéro » ou « u-zéro » ;
• u_1 se lit « u indice un » ou « u-un » ; etc.



3 Sens de variation

Une suite (u_n) est strictement $\begin{matrix}\textbf{croissante}\\ \textbf{décroissante}\end{matrix}$ lorsque, **pour tout n**, $\begin{matrix}u_n < u_{n+1}\\ u_n > u_{n+1}\end{matrix}$.

Graphiquement, on passe de tout point représentatif d'un terme au suivant en « **montant** » (stricte croissance) ou en « **descendant** » (stricte décroissance).

Exemples :
• La suite (d_n) de l'activité est strictement croissante.
• La suite (p_n) des poids du bébé du paragraphe 1 n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

BON À SAVOIR
La stricte croissance (décroissance) signifie que tout terme est strictement inférieur (supérieur) au suivant.

Exercice résolu 1 Comment calculer un terme d'une suite ?

1. Calculer les termes de rangs 0, 1 et 9 de la suite (u_n) définie par l'expression de son terme de rang n : pour tout entier naturel n, $u_n = 2n - 1$.
2. Calculer sur tableur les termes de rangs 1, 2 et 9 de la suite (v_n) définie par « récurrence » : terme initial $v_0 = 1{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

SOLUTION

1. Pour calculer u_0, u_1, puis u_9, on remplace successivement n par 0, 1 et 9 dans l'égalité $u_n = 2n - 1$.
En prenant $n = 0$: l'égalité $u_n = 2n - 1$ s'écrit $u_0 = 2\times 0 - 1$, donc $u_0 = -1$.
En prenant $n = 1$: l'égalité $u_n = 2n - 1$ s'écrit $u_1 = 2\times 1 - 1$, donc $u_1 = 1$.
En prenant $n = 9$: l'égalité $u_n = 2n - 1$ s'écrit $u_9 = 2\times 9 - 1$, donc $u_9 = 17$.

2. Sur tableur, on entre les rangs 0 et 1 dans les cellules A1 et A2, puis la valeur de v_0 (égale à 1,1) dans la cellule B1 et la formule $\boxed{=2*B1-1}$ dans la cellule B2.
Ensuite, on utilise la poignée de remplissage dans la colonne A jusqu'à obtenir le rang 9, puis dans la colonne B jusqu'à la même ligne (*voir rabats de couverture*).
La colonne B contient alors la liste des 10 premiers termes de la suite (de v_0 à v_9).
Les valeurs de v_1, v_2 et v_9 sont obtenues sur les lignes des rangs 1, 2 et 9 figurant dans la colonne A :
$v_1 = 1{,}2$, $v_2 = 1{,}4$ et $v_9 = 52{,}2$.

	A	B
1	0	1,1
2	1	1,2
3	2	1,4
4	3	1,8
5	4	2,6
6	5	4,2
7	6	7,4
8	7	13,8
9	8	26,6
10	9	52,2

MÉTHODE 1
Pour calculer un terme d'une suite,
• définie par l'expression de son terme de rang n :
on remplace n par la valeur numérique adéquate dans l'égalité correspondante ;
• définie par récurrence (c'est-à-dire lorsque le terme initial est donné et que chaque terme est déterminé à partir du terme précédent) :
on calcule à partir du terme initial, en utilisant la relation de récurrence, chacun des termes successifs jusqu'à obtenir le terme cherché (pour un rang élevé, cela étant très fastidieux « à la main », utiliser le tableur).

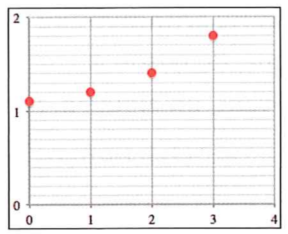
Exercice résolu 2 Comment obtenir sur tableur une représentation graphique de termes successifs d'une suite ?

Obtenir sur tableur une représentation graphique des quatre premiers termes v_0, v_1, v_2 et v_3 de la suite (v_n) définie par récurrence par son terme initial $v_0 = 1{,}1$ et, pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

SOLUTION

• En entrant 0 et 1 dans les cellules A1 et A2 puis 1,1 et la formule $\boxed{=2*B1-1}$ dans les cellules B1 et B2, on obtient avec la poignée de remplissage les listes des rangs et des termes correspondants (voir exercice résolu 1, question 2).

• Après avoir sélectionné la plage A1:B4 et suivi la procédure de la méthode, on obtient le graphique ci-contre (on peut modifier la mise en forme par un clic droit sur chaque axe et en sélectionnant Format de l'axe).



MÉTHODE 2
Pour obtenir sur tableur une représentation graphique de termes successifs d'une suite :
1. On détermine dans les colonnes A et B les listes des rangs concernés et des termes correspondants.
2. On sélectionne la plage correspondante.
3. On clique dans la barre d'outils sur Insertion, on choisit Nuages de points, puis Nuages de points avec marqueurs uniquement.

Applications

Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 1)
Calculer sur tableur les termes de rangs 2, 3 et 15 de la suite (u_n) définie par son terme initial $u_1 = 2{,}2$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 2)
Obtenir sur tableur une représentation graphique des cinq premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 4$.

➜ VOIR EXERCICES 5 À 14, PP. 78 ET 79

2 Suites arithmétiques

Activité 1 an de plus ? Le cadeau augmente de 5 euros !

La banque ARI fait à ses clients sur le point d'être parents l'offre promotionnelle qui suit : « Le jour de naissance de votre bébé, nous virons la somme de 20 € sur le compte que nous ouvrons à son nom. À chacun de ses anniversaires, nous virerons sur ce compte une somme égale au virement de l'année précédente, augmentée de 5 €. »

1. Quelle somme sera virée sur le compte de l'enfant à son premier anniversaire ? à son deuxième anniversaire ? à son troisième anniversaire ?

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 20$ et, pour tout nombre entier naturel n non nul, u_n est la somme en euros virée sur le compte de l'enfant le jour de son n-ième anniversaire. Reproduire et compléter le schéma et le tableau suivants.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[+\dots]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+\dots]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[+\dots]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[+\dots]{} \boxed{u_4} \dots \boxed{u_n} \xrightarrow[+\dots]{} \boxed{u_{n+1}} \dots$$

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
20							

3. Expliquer pourquoi tout terme de la suite (u_n) est strictement inférieur au terme suivant. Qu'en déduire sur le sens de variation de cette suite ?

Cours

1 Définition d'une suite arithmétique

Soit a un nombre réel. Une suite (u_n) est **arithmétique de raison a** lorsque, pour tout entier naturel n (non nul si le terme initial est u_1), $u_{n+1} = u_n + a$.

On peut représenter une suite arithmétique par le schéma suivant :

$$\underbrace{\boxed{u_0}}_{\text{Si le terme initial est } u_0} \xrightarrow[+a]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+a]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[+a]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[+a]{} \boxed{u_4} \dots \boxed{u_n} \xrightarrow[+a]{} \boxed{u_{n+1}} \dots$$

Exemple : la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5 \end{cases}$ est arithmétique.

$$u_0 = 10 \xrightarrow[+0{,}5]{} u_1 \xrightarrow[+0{,}5]{} u_2 \xrightarrow[+0{,}5]{} u_3 \dots u_n \xrightarrow[+0{,}5]{} u_{n+1} \dots$$

Sa raison est $a = 0{,}5$ et son terme initial est $u_0 = 10$.

BON À SAVOIR

La suite arithmétique est ici définie par récurrence : on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, la raison a.

2 Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique, de raison a.

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute a. Ainsi :

- **Lorsque $a > 0$**, la suite (u_n) est **strictement croissante** (pour tout n, $u_n < u_{n+1}$).
- **Lorsque $a < 0$**, la suite (u_n) est **strictement décroissante** (pour tout n, $u_n > u_{n+1}$).

BON À SAVOIR

Dans le cas où $a = 0$, pour tout n, on a $u_n = u_{n+1}$: la suite (u_n) est constante.

Exemples :

- La suite (u_n) du paragraphe 1 est strictement croissante, puisque sa raison est 0,5, qui est un nombre strictement positif.
- La suite (v_n) de terme initial $v_0 = 10$ et de raison $a = -2$ est strictement décroissante, puisque sa raison est -2, qui est un nombre strictement négatif.

Exercice résolu 3 Comment mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour obtenir une liste de termes d'une suite arithmétique ?

Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme ci-contre pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 9 de la suite arithmétique (u_n), de terme initial $u_1 = 3{,}5$ et de raison $a = -1{,}5$.

- Saisir les valeurs de u_1 et de a.
- Pour n allant de 1 à 8 :
  u_{n+1} prend la valeur $u_n + a$;
  afficher u_{n+1}.
Fin Pour.

SOLUTION

• On peut traduire la 1[re] étape « Saisir … » en entrant « Rang n », « u_n » et « a » dans les cellules A1, B1 et C1, puis leurs valeurs 1, 3,5 et −1,5 dans les cellules A2, B2 et C2.

• On peut traduire la 2[e] étape « Pour … » en entrant la valeur 2 dans la cellule A3 et en complétant la colonne A jusqu'au rang 9 avec la poignée de remplissage, puis en entrant la formule $\boxed{\text{=B2+C\$2}}$ dans la cellule B3 et en complétant la colonne B jusqu'au rang 9 avec la poignée de remplissage.

On obtient ainsi la liste des termes de rangs 1 à 9 de la suite (u_n).

	A	B	C
1	Rang n	u_n	a
2	1	3,5	-1,5
3	2	2	
4	3	0,5	
5	4	-1	
6	5	-2,5	
7	6	-4	
8	7	-5,5	
9	8	-7	
10	9	-8,5	

MÉTHODE 3

Pour mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour obtenir une liste de termes d'une suite arithmétique : on traduit successivement chacune des instructions de l'algorithme en entrant de manière organisée dans différentes cellules d'une feuille de calcul des titres, des valeurs ou des formules appropriés et en utilisant de manière adéquate la poignée de remplissage.

Exercice résolu 4 Comment montrer qu'une suite est arithmétique et déterminer son sens de variation ?

Le conseil municipal d'un village a pris la décison d'offrir 3 ordinateurs par an au club informatique « Info-Jeunes ». Le club possède actuellement 15 ordinateurs.

1. Combien en aura-t-il dans un an ? dans deux ans ?

2. On pose $u_0 = 15$ et on note u_n le nombre d'ordinateurs que possédera le club dans n années.

Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; donner sa raison.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

SOLUTION

1. Dans un an, le club possédera 15 + 3 = 18 ordinateurs.
Dans deux ans, le club possédera 18 + 3 = 21 ordinateurs.

2. $u_0 \xrightarrow[+3]{} u_1 \xrightarrow[+3]{} u_2 \xrightarrow[+3]{} u_3 \dots u_n \xrightarrow[+3]{} u_{n+1} \dots$

u_{n+1} est le nombre d'ordinateurs dans $(n + 1)$ années ; d'après l'énoncé, $u_{n+1} - u_n = 3$. Ainsi, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, égale à 3.
La suite (u_n) est donc arithmétique, de raison $a = 3$.

3. Puisque $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

MÉTHODE 4

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique et déterminer son sens de variation :

1. On montre que la variation absolue de u_n à u_{n+1} (différence $u_{n+1} - u_n$) est un nombre constant a ; ce nombre a est la raison de la suite.
2. On conclut
   - lorsque $a > 0$, que la suite est strictement croissante ;
   - lorsque $a < 0$, que la suite est strictement décroissante ;
   - lorsque $a = 0$, que la suite est constante.

Applications

Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

Adapter l'algorithme de l'exercice résolu 3, puis le mettre en œuvre sur tableur pour obtenir la liste des termes de rangs 0 à 20 de la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = -1{,}4$ et de raison $a = 0{,}7$.

Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)

La population d'une ville, qui était de 3 200 habitants en 2006, augmente de 250 habitants par an depuis.
On note p_0 la population en 2006 et p_n la population n années plus tard, c'est-à-dire en $(2006 + n)$.
Montrer que la suite (p_n) correspondante est arithmétique ; donner sa raison et son sens de variation.

→ VOIR EXERCICES 20 À 24 ET 33 À 37, PP. 80 ET 81

3 Suites géométriques

Activité Deux fois plus qu'hier, deux fois moins que demain

Un milliardaire raconte : « J'étais jeune et sans argent. J'ai trouvé 0,50 €, avec lesquels j'ai acheté des légumes que j'ai revendus le double du prix que je les avais payés.
Le jour suivant, j'ai utilisé l'euro obtenu le jour précédent pour acheter des légumes, que j'ai revendus le double du prix que je les avais payés. J'ai poursuivi ce commerce selon le même principe ; ainsi, chaque jour ma recette était le double de celle du jour précédent ».

1. La recette était de 1 € le 1er jour. Quelle était la recette le 2e jour ? le 3e ?

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0{,}50$ et, pour tout nombre entier naturel n non nul, u_n est la recette en euros que le futur milliardaire a faite le n-ième jour.
Reproduire et compléter le schéma et le tableau suivants.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[\times \dots]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[\times \dots]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[\times \dots]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[\times \dots]{} \boxed{u_4} \cdots \boxed{u_n} \xrightarrow[\times \dots]{} \boxed{u_{n+1}} \cdots$$

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
0,50							

3. Expliquer pourquoi tout terme de la suite (u_n) est strictement inférieur au terme suivant.
Qu'en déduire sur le sens de variation de cette suite ?

Cours

1 Définition d'une suite géométrique

Soit b un nombre réel strictement positif. Une suite (u_n) de terme initial strictement positif est **géométrique de raison b** lorsque, pour tout entier naturel n (non nul si le terme initial est u_1), $u_{n+1} = bu_n$.

On peut représenter une suite géométrique par le schéma suivant.

$$\underbrace{\boxed{u_0}}_{\text{Si le terme initial est } u_0} \xrightarrow[\times b]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[\times b]{} \boxed{u_2} \xrightarrow[\times b]{} \boxed{u_3} \xrightarrow[\times b]{} \boxed{u_4} \cdots \boxed{u_n} \xrightarrow[\times b]{} \boxed{u_{n+1}} \cdots$$

BON À SAVOIR
La suite géométrique est ici définie par récurrence : on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, la raison b.

Exemple : la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ est géométrique :

$$u_0 = 7 \xrightarrow[\times 3]{} u_1 \xrightarrow[\times 3]{} u_2 \xrightarrow[\times 3]{} u_3 \dots u_n \xrightarrow[\times 3]{} u_{n+1} \dots$$

Sa raison est $b = 3$ et son terme initial est $u_0 = 7$.

2 Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique, de raison b et de terme initial strictement positifs.
Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $b > 0$. Ainsi :

- **Lorsque $b > 1$**, la suite (u_n) est **strictement croissante** (pour tout n, $u_n < u_{n+1}$).
- **Lorsque $0 < b < 1$**, la suite (u_n) est **strictement décroissante** (pour tout n, $u_n > u_{n+1}$).

BON À SAVOIR
Dans le cas où $b = 1$, pour tout n, $u_n = u_{n+1}$: la suite (u_n) est constante.

Exemples :
- La suite (u_n) du paragraphe 1 est strictement croissante, puisque sa raison est 3, qui est un nombre strictement supérieur à 1.
- La suite (v_n) de terme initial $v_0 = 7$ et de raison $b = 0{,}8$ est strictement décroissante, puisque sa raison est 0,8, qui est un nombre strictement inférieur à 1.

Exercice résolu 5 Comment mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour obtenir une liste de termes d'une suite géométrique ?

Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme ci-contre pour obtenir la liste des termes de rangs 0 à 8 de la suite géométrique (u_n), de terme initial $u_0 = 128$ et de raison $b = 0{,}5$.

```
• Saisir les valeurs de u0 et de b.
• Pour n allant de 0 à 7 :
    un+1 prend la valeur un × b ;
    afficher un+1 .
Fin Pour.
```

SOLUTION

- On peut traduire la 1re étape « Saisir… » en entrant « Rang n », « u_n » et « b » dans les cellules A1, B1 et C1, puis leurs valeurs 0, 128 et 0,5 dans les cellules A2, B2 et C2.
- On peut traduire la 2e étape « Pour… » en entrant la valeur 1 dans la cellule A3 et en complétant la colonne A jusqu'au rang 8 avec la poignée de remplissage, puis en entrant la formule =B2*C$2 dans la cellule B3 et en complétant la colonne B jusqu'au rang 8 avec la poignée de remplissage.

On obtient ainsi la liste des termes de rangs 0 à 8 de la suite (u_n).

	A	B	C
1	Rang n	u_n	b
2	0	128	0,5
3	1	64	
4	2	32	
5	3	16	
6	4	8	
7	5	4	
8	6	2	
9	7	1	
10	8	0,5	

MÉTHODE 5
Pour mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour obtenir une liste de termes d'une suite géométrique :
on traduit successivement chacune des instructions de l'algorithme en entrant de manière organisée dans différentes cellules d'une feuille de calcul des titres, des valeurs ou des formules appropriés et en utilisant de manière adéquate la poignée de remplissage.

Exercice résolu 6 Comment montrer qu'une suite est géométrique et déterminer son sens de variation ?

Un propriétaire dit à son locataire : « votre loyer annuel actuel est égal à 6 000 €. Tant que vous resterez locataire, le loyer augmentera chaque année de 0,5 % ».

1. Quel sera le montant du loyer annuel dans un an ? dans deux ans ?

2. On pose $L_0 = 6\,000$ et on note L_n le loyer annuel (en euros) payé dans n années. Montrer que la suite (L_n) correspondante est géométrique ; donner sa raison.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (L_n).

SOLUTION

1. Le loyer dans un an sera égal à $6\,000 \times (1 + 0{,}5\ \%) = 6\,000 \times 1{,}005 = 6\,030$ €.
De même, le loyer dans deux ans s'élèvera à $6\,030 \times 1{,}005 = 6\,060{,}15$ €.

2. $L_0 \xrightarrow[\times 1{,}005]{} L_1 \xrightarrow[\times 1{,}005]{} L_2 \xrightarrow[\times 1{,}005]{} L_3 \dots L_n \xrightarrow[\times 1{,}005]{} L_{n+1} \dots$

Le coefficient multiplicateur de L_n (loyer dans n années) à L_{n+1} (loyer dans $n + 1$ années) est un nombre constant, égal à $1 + 0{,}5\ \% = 1{,}005$.
Il en résulte que la suite (L_n) est géométrique, de raison $b = 1{,}005$.

3. Puisque $b > 1$, la suite (L_n) est strictement croissante.

MÉTHODE 6
Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique et déterminer son sens de variation :
1. On montre que le coefficient multiplicateur de u_n à u_{n+1} (quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) est un nombre constant b ; ce nombre b est la raison de la suite.
2. On conclut
- lorsque $b > 1$, que la suite est strictement croissante ;
- lorsque $0 < b < 1$, que la suite est strictement décroissante ;
- lorsque $b = 1$, que la suite est constante.

Applications

Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 5)

Adapter l'algorithme de l'exercice résolu 5, puis le mettre en œuvre sur tableur pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 15 de la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_1 = 1{,}2$ et de raison $b = 2$.

Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 6)

La population d'une ville, qui était de 30 000 habitants en 2006, baisse de 5 % par an depuis.
On note p_0 la population en 2006 et p_n la population en $(2006 + n)$.
Montrer que la suite (p_n) correspondante est géométrique ; donner sa raison et son sens de variation.

→ VOIR EXERCICES 41 À 45 ET 54 À 58, PP. 81 ET 82

4 Graphiques : suites arithmétiques et suites géométriques

Activité — Des suites et des points

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $a = -2$ et, dans le plan rapporté à un repère, l'ensemble des points $U_n(n\,;\,u_n)$, représentatifs des termes de la suite.

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4, puis placer sur une figure les points U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4. Faire un constat.

b) Montrer par le calcul que par exemple U_0 et U_3 sont sur la droite d'équation $y = ax + u_0$.

c) Tracer cette droite et noter si elle « descend », si elle « monte » ou si elle est parallèle à l'axe des abscisses.

2. Reprendre la question précédente pour $a = 0{,}5$, puis pour $a = 0$.

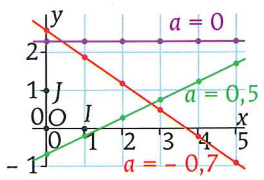
3. Expliquer pourquoi la droite de la question **1.** « descend », la première droite de la question **2.** « monte » et la deuxième est parallèle à l'axe des abscisses.

Cours

On considère une suite (u_n) et, dans le plan rapporté à un repère, l'ensemble de tous les points U_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$, représentatifs des termes de la suite.

1 Cas des suites arithmétiques

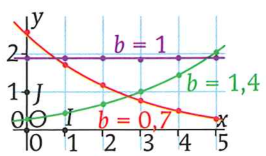
Lorsque la suite (u_n) est arithmétique, tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une **droite**.
Réciproquement, lorsque tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une droite, la suite (u_n) est **arithmétique**.
Le coefficient directeur de la droite est égal à la raison a de la suite.



Le cas $a > 0$ correspond à une droite qui « monte » (stricte croissance, dite « linéaire » parce que les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont alignés, ou encore « arithmétique » parce que la suite l'est).
Le cas $a < 0$ correspond à une droite qui « descend » (stricte décroissance, linéaire).
Le cas $a = 0$ correspond à une droite « horizontale » (tous les termes de la suite sont égaux au terme initial).

2 Cas des suites géométriques

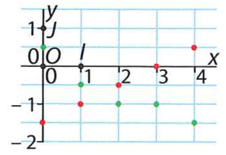
Lorsque la suite (u_n) est géométrique, de terme initial et de raison b strictement positifs, avec $b \neq 1$, tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une **courbe** dite **exponentielle** ; cette courbe n'est pas une droite.



Le cas $b > 1$ correspond à une courbe qui « monte » (stricte croissance, dite « exponentielle » parce que les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une courbe exponentielle, ou encore « géométrique » parce que la suite l'est).
Le cas $0 < b < 1$ correspond à une courbe qui « descend » (stricte décroissance, exponentielle).
Dans le cas où $b = 1$, tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une droite « horizontale » (tous les termes de la suite sont égaux au terme initial).

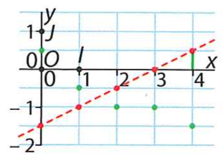
Exercice résolu 7 — Comment constater graphiquement que des termes successifs d'une suite sont des termes d'une suite arithmétique et déterminer sa raison ?

Pour chacune des couleurs rouge et vert, le graphique comporte cinq points représentatifs de cinq termes successifs d'une suite.
Pour chaque couleur, reconnaître si les termes correspondants sont des termes d'une suite arithmétique puis, dans ce cas, déterminer sa raison.



SOLUTION

• Les points verts n'étant pas situés sur une même droite, les termes correspondants ne sont pas des termes successifs d'une suite arithmétique.
• Les points rouges étant tous situés sur une même droite, les termes correspondants sont des termes successifs d'une suite arithmétique.
La raison a de cette suite est la différence entre l'ordonnée d'un point et celle du précédent, par exemple pour les 5e et 4e points : $a = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$.

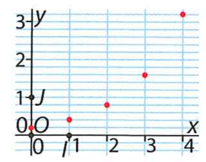


MÉTHODE 7

Pour constater graphiquement que des termes successifs d'une suite sont des termes d'une suite arithmétique :
on vérifie que les points représentatifs (d'abscisses entières successives) sont situés sur une même droite ;
pour déterminer la raison de la suite :
on lit sur le graphique l'ordonnée d'un point et celle du suivant, puis on calcule la différence entre la seconde ordonnée et la première (variation absolue), qui est la raison.

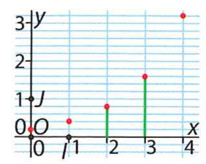
Exercice résolu 8 — Comment déterminer graphiquement la raison d'une suite géométrique ?

Les cinq points marqués en rouge sur le graphique sont les points représentatifs des cinq premiers termes d'une suite géométrique (u_n), de terme initial u_0.
Déterminer graphiquement la raison de cette suite.



SOLUTION

La raison b de cette suite est le quotient de l'ordonnée d'un point par celle du précédent, par exemple pour les 4e et 3e points :
$b = \dfrac{1{,}6}{0{,}8} = 2.$



MÉTHODE 8

Pour déterminer graphiquement la raison d'une suite géométrique :
on lit sur le graphique l'ordonnée d'un point et celle du suivant, puis on calcule le quotient de la seconde ordonnée par la première (coefficient multiplicateur), qui est la raison.

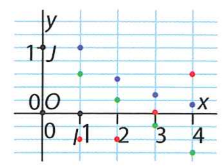
Application

Application (VOIR EXERCICES RÉSOLUS 7 ET 8)

Pour chacune des couleurs rouge, bleu et vert, le graphique comporte quatre points représentatifs de quatre termes successifs d'une suite.

1. Pour chaque couleur, reconnaître si les termes correspondants sont des termes d'une suite arithmétique puis, dans ce cas, déterminer sa raison.

2. Les points de l'une des couleurs sont les points représentatifs des quatre premiers termes d'une suite géométrique. Lesquels ? Déterminer sa raison b.



→ VOIR EXERCICES 59 À 63, PP. 82 ET 83

L'essentiel

Ce que je dois **savoir**

1 Suites numériques

Une **suite numérique** (u_n) (ou (v_n), ...) est une liste de nombres réels, « numérotés » soit à partir de 0, soit à partir de 1, avec les nombres entiers naturels (figurés ici par l'indice n).

• Le **terme initial** de la suite (u_n) est soit u_0 (numérotation à partir de 0), soit u_1 (numérotation à partir de 1).
Le nombre u_n est le **terme de rang n** de la suite.
(Ainsi, u_3 est le terme de rang 3 de la suite, u_8 est le terme de rang 8, etc.)

• Une suite est **strictement** $\begin{matrix}\textbf{croissante}\\ \textbf{décroissante}\end{matrix}$ lorsque tout terme est strictement $\begin{matrix}\textbf{inférieur}\\ \textbf{supérieur}\end{matrix}$ au suivant.

• Le plan étant rapporté à un repère, les **points représentatifs des termes de la suite** (u_n) sont les points U_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
Graphiquement, la stricte $\begin{matrix}\textbf{croissance}\\ \textbf{décroissance}\end{matrix}$ correspond au passage de tout point représentatif d'un terme au suivant en $\begin{matrix}\textbf{« montant »}\\ \textbf{« descendant »}\end{matrix}$.

2 Suites arithmétiques et suites géométriques

Soit a un nombre réel et b un nombre réel strictement positif.

• Une suite numérique (u_n) est une **suite arithmétique de raison a** lorsqu'on passe d'un terme au suivant **en ajoutant toujours le nombre a**.

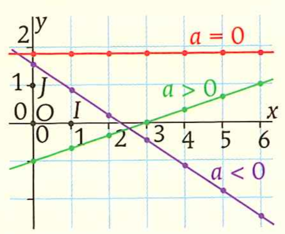
• Une suite numérique (u_n) est une **suite géométrique de raison b** (le terme initial étant ici supposé strictement positif) lorsqu'on passe d'un terme au suivant **en multipliant toujours par le nombre b**.

• Une suite arithmétique de raison a est **strictement croissante** lorsque $a > 0$, **strictement décroissante** lorsque $a < 0$.

• Une suite géométrique de raison b est **strictement croissante** lorsque $b > 1$, **strictement décroissante** lorsque $0 < b < 1$.

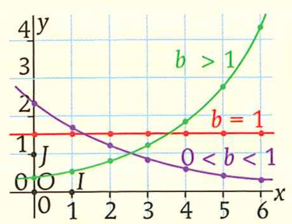
• **Graphiquement :**

suite arithmétique de raison a



Tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une **droite**, qui a pour coefficient directeur a.
(u_n) **strictement croissante (décroissante)** équivaut à la droite « **monte** » (« **descend** »).

suite géométrique de raison b



Lorsque $b \neq 1$, tous les points $U_n(n\,;\,u_n)$ sont situés sur une **courbe**, dite **exponentielle**.
(u_n) **strictement croissante (décroissante)** équivaut à la courbe « **monte** » (« **descend** »).

L'essentiel

Ce que je dois **savoir faire**

SAVOIR-FAIRE	MÉTHODE	EXERCICES
• Calculer des termes d'une suite définie par l'expression de son terme de rang n ou définie par récurrence (notamment arithmétique ou géométrique).	**1** page 69, **3** page 71 et **5** page 73	5 à 16, 18 à 28, 41 à 49
• Réaliser (à la main ou sur tableur) ou exploiter une représentation graphique de termes successifs d'une suite.	**2** page 69	3 à 6, 9 à 14, 18 et 19, 39 et 40, 59 à 63
• Montrer qu'une suite est arithmétique ou qu'une suite est géométrique, et/ou déterminer son sens de variation.	**4** page 71 et **6** page 73	31 à 37, 52 à 58
• Mettre en œuvre un algorithme ou utiliser un tableur pour obtenir une liste de termes d'une suite	**3** page 71 et **5** page 73	9 et 10, 13 à 16, 20 à 24, 41 à 45
• Constater graphiquement que des termes successifs d'une suite sont des termes d'une suite arithmétique.	**7** page 75	59 à 61
• Déterminer graphiquement la raison d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.	**7** et **8** page 75	62 et 63

Exercices

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Suites numériques

1 C **1.** Prolonger de façon logique, par quatre nombres, chacune des listes suivantes.

a) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11.

b) 0,5 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.

c) 1 ; – 1 ; 2 ; – 2 ; 3 ; – 3.

2. Dans chaque cas, on connait ainsi les termes de rangs 1 à 10 de la suite (u_n) que l'on obtiendrait en poursuivant le processus. Donner pour chaque cas le terme de rang 12 de la suite.

CONSEIL
Observer la succession des nombres (dans un sens ou dans l'autre) pour en dégager une règle de progression (ajouter un même nombre, multiplier par un même nombre, ou plus complexe …).

2 **1.** Prolonger de façon logique, par un nombre, chacune des listes suivantes.

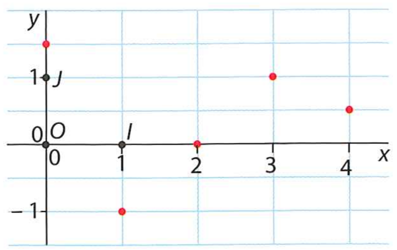
a) 1 ; – 2 ; – 5 ; – 8 ; –11 ; –14.

b) 1 024 ; 512 ; 256 ; 128 ; 64 ; 32.

c) 1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11.

2. Dans chaque cas, on connait ainsi les termes de rangs 1 à 7 de la suite (u_n) que l'on obtiendrait en poursuivant le processus. Donner pour chaque cas le terme de rang 9 de cette suite.

3 C Sur le graphique figurent les points représentatifs des cinq premiers termes d'une suite (u_n).

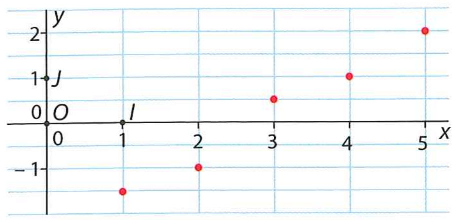


1. Lire les rangs et les valeurs de ces cinq termes.

2. Cette suite est-elle : strictement croissante ?
strictement décroissante ?
ni l'un, ni l'autre ?

CONSEIL
Voir Cours paragraphe 2 et paragraphe 3 page 68.

4 Sur le graphique figurent les points représentatifs des cinq premiers termes d'une suite (v_n).



1. Lire les rangs et les valeurs de ces cinq termes.

2. Cette suite est-elle : strictement croissante ?
strictement décroissante ?
ni l'un, ni l'autre ?
ou bien on ne peut pas savoir !

CONSEIL
Penser aux termes suivants.

5 C On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0{,}5n + 1$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{100}.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1 et u_2.

CONSEIL
Voir Exercice résolu 1 page 69 et Cours paragraphe 2 page 68.

6 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = n(n+1)$.

1. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_{10}.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_0, v_1 et v_2.

7 C Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{n-2}{n}$.

Sur tableur, calculer u_5, u_{10}, u_{16}, u_{20}, u_{40} et u_{50}.

Pour cela, reproduire la feuille de calcul suivante, entrer la formule `=(B1–2)/B1` dans la cellule B2, puis successivement 5, 10, 16, 20, 40 et 50 dans la cellule B1, pour obtenir les valeurs demandées dans la cellule B2.

	A	B
1	n =	
2	u_n =	

8 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2n - \dfrac{4}{n+10}$.

Sur tableur, calculer v_6, v_{10}, v_{20}, v_{30}, v_{60} et v_{90}.

9 C On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = 0{,}1n^2 - 2n - 1$.

1. Sur tableur, obtenir la liste des termes de rangs 0 à 9 de la suite (w_n). Pour cela :
reproduire la feuille de calcul ;
entrer les valeurs 0 et 1 dans les cellules A2 et A3, puis compléter la colonne A jusqu'au rang 9 avec la poignée de remplissage ;
entrer la formule `=0,1*A2^2–2*A2–1` dans la cellule B2 puis compléter la colonne B jusqu'au rang 9 avec la poignée de remplissage.

	A	B
1	Rang n	w_n
2		

2. Ajouter une représentation graphique des termes de rangs 0 à 9 de la suite (w_n).

CONSEIL
Voir Exercice résolu 2 page 69.

10 Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = (-1)^n n$.

1. Sur tableur, obtenir la liste des termes de rangs 0 à 7 de la suite (t_n).

2. Ajouter une représentation graphique de ces huit termes.

11 C On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1, u_2 et u_3.

CONSEIL
Voir Méthode 1 page 69 et Cours paragraphe 2 page 68.

12 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -v_n + 2 \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_0, v_1, v_2 et v_3.

13 C Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\begin{cases} w_1 = 2 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n} \end{cases}$.

1. Sur tableur, obtenir la liste des termes de rangs 1 à 7 de la suite (w_n).

2. Ajouter une représentation graphique de ces sept termes.

CONSEIL
Voir Exercices résolus 1 et 2 page 69.

14 Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\begin{cases} t_1 = 19 \\ t_{n+1} = \sqrt{t_n} \end{cases}$.

1. Sur tableur, obtenir la liste des termes de rangs 1 à 7 de la suite (t_n). (Arrondir à 0,001 près.)

2. Ajouter une représentation graphique de ces sept termes.

15 C ALGO On considère une suite (u_n).

1. Que permet d'obtenir la mise en œuvre de l'algorithme suivant ?

```
Pour n allant de 0 à 4 :
    un prend la valeur 3n – 1 ;
    afficher un .
Fin Pour.
```

2. Réaliser « à la main » cette mise en œuvre.

3. Modifier la 1re ligne de l'algorithme pour qu'il permette d'obtenir la liste des termes de rangs 0 à 7 de la suite (u_n).
Le mettre alors en œuvre sur tableur. Pour cela :
entrer les valeurs 0 et 1 (rangs) dans les cellules A1 et A2, puis compléter la colonne A jusqu'au rang 7 avec la poignée de remplissage ;
entrer la formule `=3*A1–1` dans la cellule B1, puis compléter la colonne B jusqu'au rang 7 avec la poignée de remplissage.

16 ALGO Soit (v_n) une suite, de terme initial $v_1 = 0$.

1. Que permet d'obtenir la mise en œuvre de l'algorithme suivant ?

```
• Saisir la valeur de v1 .
• Pour n allant de 1 à 4 :
    vn+1 prend la valeur 2vn – 5 ;
    afficher vn+1 .
Fin Pour.
```

2. Réaliser « à la main » cette mise en œuvre.

3. Modifier la 2e ligne de l'algorithme pour qu'il permette d'obtenir la liste des termes de rangs 1 à 15 de la suite (v_n). Le mettre alors en œuvre sur tableur. Pour cela :
entrer les valeurs 1 et 2 (rangs) dans les cellules A1 et A2, puis compléter la colonne A jusqu'au rang 15 avec la poignée de remplissage ;
entrer la valeur de v_1 dans la cellule B1 et la formule `=2*B1–5` dans la cellule B2, puis compléter la colonne B jusqu'au rang 15 avec la poignée de remplissage.

Suites arithmétiques

17 **Vrai ou faux**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Les nombres 0 ; 1 ; 3 ; 4 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

Exercices

Exercices

2. Les nombres –1 ; 0 ; 1 ; 2 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

3. Les nombres – 0,6 ; – 0,1 ; 0,4 ; 0,9 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour répondre « vraie », il s'agit de vérifier que les trois derniers termes sont **tous** obtenus en ajoutant au précédent le même nombre (**proposition universelle**) ; pour répondre « fausse », il s'agit d'exprimer la **négation** de ce qui précède, c'est-à-dire de constater qu'**il existe** un **contre-exemple** (**proposition existentielle**) : un terme obtenu en ajoutant au précédent un nombre et un terme obtenu en ajoutant au précédent un autre nombre. (*Voir Lexique p. 209.*)

18 C On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = -0,5$ et de raison 1,5.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1, u_2, et u_3.

19 Soit (v_n) la suite arithmétique de terme initial $v_1 = 2,8$ et de raison – 0,4.

1. Calculer v_2, v_3 et v_4.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_1, v_2, v_3 et v_4.

20 C ALGO Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme suivant pour obtenir la liste des termes de rangs 0 à 8 de la suite arithmétique (u_n), de terme initial $u_0 = -3,2$ et de raison $a = 2,3$.

- Saisir les valeurs de u_0 et de a.
- Pour n allant de 0 à 7 :
  - u_{n+1} prend la valeur $u_n + a$;
  - afficher u_{n+1}.

Fin Pour.

CONSEIL

Voir Exercice résolu 3 page 71.

21 ALGO Compléter l'algorithme suivant et le mettre en œuvre sur tableur pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 9 de la suite arithmétique (v_n), de terme initial $v_1 = 0,7$ et de raison $a = -3,9$.

- Saisir les valeurs de v_1 et de a.
- Pour n allant de … à … :
  - v_{n+1} prend la valeur $v_n + a$;
  - afficher v_{n+1}.

Fin Pour.

22 ALGO Sur le modèle des exercices **20** et **21** ci-dessus, écrire un algorithme permettant d'obtenir la liste des termes de rangs 0 à 15 de la suite arithmétique (w_n), de terme initial $w_0 = 13$ et de raison $a = -1,45$. Le mettre en œuvre sur tableur.

23 Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 1 à 18 de la suite arithmétique (w_n), de terme initial $w_1 = 15$ et de raison $a = -10,2$.

CONSEIL

Voir Exercice 22 précédent.

24 Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 0 à 31 de la suite arithmétique (t_n), de terme initial $t_0 = -2,42$ et de raison $a = -1,01$.

25 C On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 5, telle que $u_{11} = -10$. Calculer u_{12}.

CONSEIL

$u_{11} \xrightarrow[+5]{} u_{12}$

26 On considère une suite arithmétique (w_n) de raison – 8, telle que $w_4 = 15$. Calculer w_5 et w_6.

27 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 7, telle que $u_6 = 23$. Calculer u_5.

CONSEIL

$u_5 \xrightarrow[+7]{} u_6 = 23$

28 On considère une suite arithmétique (v_n) de raison – 3, telle que $v_9 = -2$. Calculer v_8.

29 Calculer la raison d'une suite arithmétique (v_n) telle que $v_9 = 5$ et $v_{10} = 18$.

CONSEIL

$v_9 = 5 \xrightarrow[+a]{} v_{10} = 18$

30 Calculer la raison d'une suite arithmétique (w_n) telle que $w_{14} = -5$ et $w_{15} = -9$.

31 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, selon la valeur de sa raison a, pour : $a = -1,5$; $a = 0,1$; $a = -0,2$; $a = 11$; $a = 0$.

CONSEIL

Voir Exercice résolu 4 page 71.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Il y a ici une **disjonction de cas** (trois cas pour la valeur de a, qui recouvrent toutes les possibilités : $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$). (*Voir Lexique p. 209.*)

32 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, selon la valeur de sa raison a, pour : $a = -4$; $a = 0,5$; $a = -0,5$; $a = 25$.

33 C Après un ennui de santé, Martin décide de suivre un régime amaigrissant, qui doit lui permettre de perdre régulièrement 2 kg par mois. Son poids initial est 100 kg. On pose $v_0 = 100$ et on note v_n le poids de Martin après n mois de régime.
Montrer que la suite (v_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

CONSEIL

Voir Exercice résolu 4 page 71.

34 Maxime attend impatiemment d'avoir 18 ans pour pouvoir donner son sang. Il prévoit de participer à 5 dons par an (c'est le maximum autorisé). On note u_1 le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses 19 ans, u_2 le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses 20 ans, u_n le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses (18 + n) ans.
Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

35 Fin 2005, le nombre d'auditeurs d'une radio était de 2 millions. Depuis, ce nombre n'a cessé d'augmenter régulièrement, de 10 000 par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'auditeurs fin (2005 + n).
Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

36 Pour limiter la circulation dans sa ville, une mairie loue des vélos à ses administrés, pour de petits déplacements. La première heure coûte 0,50 €, puis chaque heure suivante est facturée 1 €.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le montant de la location d'un vélo pour n heures facturées.
Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

37 Une suite (u_n) est telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n - 1,5 = 0$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique ; préciser sa raison.

Suites géométriques

38 **Vrai ou faux**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Les nombres 1 ; 4 ; 16 ; 64 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite géométrique.

2. Les nombres 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite géométrique.

3. Les nombres 0,6 ; 1,2 ; 2,4 ; 4,8 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite géométrique.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour répondre « vraie », il s'agit de vérifier que les trois derniers termes sont **tous** obtenus en multipliant le précédent par le même nombre (**proposition universelle**) ; pour répondre « fausse », il s'agit d'exprimer la **négation** de ce qui précède, c'est-à-dire de constater qu'**il existe un contre-exemple** (**proposition existentielle**) : un terme obtenu en multipliant le précédent par un nombre et un terme obtenu en multipliant le précédent par un autre nombre. (*Voir Lexique p. 209.*)

39 C On considère la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 0,5$ et de raison 1,4.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1, u_2, et u_3.

40 Soit (v_n) la suite géométrique de terme initial $v_1 = 2,5$ et de raison 0,8.

1. Calculer v_2, v_3 et v_4.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_1, v_2, v_3 et v_4.

41 C ALGO Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme suivant pour obtenir la liste des termes de rangs 0 à 8 de la suite géométrique (u_n), de terme initial $u_0 = 0,2$ et de raison $b = 1,5$.

- Saisir les valeurs de u_0 et de b.
- Pour n allant de 0 à 7 :
  - u_{n+1} prend la valeur $u_n \times b$;
  - afficher u_{n+1}.

Fin Pour.

CONSEIL

Voir Exercice résolu 5 page 73.

42 ALGO Compléter l'algorithme suivant et le mettre en œuvre sur tableur pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 9 de la suite géométrique (v_n), de terme initial $v_1 = 16,2$ et de raison $b = 0,5$.

- Saisir les valeurs de v_1 et de b.
- Pour n allant de … à … :
  - v_{n+1} prend la valeur $v_n \times b$;
  - afficher v_{n+1}.

Fin Pour.

43 ALGO Sur le modèle des exercices **41** et **42** ci-dessus, écrire un algorithme permettant d'obtenir la liste des termes de rangs 0 à 15 de la suite géométrique (w_n), de terme initial $w_0 = 13$ et de raison $b = 0,45$. Le mettre en œuvre sur tableur.

Exercices

44 Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 1 à 18 de la suite géométrique (w_n), de terme initial $w_1 = 25$ et de raison $b = 1{,}2$.

CONSEIL
Voir Exercice 43 précédent.

45 Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 0 à 31 de la suite géométrique (t_n), de terme initial $t_0 = 2{,}42$ et de raison $b = 0{,}75$.

46 C On considère une suite géométrique (u_n) de raison 5, telle que $u_8 = 10$. Calculer u_9.

CONSEIL
$u_8 \xrightarrow[\times 5]{} u_9$

47 On considère une suite géométrique (w_n) de raison 3, telle que $w_5 = 15$. Calculer w_6 et w_7.

48 On considère une suite géométrique (u_n) de raison 6, telle que $u_6 = 42$. Calculer u_5.

CONSEIL
$u_5 \xrightarrow[\times 6]{} u_6 = 42$

49 On considère une suite géométrique (v_n) de raison 5, telle que $v_9 = 2$. Calculer v_8.

50 Calculer la raison d'une suite géométrique (v_n) telle que $v_{10} = 3$ et $v_{11} = 12$.

CONSEIL
$v_{10} = 3 \xrightarrow[\times b]{} v_{11} = 12$

51 Calculer la raison d'une suite géométrique (w_n) telle que $w_{14} = 7$ et $w_{15} = 13$.

52 Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, selon la valeur de sa raison b, pour :
$b = 2{,}5$; $b = 0{,}4$; $b = 0{,}9$; $b = 15$; $b = 1$.

CONSEIL
Voir Exercice résolu 6 page 73.

LE SAVIEZ-VOUS ?
Il y a ici une **disjonction de cas** (trois cas pour la valeur de b, qui recouvrent toutes les possibilités :
$0 < b < 1$, $b > 1$, $b = 1$). (*Voir Lexique p. 209.*)

53 Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, selon la valeur de sa raison b, pour :
$b = 3$; $b = 0{,}8$; $b = 0{,}2$; $b = 10$.

54 C M. Untel a acheté un lave-linge d'une valeur de 750 €. Il consulte son assureur : celui-ci applique une réduction de 15 % par an pour vétusté ; on obtient ainsi la valeur « remboursable » de l'année.

1. Quelle sera la valeur « remboursable » 1 an après l'achat ? 2 ans après ?

2. On pose $v_0 = 750$ et on note v_n la valeur « remboursable » du lave-linge n années après l'achat.
Montrer que la suite (v_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

CONSEIL
Voir Exercice résolu 6 page 73.

55 Le gagnant d'un jeu télévisé se voit verser chaque mois pendant un an une somme d'argent dont le montant le premier mois est 1 500 euros. Le versement augmente chaque mois de 5 %. On pose $u_1 = 1\,500$ et on note u_n la somme versée le n-ième mois.
Montrer que la suite (u_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

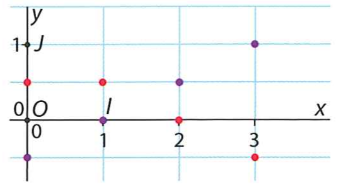
56 Le directeur d'un complexe de salles de cinéma déclare qu'au cours de l'année suivant l'ouverture, la fréquentation a augmenté de 2 % tous les mois.
Le premier mois, le nombre d'entrées était 15 000.
On note s_n le nombre théorique d'entrées au cours du n-ième mois.
Montrer que la suite (s_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

57 Pour sa semaine de vacances, Myriam décide de louer un vélo. On lui propose de payer 7 euros pour le premier jour, puis de diminuer de 10 % le montant chaque jour suivant.
On note u_n le montant théorique payé pour le n-ième jour.
Montrer que la suite (u_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

58 On considère une suite (v_n), de terme initial $v_1 = 12$, telle que chaque terme soit le quart du précédent. Montrer que la suite est géométrique ; préciser sa raison.

Graphiques : suites arithmétiques et suites géométriques

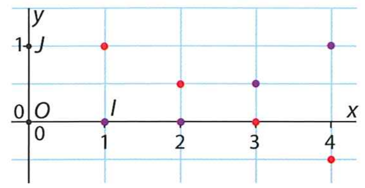
59 Les quatre points marqués en violet sur le graphique de la page 83 sont-ils les points représentatifs des termes de rangs 0 à 3 d'une suite arithmétique ? Qu'en est-il des points marqués en rouge ?



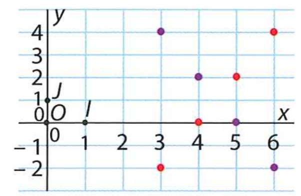
CONSEIL
Voir Exercice résolu 7 page 75.

LE SAVIEZ-VOUS ?
On retrouve ici une **proposition universelle** (pour répondre « oui », il s'agit de vérifier que **tous** les points sont situés sur une même droite) et une **proposition existentielle** (pour répondre « non », il s'agit d'exprimer la **négation** de ce qui précède, c'est-à-dire de constater qu'**il existe** un **contre-exemple** : un point qui n'est pas situé sur la même droite que deux autres). (*Voir Lexique p. 209.*)

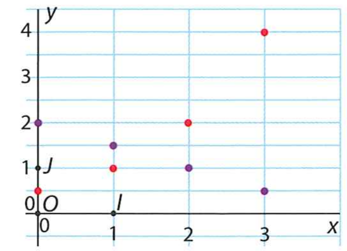
60 Les quatre points marqués en violet sur le graphique sont-ils les points représentatifs des termes de rangs 1 à 4 d'une suite arithmétique ? Ceux marqués en rouge ?



61 Les quatre points marqués en violet sur le graphique sont-ils les points représentatifs des termes de rangs 3 à 6 d'une suite arithmétique ?
Ceux marqués en rouge ?



62 Les points représentatifs des termes de rangs 0 à 3 d'une suite arithmétique (u_n) (en violet) et d'une suite géométrique (v_n) (en rouge) sont marqués sur le graphique.



1. À partir du graphique, donner le sens de variation de chacune des deux suites.

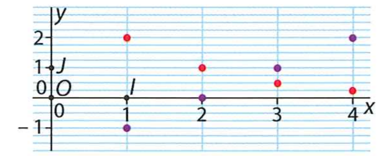
2. Déterminer graphiquement :

a) le terme initial u_0 et la raison a de la suite (u_n) ;

b) le terme initial v_0 et la raison b de la suite (v_n).

CONSEIL
Voir Cours paragraphes 1 et 2 page 74 et Exercices résolus 7 et 8 page 75.

63 Les points représentatifs des termes de rangs 1 à 4 d'une suite arithmétique (u_n) (en violet) et d'une suite géométrique (v_n) (en rouge) sont marqués sur le graphique.



1. À partir du graphique, donner le sens de variation de chacune des deux suites.

2. Déterminer graphiquement :

a) le terme initial u_1 et la raison a de la suite (u_n) ;

b) le terme initial v_1 et la raison b de la suite (v_n).

Je fais le point

SAVEZ-VOUS calculer un terme d'une suite définie par l'expression de son terme de rang *n* ?

ÉNONCÉ 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$. Calculer u_0, u_1, u_4 et u_{10} (donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de u_{10}).

➜ *voir solution page 187*

ÉNONCÉ 2

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = (1+n)^n$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

➜ *voir exercice résolu 1 page 69*

SAVEZ-VOUS calculer un terme d'une suite définie par récurrence ?

ÉNONCÉ 1

On considère la suite (u_n) définie par
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -1{,}2u_n - 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

➜ *voir solution page 187*

ÉNONCÉ 2

On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_{n+1} = (v_n + 1)^2 \end{cases}$.

Calculer v_2, v_3 et v_4.

➜ *voir exercice résolu 1 page 69*

Je fais le point

SAVEZ-VOUS obtenir sur tableur une représentation graphique de termes successifs d'une suite ?

ÉNONCÉ 1

Obtenir sur tableur une représentation graphique des quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0{,}5n^2 - 2$.

→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

Obtenir sur tableur une représentation graphique des quatre premiers termes v_1, v_2, v_3 et v_4 de la suite (v_n) définie par récurrence par : $v_1 = 1{,}2$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = v_n^2 - 0{,}2$.

→ *voir exercice résolu 2 page 69*

SAVEZ-VOUS montrer qu'une suite est arithmétique et déterminer son sens de variation ?

ÉNONCÉ 1

Une entreprise importe une matière première d'un pays étranger. Elle a importé 1 000 tonnes de produit en janvier de l'année passée, mais à cause d'événements internes au pays, cette quantité diminue de 20 tonnes par mois.

1. Quelle quantité l'entreprise a-t-elle importée en février ? en mars ?

2. On note q_1 la quantité importée en janvier, q_2 la quantité importée en février, etc.
Montrer que la suite (q_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

3. Déterminer son sens de variation.

→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

Il y a sept ans, Loïc avait une facture de chauffage d'un montant de 1 000 €. Il a constaté que depuis, sa facture a augmenté de 60 € par an.

On pose $v_0 = 1\,000$ et on note v_1 le montant de la facture après la première augmentation, …, v_n le montant de la facture après la n-ième augmentation.

1. Montrer que la suite (v_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

2. Déterminer son sens de variation.

→ *voir exercice résolu 4 page 71*

SAVEZ-VOUS montrer qu'une suite est géométrique et déterminer son sens de variation ?

ÉNONCÉ 1

Une entreprise importe une matière première d'un pays étranger. Elle a importé 1 000 tonnes de produit en janvier de l'année passée, mais à cause de besoins importants, cette quantité augmente de 10 % par mois.

1. Quelle quantité l'entreprise a-t-elle importée en février ? en mars ?

2. On note q_1 la quantité importée en janvier, q_2 la quantité importée en février, etc. Montrer que la suite (q_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

3. Déterminer son sens de variation.

→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

À cause d'une fuite accidentelle, la hauteur d'eau d'un bassin baisse de 1 % par jour. La hauteur d'eau relevée juste après l'accident était de 8 mètres.

On pose $u_0 = 8$ et on note u_n le niveau (en mètres) n jours après ce relevé.

1. Montrer que la suite (u_n) correspondante est géométrique ; préciser sa raison et son terme initial.

2. Déterminer son sens de variation.

→ *voir exercice résolu 6 page 73*

SAVEZ-VOUS mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour obtenir une liste de termes d'une suite arithmétique ou géométrique ? ALGO

ÉNONCÉ 1

Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme suivant pour obtenir la liste des termes de rangs 0 à 5 de la suite arithmétique (u_n), de terme initial $u_0 = -0{,}2$ et de raison $a = 1{,}4$.

```
• Saisir les valeurs de u0 et de a.
• Pour n allant de 0 à 4 :
  | u(n+1) prend la valeur u(n) + a ;
  | afficher u(n+1) .
Fin Pour.
```

→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

Mettre en œuvre sur tableur l'algorithme suivant pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 10 de la suite géométrique (v_n), de terme initial $v_1 = 12{,}5$ et de raison $b = 0{,}8$.

```
• Saisir les valeurs de v1 et de b.
• Pour n allant de 1 à 9 :
  | v(n+1) prend la valeur v(n) × b ;
  | afficher v(n+1) .
Fin Pour.
```

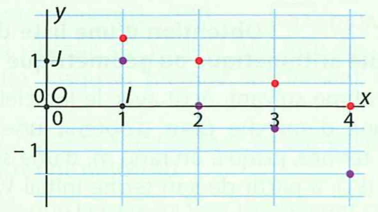
→ *voir exercices résolus 3 page 71 et 5 page 73*

Je fais le point

SAVEZ-VOUS constater graphiquement que des termes successifs d'une suite sont des termes d'une suite arithmétique et déterminer sa raison ?

ÉNONCÉ 1

1. Les quatre points marqués en violet sur le graphique sont-ils les points représentatifs des termes de rangs 1 à 4 d'une suite arithmétique ?
Si oui, déterminer sa raison.

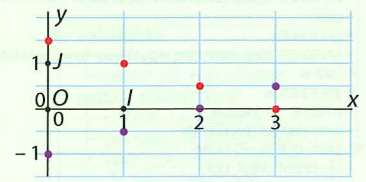


2. Traiter les mêmes questions pour les points marqués en rouge.

→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

1. Les quatre points marqués en violet sur le graphique sont-ils les points représentatifs des termes de rangs 0 à 3 d'une suite arithmétique ? Si oui, déterminer sa raison.



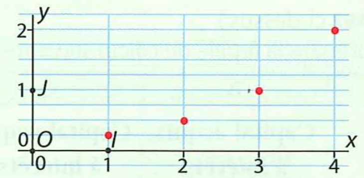
2. Traiter les mêmes questions pour les points marqués en rouge.

→ *voir exercice résolu 7 page 75*

SAVEZ-VOUS déterminer graphiquement la raison d'une suite géométrique ?

ÉNONCÉ 1

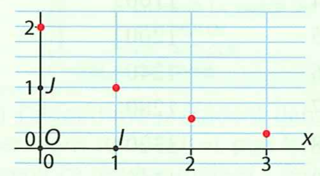
Les quatre points marqués en rouge sur le graphique sont les points représentatifs des termes de rangs 1 à 4 d'une suite géométrique. Déterminer sa raison.



→ *voir solution page 188*

ÉNONCÉ 2

Les quatre points marqués en rouge sur le graphique sont les points représentatifs des termes de rangs 0 à 3 d'une suite géométrique. Déterminer sa raison.



→ *voir exercice résolu 8 page 75*

ACTIVITÉS GUIDÉES

64 ALGO AG1 **Évolution d'un capital placé à intérêts simples**

Monsieur X place un capital égal à 1 000 € au taux annuel de 4 % à intérêts simples. Cela signifie que, chaque année, le capital acquis est augmenté du même intérêt I, égal à celui de la 1re année de placement.

On pose $C_0 = 1\,000$ et on note C_n le capital (en euros) acquis au bout de n années (où n est un entier naturel non nul).

1. a) Calculer I.
En déduire que $C_1 = 1\,040$ et $C_2 = 1\,080$.

b) Montrer que la suite (C_n) correspondante est arithmétique ; donner son terme initial et sa raison.

2. Pour visualiser l'évolution de son capital, Monsieur X réalise sur tableur une feuille de calcul, dont le début figure ci-contre.

	A	B
1	Année	Capital
2	0	1000
3		

a) Reproduire ce début de feuille de calcul, puis le compléter pour obtenir la liste des capitaux acquis de la 1re à la 15e année de placement.
Donner le capital acquis à la 10e année de placement.

b) Ecrire un algorithme décrivant la procédure utilisée dans la question précédente.

65 ALGO AG2 **Évolution d'un capital placé à intérêts composés**

Monsieur X place un capital égal à 1 000 € au taux annuel de 4 % à intérêts composés. Cela signifie que, chaque année, le capital acquis est augmenté de 4 %.

On pose $K_0 = 1\,000$ et on note K_n le capital (en euros) acquis au bout de n années (où n est un entier naturel non nul).

1. a) Vérifier que $K_1 = 1\,040$ et $K_2 = 1\,081{,}60$.

b) Montrer que la suite (K_n) correspondante est géométrique ; donner son terme initial et sa raison.

2. Pour visualiser l'évolution de son capital, Monsieur X réalise sur tableur une feuille de calcul, dont le début figure ci-contre.

	A	B
1	Année	Capital
2	0	1000
3		

a) Reproduire ce début de feuille de calcul, puis le compléter pour obtenir la liste des capitaux acquis de la 1re à la 15e année de placement (arrondir au centime d'euro).
Donner le capital acquis à la 10e année de placement.

b) Ecrire un algorithme décrivant la procédure utilisée dans la question précédente.

66 AG3 **Comparaison entre un placement à intérêts simples et un placement à intérêts composés**

Monsieur X veut savoir quelle somme placer au taux annuel de 4 % à intérêts composés pour obtenir au bout de 10 ans le même capital acquis que 1 000 € placés au taux annuel de 4 % à intérêts simples.
(Voir **AG1** et **AG2** ci-dessus.)
Pour cela, il prépare la feuille de calcul suivante.

	A	B	C
1	Année	Capital acquis à intérêts simples	Capital acquis à intérêts composés
2	0	1000	
3	1	1040	
4	2	1080	
5	3	1120	
6	4	1160	
7	5	1200	
8	6	1240	
9	7	1280	
10	8	1320	
11	9	1360	
12	10	1400	

1. Reproduire cette feuille.

2. *Méthode par « essais successifs »*

a) Expliquer pourquoi la formule =C2*1,04, entrée dans la cellule C3, permet d'y obtenir le capital acquis au bout d'un an, correspondant à une somme entrée dans la cellule C2.
Entrer cette formule dans la cellule C3.

b) Compléter la colonne C jusqu'à la cellule C12 avec la poignée de remplissage, pour obtenir les capitaux acquis au bout de 2 à 10 ans, correspondant à une somme entrée dans la cellule C2.

c) • Entrer successivement les sommes 940 et 950 dans la cellule C2.
Quels capitaux acquis au bout de 10 ans (arrondis au centime) obtient-on dans la cellule C12 ?
• Entrer la somme 945 dans la cellule C2.
Quel capital acquis au bout de 10 ans (arrondi au centime) obtient-on dans la cellule C12 ?
• Poursuivre ce processus d'essais successifs de sommes (jusqu'au centime) dans la cellule C2, jusqu'à obtenir dans la cellule C12 le capital acquis 1 400,00.
Quelle est la somme initiale à placer figurant alors dans la cellule C2 ?

3. *Méthode par « remontée »*

a) En repartant de la feuille de calcul figurant au-dessus (cellules C2 à C12 vides), entrer 1 400,00 dans la cellule C12 (capital acquis au bout de 10 ans).

b) Expliquer pourquoi la formule =C12/1,04, entrée dans la cellule C11, permet d'y obtenir le capital acquis au bout de 9 ans.

c) Compléter la colonne C en remontant jusqu'à la cellule C2 avec la poignée de remplissage, pour y obtenir la somme initiale à placer.
Cette somme est-elle celle obtenue à la question **1. c)** ?

67 ALGO AG4 **Obtention d'une liste de termes d'une suite arithmétique ou géométrique**

1. L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche pour d'obtenir une liste des premiers termes, jusqu'à un rang m, d'une suite arithmétique (V_n), à partir de son terme initial V_0 et de sa raison r.
(V_0 et V_n y sont écrits V0 et Vn.)

```
VARIABLES
  V0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  Vn EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Quel est le terme initial V0 de la suite  (Vn)  ? "
  LIRE V0
  AFFICHER V0
  AFFICHER "Quelle est la raison r de la suite ? "
  LIRE r
  AFFICHER r
  AFFICHER "Quel est le rang m du dernier terme de la liste ? "
  LIRE m
  AFFICHER m
  n PREND_LA_VALEUR 0
  Vn PREND_LA_VALEUR V0
  TANT_QUE (n<m) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    Vn PREND_LA_VALEUR Vn+r
    AFFICHER "V"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
    AFFICHER Vn
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Reproduire l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »).

a) Faire afficher la liste des premiers termes, jusqu'au rang $m = 140$, de la suite arithmétique (V_n) de terme initial $V_0 = 35$ et de raison $r = -9$ (utiliser « Tester Algorithme », puis « Lancer Algorithme »).

b) Faire afficher la liste des premiers termes, jusqu'au rang $m = 45$, de la suite arithmétique (V_n) de terme initial $V_0 = -26$ et de raison $r = 3{,}5$.

2. On souhaite modifier l'algorithme précédent pour obtenir la liste des premiers termes, jusqu'à un rang m, d'une suite géométrique (V_n), à partir de son terme initial V_0 et de sa raison r.

a) Quelle est la seule ligne à modifier ?
Réécrire cette ligne.

b) Faire afficher la liste des premiers termes, jusqu'au rang $m = 61$, de la suite géométrique (V_n) de terme initial $V_0 = 0{,}8$ et de raison $r = 1{,}01$.

Exercices

c) Faire afficher la liste des premiers termes, jusqu'au rang $m = 77$, de la suite géométrique (V_n) de terme initial $V_0 = 3\,000$ et de raison $r = 0{,}8$.

68 ALGO AG5 **Déterminer le rang du premier terme d'une suite arithmétique qui franchit un seuil donné**

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 200$ et de raison -30.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Déterminer le rang du premier terme de la suite strictement inférieur à -500.
Pour cela, obtenir sur tableur une liste des termes de cette suite, jusqu'au premier strictement inférieur à -500.

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1\,000$ et de raison 40.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Déterminer le rang du premier terme de la suite strictement supérieur à 1 700.
Pour cela, obtenir sur tableur une liste des termes de cette suite, jusqu'au premier strictement supérieur à 1 700.

c) L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche pour obtenir le résultat demandé à la question **2. b)**. (u_n y est écrit Un.)

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  Un EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  Un PREND_LA_VALEUR 1000
  TANT_QUE (Un<=1700) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    Un PREND_LA_VALEUR Un+40
    AFFICHER "U"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
    AFFICHER Un
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Recopier l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »), puis le mettre en œuvre pour obtenir ce résultat (utiliser « Tester Algorithme », puis « Lancer Algorithme »).

d) Monsieur X veut savoir au bout de combien d'années, pour 1 000 € placés au taux annuel de 4 % à intérêts simples, le capital acquis dépassera 1 700 €.
Utiliser le résultat de la question **2. b)** pour lui apporter la réponse.

3. Modifier l'algorithme précédent pour obtenir le résultat de la question **1. b)**.

69 ALGO AG6 **Déterminer le rang du premier terme d'une suite géométrique qui franchit un seuil donné**

1. Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0 = 200$ et de raison 0,8.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Déterminer le rang du premier terme de la suite strictement inférieur à 0,5.
Pour cela, obtenir sur tableur une liste des termes de cette suite, jusqu'au premier strictement inférieur à 0,5.

2. Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0 = 1\,000$ et de raison 1,04.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Déterminer le rang du premier terme de la suite strictement supérieur à 1 700.
Pour cela, obtenir sur tableur une liste des termes de cette suite, jusqu'au premier strictement supérieur à 1 700.

c) L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche pour obtenir le résultat demandé à la question **2. b)**. (u_n y est écrit Un.)

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  Un EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  Un PREND_LA_VALEUR 1000
  TANT_QUE (Un<=1700) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    AFFICHER "U"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
    Un PREND_LA_VALEUR Un*1.04
    AFFICHER Un
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Recopier l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »), puis le mettre en œuvre pour obtenir ce résultat (utiliser « Tester Algorithme », puis « Lancer Algorithme »).

d) Monsieur X veut savoir au bout de combien d'années, pour 1 000 € placés au taux annuel de 4 % à intérêts composés, le capital acquis dépassera 1 700 €.
Utiliser le résultat de la question **2. b)** pour lui apporter la réponse.

3. Modifier l'algorithme précédent pour obtenir le résultat de la question **1. b)**.

70 AG7 **Croissance arithmétique (ou linéaire), croissance géométrique (ou exponentielle)**

En 2000, une ville U avait 6 500 habitants et une ville V avait 3 500 habitants.
Depuis cette date, la population de la ville U augmente de 100 habitants par an et celle de la ville V augmente de 8 % par an.
On pose $u_0 = 6\,500$ et on note u_n le nombre d'habitants de la ville U en $(2000 + n)$.
On pose $v_0 = 3\,500$ et on note v_n le nombre d'habitants de la ville V en $(2000 + n)$.

1. Calculer les nombres d'habitants des villes U et V en 2001.

2. Montrer que les suites correspondantes sont (u_n) arithmétique et (v_n) géométrique, et donner leurs termes initiaux et leurs raisons a et b.

Exercices

3. a) Reproduire la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D
1	Année	Rang n	u_n	v_n
2	2000	0	6500	3500

Compléter cette feuille par les listes des années de 2001 à 2012, des rangs et des termes correspondants des suites (u_n) et (v_n) (pour cette dernière, arrondir à l'unité).

b) Obtenir sur tableur un graphique comportant les points représentatifs des termes de rangs 0 à 12 des suites (u_n) et (v_n).
(Pour cela, sélectionner la plage B2:D14 avant de cliquer dans la barre d'outils sur Insertion, puis Nuages de points.)

c) Déterminer graphiquement à partir de quelle année le nombre d'habitants la ville U est devenu inférieur au nombre d'habitants de la ville V.

d) Indiquer les cellules dans lesquelles vérifier sur les listes obtenues à la question **3. a)** la conclusion de la question **3. c)**.

LE SAVIEZ-VOUS ?

La **croissance** de la population de la ville U est donc **arithmétique** (ou **linéaire**) et celle de la population de la ville V est **géométrique** (ou **exponentielle**). (*Voir Cours page 74.*)

PROBLÈMES

71 ** **QCM**

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer laquelle.

1. Les nombres 1,5 ; 3 ; 5 sont, dans cet ordre, des termes successifs d'une suite :

a) arithmétique ;

b) géométrique ;

c) ni arithmétique, ni géométrique.

2. La raison de la suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{4}$ est :

a) 2 ; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$.

3. Le terme u_4 de la suite arithmétique (u_n) de raison -2 et de terme initial $u_0 = 8$ est :

a) $u_4 = 0$; **b)** $u_4 = -2$; **c)** $u_4 = 2$.

72 *** On considère la suite arithmétique (u_n), de terme initial u_0 et de raison a, telle que $u_3 = 3$ et $u_5 = -1$.

1. Expliquer pourquoi $u_5 = u_3 + 2a$. En déduire a.

2. Expliquer pourquoi $u_3 = u_0 + 3a$. En déduire u_0.

3. Donner le sens de variation de la suite (u_n).

73 *** On considère la suite géométrique (v_n), de terme initial v_0 et de raison $b > 0$, telle que $v_3 = 0{,}2$ et $v_5 = 0{,}05$.

1. Expliquer pourquoi $v_5 = v_3 b^2$. En déduire b.

2. Expliquer pourquoi $v_3 = v_0 b^3$. En déduire v_0.

3. Donner le sens de variation de la suite (v_n).

74 ** On étudie en laboratoire les modifications d'un type d'insectes lorsque leur population augmente. La population initiale est composée de 2 insectes.
À la fin de chaque jour, on retire un insecte pour l'examiner et on rajoute le nombre d'insectes qu'il y avait au début de la journée.
Ainsi, il y a $(2 - 1) + 2 = 3$ insectes à la fin du premier jour et $(3 - 1) + 3 = 5$ insectes à la fin du deuxième jour.

1. Combien y a-t-il d'insectes à la fin du troisième jour ? à la fin du quatrième ? à la fin du cinquième ?

2. On note u_0 le nombre d'insectes initial, u_1 le nombre d'insectes à la fin du premier jour,…, u_n le nombre d'insectes à la fin du n-ième jour.
Montrer que $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

3. Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 0 à 60 de la suite (u_n) correspondante.
Donner le nombre d'insectes à la fin du 30e jour, puis à la fin du 60e jour (en supposant que le milieu qui les contient soit suffisamment vaste).

75 ** On place un capital de 2 000 € au taux annuel de 3 % à intérêts simples.
On pose $C_0 = 2\,000$ et on note C_n le capital (en euros) acquis au bout de n années (où n est un entier naturel non nul).

1. Montrer que les capitaux (en euros) acquis au bout de 1 an et 2 ans sont respectivement $C_1 = 2\,060$ et $C_2 = 2\,120$.

2. Montrer que la suite (C_n) correspondante est arithmétique ; donner son terme initial et sa raison.

3. Obtenir sur tableur une liste de termes de la suite (C_n) et déterminer :

a) le capital acquis au bout de 10 ans ;

b) au bout de combien d'années le capital acquis sera supérieur ou égal au double du capital initial.

76 ** Alan décide de s'entraîner chaque jour pour participer à un marathon (42,195 km). Au début, il fait systématiquement 3 tours de piste (1,200 km) par jour sur le stade de sa ville. Alan décide qu'à partir du 1er mars, il augmentera chaque jour la distance parcourue de 400 mètres. On pose $d_0 = 1{,}2$. On note d_1 la distance (en km) parcourue par Alan le 1er mars, d_2 la distance (en km) parcourue par Alan le 2 mars, etc.

1. Montrer que la suite (d_n) correspondante est arithmétique, de raison 0,4.

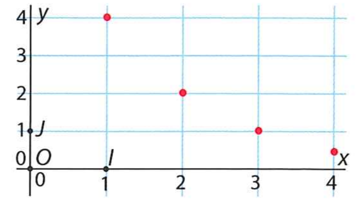
2. Obtenir sur tableur la liste des termes de rangs 0 à 110 de la suite (d_n).

3. En supposant qu'Alan soit d'une résistance peu commune pour suivre ce plan d'entraînement :

a) quelle distance courra-t-il le 31 mars ? le 1er avril ?

b) à quelle date Alan dépassera-t-il la distance de 42,195 km ?

77 ** Le graphique suivant comporte les points représentatifs des termes de rangs 0 à 3 d'une suite géométrique de terme initial u_1 et de raison b.



1. Déterminer graphiquement u_1 et b.

2. À l'aide du tableur, déterminer le rang du premier terme de la suite qui est inférieur à 10^{-3}.

78 ** On place un capital de 2 000 € au taux annuel de 3 % à intérêts composés.
On pose $C_0 = 2\,000$ et on note C_n le capital (en euros) acquis au bout de n années (où n est un entier naturel non nul).

1. Montrer que les capitaux (en euros) acquis au bout de 1 an et 2 ans sont respectivement $C_1 = 2\,060$ et $C_2 = 2\,121{,}80$.

2. Montrer que la suite (C_n) correspondante est géométrique ; donner son terme initial et sa raison.

3. Obtenir sur tableur une liste de termes de la suite (C_n) et déterminer :

a) le capital acquis au bout de 10 ans ;

b) au bout de combien d'années le capital acquis sera supérieur ou égal au double du capital initial.

79 ** Sur la vitrine d'un magasin, on peut lire : « Liquidation définitive : chaque semaine, nous baissons les prix de la semaine précédente de 10 % ».

1. Un manteau était vendu 200 € avant la liquidation.
Combien est-il vendu lors de la première semaine de liquidation ? lors de la deuxième semaine ?

2. On pose $s_0 = 200$ et on note s_n le prix du manteau lors de la n-ième semaine de liquidation.
Donner la nature de la suite (s_n) correspondante.

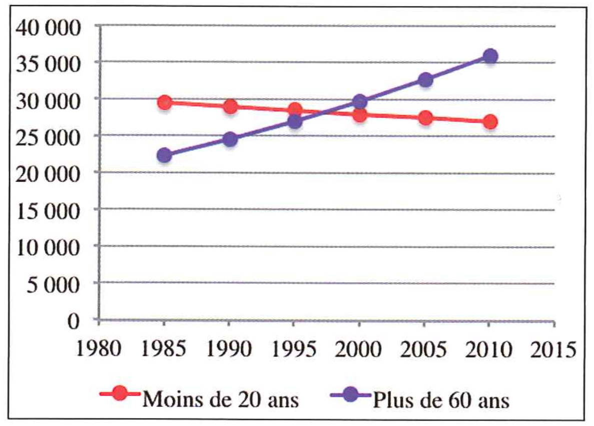
3. a) La liquidation dure huit semaines. Si le manteau est toujours en vente, quel est son prix lors de la huitième semaine ?

b) Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 120 €.
Déterminer la semaine au cours de laquelle elle effectuera son achat.

80 *** BAC Le tableau suivant donne la répartition de la population d'une ville selon l'âge de ses habitants, de cinq ans en cinq ans, à partir de l'année 1985 jusqu'à l'année 2010.

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Moins de 20 ans	29 500	28 990	28 510	27 980	27 490	27 000
20-60 ans	50 250	40 420	50 290	50 180	50 360	50 300
Plus de 60 ans	22 340	24 570	27 020	29 730	32 710	35 980

1. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le graphique suivant, sur lequel sont représentées l'évolution de la population des moins de 20 ans et l'évolution de celle des plus de 60 ans sur la période 1985–2010.



a) Expliquer pourquoi le graphique permet de considérer que la décroissance de la population des moins de 20 ans est linéaire sur la période 1985–2010. (Voir Cours paragraphe 1 page 74.)

b) Vérifier, à l'aide de calculs de quotients appropriés, que la croissance de la population des plus de 60 ans peut-être considérée comme exponentielle sur la période 1985–2010. (Voir Cours paragraphe 2 page 74.)

2. On suppose que, pour cette ville et sur la période 2010–2060, la population évolue selon les deux hypothèses suivantes :
(1) la population des moins de 20 ans va décroître de 500 habitants tous les cinq ans ;
(2) la population des plus de 60 ans va augmenter de 10 % tous les cinq ans.
Si ces hypothèses se vérifiaient, est-il possible que dans cette ville, en 2060, il y ait environ 4 fois plus d'habitants de plus de 60 ans que d'habitants de moins de 20 ans ? (Utiliser un tableur.)

81 *** BAC Trois quotidiens, *La Cité*, *Le Temps* et *L'Urbain*, sont distribués gratuitement chaque matin dans les rues de plusieurs villes. On étudie par estimations l'évolution mois par mois du nombre de lecteurs de ces trois quotidiens au cours de l'année 2011.

Le document suivant fournit le début de la feuille de calcul utilisée. Les valeurs de certaines cellules (noircies) ont été masquées.

	A	B	C	D
1		Nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien La Cité	Nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien Le Temps	Nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien l'Urbain
2	Mois 1	128 500	62 300	12 500
3	Mois 2	132 355	73 000	23 700
4	Mois 3	136 326	83 700	35 275
5	Mois 4	140 415	94 400	46 930
6	Mois 5	144 628	105 100	59 000
7	Mois 6	148 967	115 800	71 065
8	Mois 7	153 436	126 500	83 505
9	Mois 8	158 039	137 200	96 043
10	Mois 9	162 780	147 900	109 100
11	Mois 10	167 663	158 600	122 701
12	Mois 11	[redacted]	[redacted]	135 701
13	Mois 12	[redacted]	[redacted]	150 125

Partie A. Étude du nombre de lecteurs du quotidien *La Cité*

Le nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien *La Cité* est 128 500 en janvier 2011. On estime qu'il augmente ensuite de 3 % par mois. On note c_n ce nombre moyen pour le n-ième mois. Ainsi :

– en janvier 2011, 1er mois de l'étude, le nombre moyen de lecteurs par jour est $c_1 = 128\,500$;

– en février 2011, 2e mois de l'étude, le nombre moyen de lecteurs par jour est $c_2 = 132\,355$;

– c_{12} désigne le nombre moyen de lecteurs par jour en décembre 2011, 12e mois de l'étude.

1. a) Quelle est la nature de la suite (c_n) correspondante ? Justifier la réponse.

b) Quel est le nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien *La Cité* en décembre 2011 ? (Le résultat sera arrondi à l'unité.)

2. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3, puis recopiée vers le bas de B3 à B13 ?

3. Quel est le taux d'évolution, arrondi à 0,1 % près, du nombre moyen de lecteurs du quotidien *La Cité* de janvier 2011 à juin 2011 ?

Partie B. Étude du nombre de lecteurs du quotidien *Le Temps*

Le nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien *Le Temps* est 62 300 en janvier 2011. On estime qu'il augmente ensuite de 10 700 par mois. On note t_n ce nombre moyen pour le n-ième mois. Ainsi :

– en janvier 2011, 1er mois de l'étude, le nombre moyen de lecteurs par jour est $t_1 = 62\,300$;

– en février 2011, 2e mois de l'étude, le nombre moyen de lecteurs par jour est $t_2 = 73\,000$;

– t_{12} désigne le nombre moyen de lecteurs par jour en décembre 2011, 12e mois de l'étude.

1. a) Quelle est la nature de la suite (t_n) correspondante ? Justifier la réponse.

b) Quel est le nombre moyen de lecteurs par jour du quotidien *Le Temps* en décembre 2011 ?

2. Quelle formule a été saisie dans la cellule C3, puis recopiée vers le bas de C3 à C13 ?

3. Quel est le taux d'évolution, arrondi à 0,1 % près, du nombre moyen de lecteurs du quotidien *Le Temps* de janvier 2011 à juin 2011 ?

Partie C. Étude du nombre de lecteurs du quotidien *L'Urbain*

Le nombre moyen estimé de lecteurs par jour du quotidien *L'Urbain* pour chaque mois entre janvier 2011 et décembre 2011 est donné dans la colonne D du tableau.

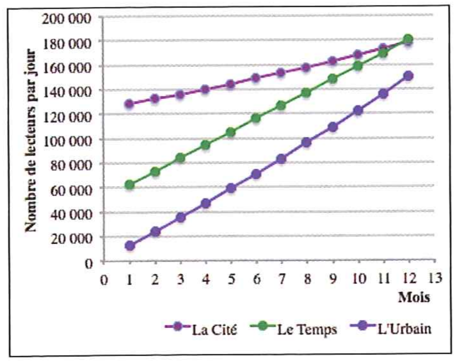
La croissance de ce nombre moyen peut-elle être considérée comme linéaire pour les douze mois de janvier 2011 à décembre 2011?

Peut-elle être considérée comme exponentielle sur cette même période ? Justifier chaque réponse.

(Voir Le saviez-vous de l'**AG7** page 87.)

Partie D. Étude comparative des nombres de lecteurs des trois quotidiens en 2011

Sur tableur, on a obtenu le graphique suivant.



Ce graphique représente le nombre moyen estimé de lecteurs par jour de chaque quotidien pour chaque mois entre janvier 2011 et décembre 2011.

À l'aide du graphique et des résultats obtenus aux questions **A1. b)** et **B1. b)**, déterminer, selon la période, entre janvier 2011 et décembre 2011, le quotidien qui possède le plus grand nombre de lecteurs.

Tableur sur papier

Énoncé

Afin d'acquérir et d'aménager une boutique du centre ville, un investisseur décide de contracter un emprunt d'un montant de 100 000 euros.

Dans le but d'obtenir les meilleures conditions pour ce prêt, il a contacté deux banques, B et C :

la banque B lui propose de rembourser ce prêt sur 7 ans en sept annuités, la première, notée u_1, étant égale à 15 000 euros et chacune des suivantes, notées $u_2, u_3, \ldots, u_7$, étant obtenue en ajoutant 1 800 euros à la précédente ;

la banque C lui propose également de rembourser ce prêt sur 7 ans en sept annuités, la première, notée v_1, étant égale à 19 000 euros et chacune des suivantes, notées $v_2, v_3, \ldots, v_7$, étant en augmentation de 2 % par rapport à la précédente.

1. a) Expliquez pourquoi les sept annuités de la banque B sont les sept premiers termes d'une suite arithmétique ; donner son terme initial et sa raison.
Quel est le montant de la quatrième annuité ?

b) Expliquez pourquoi les sept annuités de la banque C sont les sept premiers termes d'une suite géométrique ; donner son terme initial et sa raison.
Quel est le montant de la quatrième annuité ?

2. Afin de comparer les deux propositions, l'investisseur prépare la feuille de calcul suivante.

	A	B	C
1	Année	Montant de l'annuité banque *B*	Montant de l'annuité banque *C*
2	1	15 000	19 000,000
3	2	16 800	19 380,000
4	3	18 600	19 767,600
5	4	20 400	20 162,952
6	5	22 200	20 566,211
7	6	24 000	20 977,535
8	7	25 800	21 397,086
9	Somme totale remboursée	142 800	141 251,384

a) En relisant la feuille de calcul, l'investisseur s'aperçoit que l'arrondi à 10^{-3} utilisé dans la colonne C ne convient pas pour des euros (un chiffre de trop).
Quel bouton de la barre d'outils permet de passer à l'arrondi à 10^{-2} ? (*Voir rabats de couverture.*)

b) Décrire une procédure permettant d'éviter, lors de la création de la feuille de calcul, de saisir une à une toutes les années dans la colonne A.

c) Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B3 (respectivement C3), puis recopiée vers le bas, de B3 à B8 (respectivement C3 à C8) ?
Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule B5 (respectivement C5) ?

d) Parmi les suivantes, quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B9 pour obtenir la somme des sept annuités de la banque B ?

(1) =SOMME(B) ; (2) =SOMME(B1:B7) ; (3) =SOMME(B2:B8).

Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule C9 pour obtenir la somme des sept annuités de la banque C ?
Quel bouton de la barre d'outils permet de calculer directement ces sommes ? (*Voir rabats de couverture.*)

3. Quelle banque semble offrir à l'investisseur la solution la plus avantageuse ?