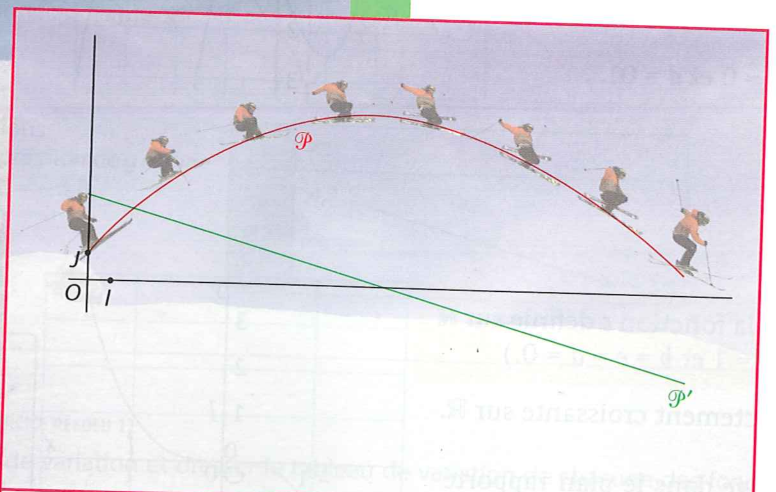
# 8 Dérivées






**La fonction dérivée de la fonction dont la courbe représentative est la parabole $\mathscr{P}$ a pour courbe représentative la droite $\mathscr{P}'$.**

# 1 Fonctions polynômes de degré 3

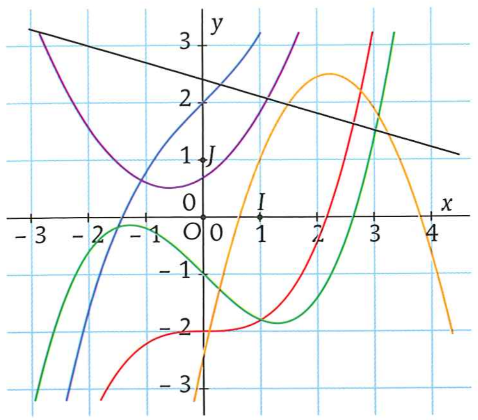
## Activité Un degré de plus

**1.** Sur le graphique ci-contre figurent des tracés des courbes représentatives de six fonctions polynômes définies sur ℝ : une de degré 1, deux de degré 2 et trois de degré 3.

**a)** Indiquer les couleurs des courbes des trois fonctions polynômes de degré 3.

**b)** Ces trois fonctions sont $f$, $g$ et $h$, définies par $f(x) = 0{,}2x^3 - 2$, $g(x) = 0{,}2x^3 + x + 2$ et $h(x) = 0{,}2x^3 - x - 1$.
Déterminer la couleur de la courbe représentative de chacune de ces trois fonctions.

**2.** Tracer sur calculatrice ou tableur les courbes représentatives des fonctions $k$, $l$ et $m$, définies sur ℝ par
$k(x) = -0{,}2x^3 + 2$, $l(x) = -0{,}2x^3 - x - 2$ et $m(x) = -0{,}2x^3 + x + 1$.
(Pour le tracé sur tableur, voir **AG1** page 172.)



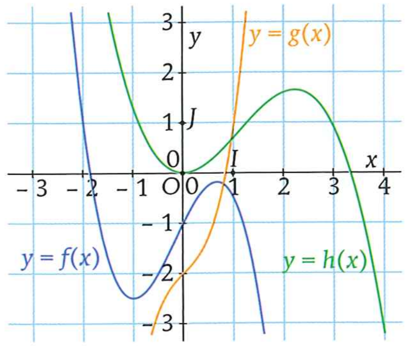
## Cours

### 1 Définition

Une fonction polynôme $f$ de degré 3 (ou du troisième degré) est une fonction qui s'exprime, pour tout nombre réel $x$, sous la forme
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

**BON À SAVOIR**
« de degré 3 » parce que l'exposant le plus grand de $x$ est 3.

**Exemple :**
On donne ci-contre un tracé des courbes représentatives des fonctions $f$, $g$ et $h$, définies sur ℝ par :
$f(x) = -x^3 - 0{,}5x^2 + 2x - 1$
(ici, $a = -1$, $b = -0{,}5$, $c = 2$ et $d = -1$) ;
$g(x) = 2x^3 + x - 2$
(ici, $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = -2$) ;
$h(x) = -0{,}3x^3 + x^2$
(ici, $a = -0{,}3$, $b = 1$, $c = 0$ et $d = 0$).

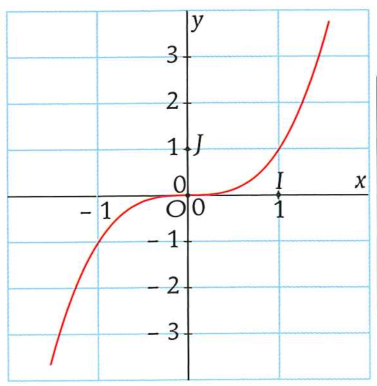



### 2 Fonction cube

La fonction cube est la fonction $c$ définie sur ℝ par $c(x) = x^3$. (Ici, $a = 1$ et $b = c = d = 0$.)

Cette fonction est strictement croissante sur ℝ.

Sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, I, J)$ présente une symétrie par rapport au point O.



**BON À SAVOIR**
La fonction cube est une fonction usuelle.
L'allure de sa courbe représentative doit être mémorisée.



## Exercice résolu 1 Comment conjecturer le sens de variation, sur un intervalle $[a ; b]$, d'une fonction polynôme de degré 3, à l'aide de la calculatrice ou du tableur ?

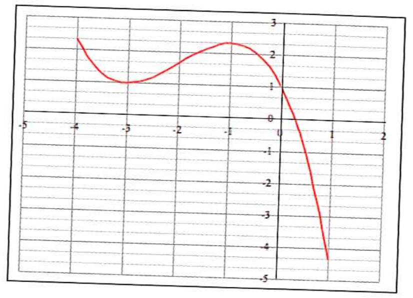
Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes.

**a)** $f$ est définie sur $[-4 ; 1]$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.

**b)** $g$ est définie sur $[-3 ; 2]$ par $g(x) = -0{,}1x^3 - x - 1$.

**SOLUTION**

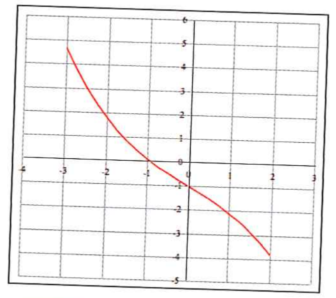
**a)** • Tracé sur tableur de la courbe représentative de $f$ ci-contre.



• À partir de ce tracé, on peut conjecturer que le ou les intervalles de l'axe des abscisses pour lesquels la courbe représentative de $f$ :
« monte » est $]-3 ; -1[$ ; $f$ est strictement croissante sur cet intervalle ;
« descend » sont $[-4 ; -3[$ et $]-1 ; 1]$ ; $f$ est strictement décroissante sur chacun de ces deux intervalles.
Tableau de variation :
le calcul avec l'expression de $f$ donne
$f(-4) = f(-1) = \frac{7}{3}$, $f(-3) = 1$
et $f(1) = -\frac{13}{3}$.

| $x$ | $-4$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{7}{3}$ | ↘ | $1$ | ↗ | $\frac{7}{3}$ | ↘ | $-\frac{13}{3}$ |

**b)** • Tracé sur tableur de la courbe représentative de $g$ ci-contre.



• À partir de ce tracé, on peut conjecturer que la courbe représentative de $g$ « descend » pour les abscisses de l'intervalle de définition $[-3 ; 2]$ ;
$g$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation :
le calcul avec l'expression de $g$ donne
$g(-3) = 4{,}7$ et $g(2) = -3{,}8$.

| $x$ | $-3$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $4{,}7$ | ↘ | $-3{,}8$ |

**MÉTHODE 1**

**Pour conjecturer le sens de variation, sur un intervalle $[a ; b]$, d'une fonction polynôme de degré 3, à l'aide de la calculatrice ou du tableur :**
1. On trace sur calculatrice ou tableur la courbe représentative de la fonction.
(Pour le tracé sur tableur, voir **AG1** page 172.)
2. On détermine sur l'axe des abscisses les intervalles pour lesquels la courbe représentative de $f$ :
• « monte » ; $f$ est strictement croissante sur chacun d'eux ;
• « descend » ; $f$ est strictement décroissante sur chacun d'eux.
→ *Voir Lexique page 206.*

## Application

**Application** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 1)

Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes.

**a)** $f$ est définie sur $[-3 ; 2]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ ;

**b)** $g$ est définie sur $[-2 ; 4]$ par $g(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}5x^2 + x - 1$.

→ VOIR EXERCICES 3 À 8, PP. 167 ET 168

# 2 Fonctions dérivées et tangentes

## Activité — Courbes et droites particulières

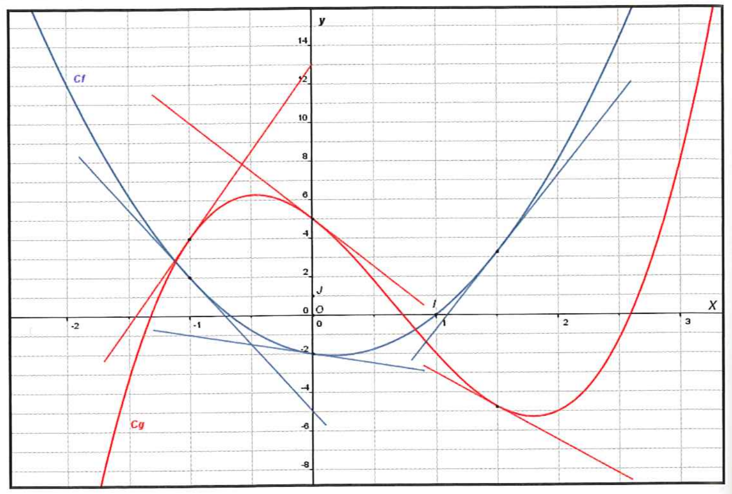
Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$ et $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$.

**1.** On note $f'$ et $g'$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 6x - 1$ et $g'(x) = 6x^2 - 8x - 5$.
(Observer comment les expressions de ces fonctions ont été obtenues :
$f'(x) = 2 \times 3x^{2-1} - 1x^{1-1} - 0 \times 2$ et $g'(x) = 3 \times 2x^{3-1} - 2 \times 4x^{2-1} - 1 \times 5x^{1-1} + 0 \times 5$).
Reproduire et compléter le tableau suivant.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1,5$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $g'(x)$ | | | |

**2.** On donne un tracé (obtenu avec le logiciel GeoGebra) :
- des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ (en bleu) et $\mathscr{C}_g$ (en rouge) des fonctions $f$ et $g$ ;
- des droites (en bleu) passant par les points d'abscisses respectives $-1$, $0$ et $1,5$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de coefficients directeurs respectifs $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1,5)$ ;
- des droites (en rouge) passant par les points d'abscisses respectives $-1$, $0$ et $1,5$ de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de coefficients directeurs respectifs $g'(-1)$, $g'(0)$ et $g'(1,5)$.

Quel nom peut-on donner à ces droites, vis-à-vis des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ?




## Cours

### 1 Fonctions dérivées des fonctions polynômes de degré 2 et de degré 3

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 ou 3, définie sur $\mathbb{R}$.

On appelle **fonction dérivée de $f$** la fonction définie sur $\mathbb{R}$, notée $f'$, dont l'expression est donnée dans le tableau suivant.

| Expression de $f$ | Expression de $f'$ |
|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels, $a \neq 0$) | $f'(x) = 2ax + b$ |
| $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels, $a \neq 0$) | $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ |

**BON À SAVOIR**

Observer comment les expressions de $f'$ ont été obtenues :
- $f'(x) = 2 \times ax^{2-1} + 1 \times bx^{1-1} + 0 \times c$ ;
- $f'(x) = 3 \times ax^{3-1} + 2 \times bx^{2-1} + 1 \times cx^{1-1} + 0 \times d$.

### 2 Tangente à une courbe en un point $P$ d'abscisse $x_P$

La tangente à la courbe représentative d'une fonction $f$, en un point $P$ d'abscisse $x_P$, est la droite passant par $P$ et de coefficient directeur $f'(x_P)$.

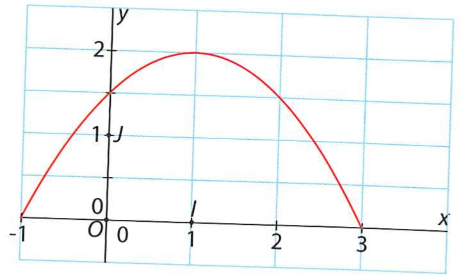
**Exemple :**

Pour les fonctions $f$ et $g$ de l'activité de cette page :
la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$ est la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(-1) = -7$ (tracée en bleu sur le graphique) ;
la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est la droite passant par ce point et de coefficient directeur $g'(0) = -5$ (tracée en rouge sur le graphique).



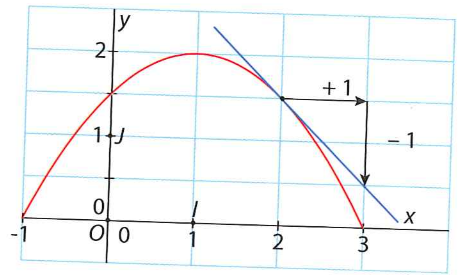
## Exercice résolu 2 — Comment tracer sur papier la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ ?

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1 ; 3]$ par $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$.
On donne un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ dans le plan rapporté à un repère.
Tracer la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.




**SOLUTION**

- $f'(x) = -2 \times 0,5x + 1 \times 1 = -x + 1$, donc $f'(2) = -2 + 1 = -1$.
- $f(2) = -0,5 \times 2^2 + 2 + 1,5 = 1,5$.
$\mathscr{T}$ est la droite passant par le point de coordonnées $(2 ; 1,5)$ et de coefficient directeur $-1$.




**MÉTHODE 2**

**Pour tracer sur papier la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ :**
1. On calcule $f'(x_P)$.
2. On se positionne sur la courbe au point $P$ de coordonnées $(x_P ; f(x_P))$.
3. On trace la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(x_P)$.

*(Voir Chapitre 1 Méthode 2 page 11.)*

## Exercice résolu 3 — Comment déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ ?

Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
On note $\mathscr{C}$ sa coube représentative dans le plan rapporté à un repère.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point $P$ d'abscisse $-1$.

**SOLUTION**

- $f(-1) = -2 \times (-1)^2 + (-1) + 1 = -2$.
$f'(x) = -2 \times 2x + 1 = -4x + 1$, donc $f'(-1) = -4 \times (-1) + 1 = 5$.
- L'équation réduite de $\mathscr{T}$ est de la forme $y = f'(-1)x + b$, soit $y = 5x + b$.
- Les coordonnées $(-1 ; -2)$ étant celles d'un point de $\mathscr{T}$, elles vérifient son équation : $-2 = 5 \times (-1) + b$, où $b$ est à calculer.
On obtient $-2 = -5 + b$, soit $b = 3$.
L'équation réduite de $\mathscr{T}$ est $y = 5x + 3$.

**MÉTHODE 3**

**Pour déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ :**
1. On calcule $f(x_P)$ et $f'(x_P)$.
2. On écrit l'équation de la tangente sous la forme $y = f'(x_P)x + b$.
3. On calcule $b$ avec l'égalité $f(x_P) = f'(x_P)x_P + b$.
(Équation du premier degré, d'inconnue $b$.)

## Applications

**Application 1** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 2)

Soit $f$ la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = x^3$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente $\mathscr{T}_{-1}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**Application 2** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

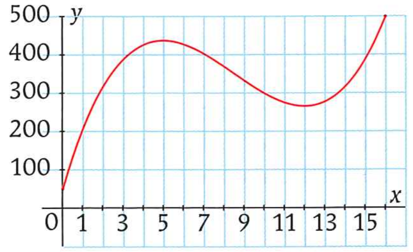
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

→ VOIR EXERCICES 35 À 44, PP. 169 ET 170

# 3 Dérivée et sens de variation d'une fonction

## Activité Dériver et y trouver un sens …

Une entreprise fabrique chaque jour $x$ kilogrammes d'un produit ($0 \leqslant x \leqslant 16$).
Le coût de fabrication, en euros, est exprimé par la fonction $f$, définie sur $[0\,;16]$ par $f(x) = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 50$.
La courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère est donnée ci-contre.




**1.** Calculer $f(0)$, $f(5)$, $f(12)$ et $f(16)$ ; interpréter les résultats obtenus en termes de coût de fabrication.

**2. a)** Calculer $f'(x)$.

**b)** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$, puis factoriser $f'(x)$.

**c)** En déduire le signe de $f'(x)$. Présenter les résultats dans un tableau. (*Voir Lexique p. 206.*)

**3.** À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de $f$ ; dresser son tableau de variation.

**4.** Reproduire et compléter le tableau suivant, en fusionnant les tableaux des questions **2. c)** et **3.**.

| $x$ | 0 | … | … | 16 |
|---|---|---|---|---|
| **Signe de $f'(x)$** | | 0 | 0 | |
| **Sens de variation de $f$** | | | | |

Quel est le sens de variation de $f$ sur un intervalle où le signe de $f'(x)$ est + ?
Quel est le sens de variation de $f$ sur un intervalle où le signe de $f'(x)$ est – ?

**BON À SAVOIR**
La factorisation d'un trinôme est traitée au Chapitre 6, Méthode 2 p. 121.

**BON À SAVOIR**
On a ici un tableau de variation réalisé à partir du signe de la dérivée.
De tels tableaux sont couramment utilisés.

## Cours

### 1 Signe de la dérivée et sens de variation

$f$ désigne une fonction polynôme de degré 2 ou 3, définie sur un intervalle $I$.
Soit $J$ un intervalle inclus dans $I$.

- Si, pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, alors $f$ est strictement croissante sur $J$.
- Si, pour tout $x \in J$, $f'(x) < 0$, alors $f$ est strictement décroissante sur $J$.

### 2 Dérivée et sens de variation d'une fonction polynôme de degré 2

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels, $a \neq 0$. Puisque $f'(x) = 2ax + b$, $f'(x) = 0$ équivaut à $2ax + b = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.

En posant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, on retrouve les résultats de la page 118 sur le sens de variation de $f$, selon le signe de $a$, obtenus ici à partir du signe de la dérivée $f'$.

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $f(x_0)$ | ↗ | |

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(x_0)$ | ↘ | |

**BON À SAVOIR**
Ci-contre figurent deux **conditions suffisantes** « si … alors ».
Il suffit de vérifier la condition donnée (par exemple : pour tout $x$ de $J$, $f'(x) > 0$) pour que la conclusion soit vraie (par exemple : $f$ est strictement croissante sur $J$).
→ *Voir Lexique page 206.*



## Exercice résolu 4 Comment étudier le sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée ?

**1.** Étudier le sens de variation de la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.
**2.** Dresser un tableau de variation de $f$.

**MÉTHODE 4**
**Pour étudier le sens de variation d'une fonction $f$ en utilisant sa dérivée :**
**1.** On calcule $f'(x)$ en utilisant les expressions données en page 162 pour les fonctions polynômes de degrés 2 ou 3.
**2.** On étudie le signe de $f'(x)$, en utilisant s'il y a lieu un tableau.
**3.** On en déduit le sens de variation de $f$.

**SOLUTION**

**1.** • $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$.

• On étudie le signe de $f'(x)$.
Pour cela, on résout l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire $3x^2 - 4x + 1 = 0$ (équation du second degré).
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$.
Puisque $\Delta > 0$, l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions,

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{4}}{2\times 3} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{4}}{2\times 3} = 1.$$

Le coefficient $a$ de $x^2$ est égal à 3 et $3 > 0$, donc $f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Tableau de signe.

| $x$ | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

• Puisque, pour tout $x$ de $\left[-2\,;\frac{1}{3}\right[$, $f'(x) > 0$, $f$ est strictement croissante sur $\left[-2\,;\frac{1}{3}\right[$.

Puisque, pour tout $x$ de $\left]\frac{1}{3}\,;1\right[$, $f'(x) < 0$, $f$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3}\,;1\right[$.

Puisque, pour tout $x$ de $]1\,;3]$, $f'(x) > 0$, $f$ est strictement croissante sur $]1\,;3]$.

**2.** On en déduit le tableau de variation suivant, en y portant les images par $f$ des bornes de l'intervalle et des images des nombres en lesquels la dérivée est nulle.

| $x$ | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $-17$ | ↗ | $\frac{31}{27}$ | ↘ | 1 | ↗ | 13 |

## Applications

**Application 1** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)
Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, étudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.
**1.** $f$ définie sur $[-6\,;5]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
**2.** $f$ définie sur $[-3\,;5]$ par $f(x) = -x^2 + x + 2$.
**3.** $f$ définie sur $[-3\,;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

**Application 2** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)
Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, étudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.
**1.** $f$ définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2$.
**2.** $f$ définie sur $[-3\,;2]$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.
**3.** $f$ définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = x^2 + x$.

→ VOIR EXERCICES 53 À 71, P. 171

# L'essentiel

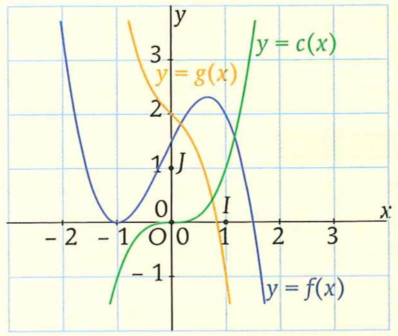
## Ce que je dois savoir

### 1 Fonctions polynômes de degré 3

Une **fonction polynôme $f$ de degré 3** est une fonction qui s'exprime, pour tout nombre réel $x$, sous la forme
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

**Exemples :**

Les fonctions $f$, $g$ et $c$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^3 - 0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$ ;
$g(x) = -2x^3 - x + 2$ ;
$c(x) = x^3$.
Un tracé de leurs courbes représentatives est donné ci-contre.




### 2 Fonctions dérivées des fonctions polynômes de degré 2 ou 3

| Expression de $f$, définie sur $\mathbb{R}$ | Expression de $f'$, définie sur $\mathbb{R}$ |
|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels, $a \neq 0$ ) | $f'(x) = 2ax + b$ |
| $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels, $a \neq 0$ ) | $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ |

### 3 Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point $P$

La **tangente à la courbe représentative d'une fonction** $f$, en un point $P$ d'abscisse $x_P$, est la droite passant par le point $P$ et de coefficient directeur $f'(x_P)$.

### 4 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Le **sens de variation d'une fonction** $f$ définie sur un intervalle $I$ **s'obtient à partir du signe de sa fonction dérivée**.
Soit $J$ un intervalle inclus dans $I$.

- Si, pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, alors $f$ est strictement croissante sur $J$.
- Si, pour tout $x \in J$, $f'(x) < 0$, alors $f$ est strictement décroissante sur $J$.

## Ce que je dois savoir faire

| SAVOIR-FAIRE | MÉTHODE | EXERCICES |
|---|---|---|
| • Conjecturer le sens de variation d'une fonction à partir de sa courbe représentative | 1 page 161 | 3 à 8 |
| • Calculer $f'(x)$, où $f'$ est la fonction dérivée d'une fonction polynôme $f$ de degré 2 ou 3 | | 9 à 28 |
| • Tracer sur papier la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point $P$ d'abscisse $x_P$. | 2 page 163 | 35 à 38 |
| • Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$. | 3 page 163 | 39 à 44 |
| • Étudier le sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée | 4 page 165 | 53 à 71 |



# Exercices

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

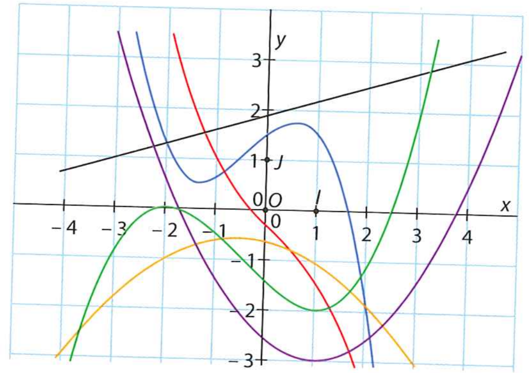
### Fonctions polynômes de degré 3

**1** Voici les expressions de six fonctions polynômes $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$ et $f_6$, définies sur $\mathbb{R}$ :

$f_1(x) = 2x^2 - 3x - 4$ ; $f_2(x) = -x - 2$ ;
$f_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ ; $f_4(x) = -0{,}2x^2 + 2x$ ;
$f_5(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{3}$ ; $f_6(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 5$.

Indiquer lesquelles sont de degré 1, de degré 2, de degré 3.

**2** Sur le graphique suivant figurent des tracés des courbes représentatives de six fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$.



**1.** Indiquer les couleurs des courbes des fonctions polynômes de degré 1, de celles de degré 2 et de celles de degré 3.

**2. a)** L'une des fonctions de degré 3 est strictement décroissante. Indiquer la couleur de sa courbe représentative.

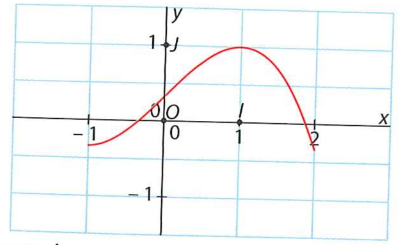
**b)** L'une des fonctions a le tableau de variation suivant. Indiquer la couleur de sa courbe représentative.

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-3$ | ↗ |

**c)** Une autre des fonctions a le tableau de variation suivant. Indiquer la couleur de sa courbe représentative.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ |

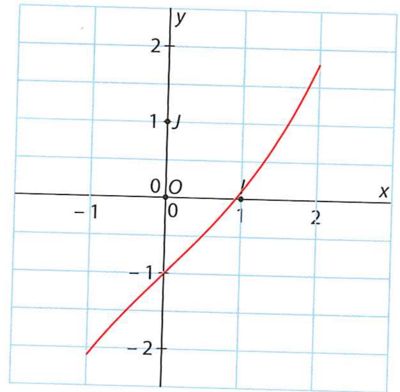
**3** C On donne un tracé de la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-1 ; 2]$ par
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{3}$.



Conjecturer le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

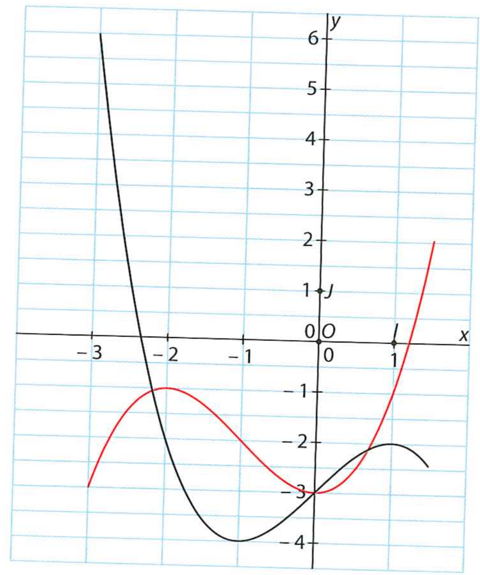
CONSEIL
Voir exercice résolu 1 page 161.

**4** On donne un tracé de la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-1 ; 2]$ par $f(x) = 0{,}1\,x^3 + x - 1$.



Conjecturer le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

**5** On donne un tracé des courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-3 ; 1{,}5]$ par $f(x) = 0{,}5\,x^3 + 1{,}5x^2 - 3$ et $g(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x - 3$.



**1.** Indiquer la couleur de la courbe représentative de $f$ et celle de la courbe représentative de $g$.

**2.** Conjecturer le sens de variation de $f$ et celui de $g$, puis dresser leurs tableaux de variation.

**6** Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ définie sur $[-4\,;1]$ par $f(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}8x^2 + 2{,}4x - 1$.

**7** Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

**8** Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction $f$ définie sur $[-2\,;1]$ par $f(x) = -x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5\,x - 1$.

## Fonctions dérivées et tangentes

***Pour les exercices 9 à 25, calculer $f'(x)$, où $f'$ est la fonction dérivée de la fonction polynôme $f$ de degré 2 ou 3, définie sur $\mathbb{R}$.***

**9** C **a)** $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

**b)** $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 1$.

**CONSEIL**
Utiliser les expressions de $f'(x)$ données dans le cours, page 162.

**10** $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1$.

**11** $f(x) = -2x^2 - 4x - 10$.

**12** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10x - 4$.

**13** $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 5x - 1$.

**14** $f(x) = 0{,}1x^2 + \frac{1}{3}x - 1$.

**15** $f(x) = -2x^2 - 1$.

**16** $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x$.

**17** C $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 10x + 5$.

**18** $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 2$.

**19** $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - x + 20$.

**20** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$.

**21** $f(x) = 2x^3 - 3x + 8$.

**22** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$.

**23** $f(x) = \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x$.

**24** $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}$.

**25** $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - x + 2$.

**26** Soit $f$ la fonction définie sur $[-3\,;2]$ par $f(x) = 2x^2 + x - 1$.
Reproduire et compléter le tableau suivant.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |
| $f'(x)$ | | | | | | | |

**27** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 + x - 1$.
Reproduire et compléter le tableau suivant.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |
| $f'(x)$ | | | | | | |

**28** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
Donner une interprétation graphique de chacune de ces deux valeurs.

**CONSEIL**
Ne pas confondre :
$f(x_P)$, qui est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x_P$, avec $f'(x_P)$, qui est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x_P$.

**29** **QCM**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Pour chacun des cas suivants, une seule des réponses est exacte. Indiquer laquelle.

**1.** La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées :
**a)** $(-2\,;0)$ ; **b)** $(0\,;1)$ ; **c)** $(0\,;-2)$ ; **d)** $(0\,;-1)$.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :
**a)** $-2$ ; **b)** 0 ; **c)** 1 ; **d)** 0,5.





**30** **QCM**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x - 5$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Pour chacun des cas suivants, une seule des réponses est exacte. Indiquer laquelle.

**1.** La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées :
**a)** $(1\,;-3)$ ; **b)** $(1\,;-7)$ ; **c)** $(-3\,;1)$ ; **d)** $(-7\,;1)$.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :
**a)** $-5$ ; **b)** $-3$ ; **c)** 1 ; **d)** 3.

**31** C Soit $f$ la fonction définie sur $[-4\,;4]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + x - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**32** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

**33** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

**34** Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\,;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère

**1.** Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

**2.** Calculer l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

**35** C Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = x^2 - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente $\mathscr{T}_{-1}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**CONSEIL**
Voir exercice résolu 2 page 163

**36** Soit $f$ la fonction définie sur $[-1{,}5\,;1{,}5]$ par $f(x) = x^3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente $\mathscr{T}_{-1}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**37** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = -0{,}5x^2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 3 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente $\mathscr{T}_{-0,5}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-0{,}5$.

**38** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = 0{,}5x^3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente $\mathscr{T}_{-1}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**39** C Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = -x^2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,5.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

**CONSEIL**
Voir exercice résolu 3 page 163.

**40** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;1]$ par $f(x) = -x^2 - x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

**41** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;0]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

**42** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,5.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

Exercices

**43** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2 ; 1]$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer laquelle des trois équations suivantes est celle de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 :
$y = 2{,}5x + 1$ ; $y = 3x + 1$ ; $y = 2x + 1$.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

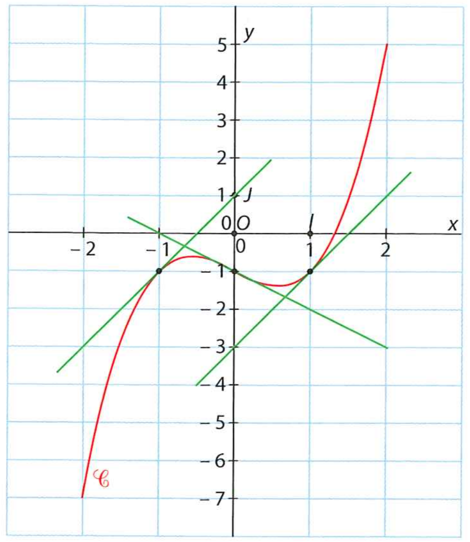
**44** Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Déterminer laquelle des trois équations suivantes est celle de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{3}{4}$.

$y = -1{,}6x + 1$ ; $y = -x + \frac{25}{16}$ ; $y = -1{,}5x + \frac{25}{16}$.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran d'une calculatrice pour contrôler le résultat.

**45** On donne un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ définie sur $[-2 ; 2]$.
Sur le graphique figurent aussi les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $-1$, 0 et 1.

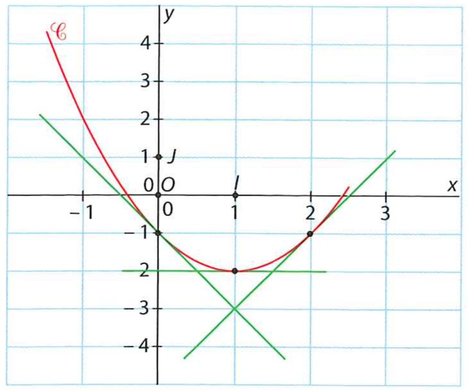



**1.** Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

**2.** Retrouver ces résultats par le calcul, sachant que $f$ est définie par $f(x) = x^3 - x - 1$.

**46** On donne un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ définie sur $[-1{,}5 ; 2{,}5]$.
Sur le graphique figurent aussi les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0, 1 et 2.

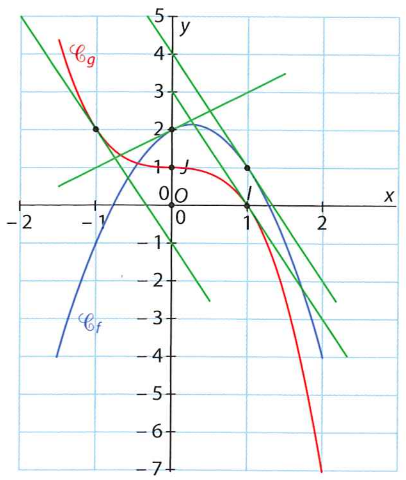





**1.** Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

**2.** Retrouver ces résultats par le calcul, sachant que $f$ est définie par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

**47** On donne un tracé des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur $[-1{,}5 ; 2]$.
Sur le graphique figurent aussi les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1 et les tangentes à $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisses $-1$ et 1.




**1.** Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$, $g'(-1)$ et $g'(1)$.

**2.** Retrouver ces résultats par le calcul, sachant que $f$ est définie par $f(x) = -2x^2 + x + 2$ et $g$ par $g(x) = -x^3 + 1$.

**48** C Soit $f$ la fonction définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** Résoudre l'équation $f'(x) = 2$ ; en déduire les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a un coefficient directeur égal à 2.

**CONSEIL**
Voir chapitre 6, méthode 2 page 121.



**49** Soit $f$ la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = 2x^2 - 2x + 0{,}5$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** Résoudre l'équation $f'(x) = -2$ ; en déduire le point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a un coefficient directeur égal à $-2$.

**50** Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2. a)** Résoudre l'équation $f'(x) = -0{,}5$ ; expliquer pourquoi il n'existe aucun point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a un coefficient directeur égal à $-0{,}5$.

**b)** Tracer $\mathscr{C}$ sur l'écran d'une calculatrice ; commenter d'un point de vue graphique le résultat de la question **2. a)**.

**51** **QCM**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-5 ; 3]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Pour chacun des cas suivants, une seule des réponses est exacte. Indiquer laquelle.

**1.** L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $-1$ est :
**a)** $-4{,}5$ ; **b)** $-5{,}5$ ; **c)** 4 ; **d)** 2.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$ est :
**a)** $-4{,}5$ ; **b)** $-5{,}5$ ; **c)** 4 ; **d)** 2.

**3.** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :
**a)** $y = -3x - 2$ ; **b)** $y = -2x + 3$ ; **c)** $y = 3x - 2$.

**52** **QCM**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-2 ; 3]$ par $f(x) = -x^3 + 2x + 1$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Pour chacun des cas suivants, une seule réponse est exacte. Indiquer laquelle.

**1.** L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 est :
**a)** 2 ; **b)** $-1$ ; **c)** 4 ; **d)** 5.

**2.** Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :
**a)** 2 ; **b)** $-1$ ; **c)** 4 ; **d)** 5.

**3.** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :
**a)** $y = -x + 3$ ; **b)** $y = 3x - 1$ ; **c)** $y = -x + 2$.

## Dérivée et sens de variation

***Pour les exercices 53 à 71, en utilisant la dérivée, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur I, puis dresser son tableau de variation.***

**53** C $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ ; $I = [-1 ; 3]$.

**CONSEIL**
Voir exercice résolu 4 page 165.
Contrôler les résultats avec un tracé de la courbe représentative de la fonction sur l'écran d'une calculatrice.

**54** $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$ ; $I = [-3 ; 2]$.

**55** $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ ; $I = [-2 ; 2]$.

**56** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ ; $I = [-1{,}5 ; 3]$.

**57** $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1$ ; $I = [0 ; 4]$.

**58** $f(x) = 0{,}1x^2 - x - 1$ ; $I = [-1 ; 10]$.

**59** $f(x) = -2x^2 - 4$ ; $I = [-1 ; 5]$.

**60** $f(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x$ ; $I = [0 ; 3]$.

**61** C $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ ; $I = [-3 ; 3]$.

**CONSEIL**
Étudier le signe du trinôme $f'(x)$.
Voir chapitre 6, méthode 3 page 123.

**62** $f(x) = -2x^3 - 0{,}5x^2 + x + 2$ ; $I = [-1 ; 3]$.

**63** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ ; $I = [-1 ; 2]$.

**64** $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x - 2$ ; $I = [-3 ; 3]$.

**65** $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 8$ ; $I = [-1 ; 1]$.

**66** $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ ; $I = [-1 ; 4]$.

**67** C $f(x) = 2x^3 - 6x$ ; $I = [0 ; 2]$.

**CONSEIL**
Attention : les éventuelles racines du trinôme $f'(x)$ peuvent ne pas appartenir à $I$.

**68** $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 0{,}5$ ; $I = [-1 ; 2]$.

**69** $f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}$ ; $I = [1 ; 3]$.

**70** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}$ ; $I = [0 ; 3]$.

**71** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x$ ; $I = [-3 ; 1]$.

Exercices

## Je fais le point

### SAVEZ-VOUS conjecturer le sens de variation, sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, d'une fonction polynôme de degré 3, à l'aide de la calculatrice ou du tableur ?

**ÉNONCÉ 1**

Conjecturer le sens de variation de la fonction $f$ définie sur $[-3\ ;\ 2]$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$, puis dresser son tableau de variation.

→ *voir solution page 199*

**ÉNONCÉ 2**

Conjecturer le sens de variation de la fonction $f$ définie sur $[-3\ ;0]$ par $f(x)= x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, puis dresser son tableau de variation.

→ *voir exercice résolu 1 page 161*

### SAVEZ-VOUS tracer sur papier la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ ?

**ÉNONCÉ 1**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1{,}5\ ;\ 1{,}5]$ par $f(x) = x^2$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,5.

→ *voir solution page 199*

**ÉNONCÉ 2**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1{,}5]$ par $f(x) = x^3$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**1.** Tracer $\mathscr{C}$ sur papier (unités graphiques : 3 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

**2.** Tracer la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse – 0,5.

→ *voir exercice résolu 2 page 163*

### SAVEZ-VOUS déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction, en un point $P$ d'abscisse $x_P$ ?

**ÉNONCÉ 1**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\ ;\ 2]$ par $f(x) = -2x^2 + x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0,5.

→ *voir solution page 199*

**ÉNONCÉ 2**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse – 1.

→ *voir exercice résolu 3 page 163*

### SAVEZ-VOUS étudier le sens de variation d'une fonction $f$ en utilisant sa dérivée ?

**ÉNONCÉ 1**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^3 - 0{,}75x^2 + 1$.
Étudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

→ *voir solution page 199*

**ÉNONCÉ 2**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = -2x^2 - 2x + 1$.
Étudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation

→ *voir exercice résolu 4 page 165*

## ACTIVITÉS GUIDÉES

### 72 AG1 Tracé sur tableur de la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3

**Partie A. Procédure**

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur l'intervalle $[-6\ ;2{,}5]$ par $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 - 0{,}5x - 1{,}5$ et $g(x) = 0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 4{,}5x + 1{,}5$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan rapporté à un repère.

**1. a)** Ouvrir une feuille de calcul du tableur.

**b)** Obtenir un tableau de valeurs de $f(x)$ et de $g(x)$ avec le pas 0,5. Pour cela :
– entrer les titres $x$ dans la cellule A1, $f(x)$ dans la cellule B1 et $g(x)$ dans la cellule C1 ;
– entrer la valeur – 6 dans la cellule A2, la valeur – 5,5 dans la cellule A3, puis utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule A19 ;
– entrer dans la cellule B2 la formule `=–0,1*A2^3+0,2*A2^2–0,5*A2–1,5` et utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule B19 ;
– entrer dans la cellule C2 la formule `=0,5*A2^3+1,5*A2^2–4,5*A2+1,5` et utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule C19.

**c)** À l'aide de l'assistant graphique, tracer les courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Pour cela :
– sélectionner la plage de cellules A1:A19 ;
– cliquer sur « Insertion », puis choisir « Nuage de points » et « Nuages de points avec courbes lissées » comme type de graphique ;
– mettre en forme le résultat avec les options du graphique.

**Partie B. Application**

**1.** Conjecturer le sens de variation et dresser le tableau de variation des fonctions $f$ et $g$.

**2.** Contrôler par le calcul le résultat obtenu à la question **1.**.

### 73 AG2 Détermination sur tableur de valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$, pour une fonction polynôme $f$ de degré 2 ou 3

**1.** Préparer une feuille de calcul sur le modèle suivant.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $f$ polynôme de degré 2 | | $f$ polynôme de degré 3 | |
| 2 | | | | |
| 3 | $a =$ | | $a =$ | |
| 4 | $b =$ | | $b =$ | |
| 5 | $c =$ | | $c =$ | |
| 6 | | | $d =$ | |
| 7 | | | | |
| 8 | $x =$ | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | $f(x) =$ | | $f(x) =$ | |
| 11 | $f'(x) =$ | | $f'(x) =$ | |

**2.** Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$, et $c$ sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

**a)** Entrer dans la cellule B10 la formule `=B3*B8^2+B4*B8+B5` et dans la cellule B11 la formule `=2*B3*B8+B4`.
À quoi ces formules correspondent-elles ?

**b)** Prendre les coefficients $a$, $b$ et $c$ de votre choix et les entrer dans les cellules B3, B4 et B5 ; choisir aussi une valeur de $x$ et l'entrer dans la cellule B8.
Qu'obtient-on alors dans les cellules B10 et B11 ?

**c)** On prend $a = -2$, $b = 1$ et $c = -1$.
Reproduire, puis compléter à l'aide du tableur le tableau suivant.

| $x$ | – 5 | – 1 | 0 | 2 | 3 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |
| $f'(x)$ | | | | | | |

**d)** Reprendre la question précédente avec $a = 3$, $b = 2$ et $c = -10$.

**3.** Soit $f$ une fonction polynôme de degré 3, définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

**a)** De la même manière qu'à la question **2. a)**, quelles formules entrer respectivement dans les cellules D10 et D11 pour y obtenir les valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$ ?

**b)** On prend $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = -1$.
Reproduire, puis compléter à l'aide du tableur le tableau suivant.

| $x$ | – 2 | – 1 | 0 | 0,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |
| $f'(x)$ | | | | | | |

### 74 AG3 Tracé sur tableur de la parabole représentative d'une fonction polynôme $f$ de degré 2 et de sa tangente en un point $P$ d'abscisse $x_P$

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2, définie sur $[-5\ ;\ 6]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$, et $c$ sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

**1.** Préparer une feuille de calcul sur le modèle suivant.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a =$ | | | $x$ | $f(x)$ | Ordonnée sur tangente |
| 2 | $b =$ | | | -5 | | |
| 3 | $c =$ | | | -4,5 | | |
| 4 | | | | -4 | | |
| 5 | $x_P =$ | | | -3,5 | | |
| 6 | $f(x_P) =$ | | | -3 | | |
| 7 | $f'(x_P) =$ | | | -2,5 | | |
| 8 | | | | -2 | | |
| 9 | | | | -1,5 | | |
| 10 | | | | -1 | | |
| 11 | | | | -0,5 | | |
| 12 | | | | 0 | | |
| 13 | | | | 0,5 | | |
| 14 | | | | 1 | | |
| 15 | | | | 1,5 | | |
| 16 | | | | 2 | | |
| 17 | | | | 2,5 | | |
| 18 | | | | 3 | | |
| 19 | | | | 3,5 | | |
| 20 | | | | 4 | | |
| 21 | | | | 4,5 | | |
| 22 | | | | 5 | | |
| 23 | | | | 5,5 | | |
| 24 | | | | 6 | | |

**2. a)** Entrer dans la cellule B6 la formule `=B1*B5^2+B2*B5+B3` et dans la cellule B7 la formule `=2*B1*B5+B2`. Qu'obtient-on dans ces cellules ?

**b)** Entrer dans la cellule E2 la formule `=B$1*D2^2+B$2*D2+B$3`, puis utiliser la poignée de remplissage jusqu'en E24. Qu'obtient-on dans cette cellule ?

**c)** Entrer dans la cellule F2 la formule `=B$7*D2+(B$6–B$7*B$5)`, puis utiliser la poignée de remplissage jusqu'en F24. Qu'obtient-on dans cette cellule ?

**3. a)** • Choisir par exemple $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ et $x_P = 2$, puis entrer ces valeurs dans les cellules B1, B2, B3 et B5.
• Pour obtenir la parabole représentative de $f$ et la tangente à cette parabole au point d'abscisse 2 :
sélectionner la plage de cellules D2:F24 ; cliquer sur « Insertion », puis choisir « Nuage de points » et « Nuage de points avec courbes lissées » comme type de graphique.

**b)** Remplacer la fonction de la question **3. a)** par $f$ telle que $f(x) = -2x^2 + x - 1$ et obtenir la parabole représentative de cette fonction et sa tangente au point d'abscisse – 2.
Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette tangente ?
En déduire son équation réduite.

c) Effectuer d'autres essais, avec de nouvelles fonctions et de nouvelles abscisses de points.

**75** ALGO AG4 **Obtention, pour une fonction polynôme de degré 2, de l'équation réduite d'une tangente à sa courbe représentative**

**1.** L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche permettant d'obtenir l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction polynôme $f$ de degré 2 en un point $P$ d'abscisse $x_P$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  dxp EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  xp EST_DU_TYPE NOMBRE
  fxp EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "valeur de a : "
  LIRE a
  AFFICHER a
  AFFICHER "valeur de b : "
  LIRE b
  AFFICHER b
  AFFICHER "valeur de c : "
  LIRE c
  AFFICHER c
  AFFICHER "Tangente au point d'abscisse xp = "
  LIRE xp
  AFFICHER xp
  fxp PREND_LA_VALEUR a*xp^2+b*xp+c
  dxp PREND_LA_VALEUR 2*a*xp+b
  AFFICHER "f'("
  AFFICHER xp
  AFFICHER ") = "
  AFFICHER dxp
  p PREND_LA_VALEUR fxp-dxp*xp
  AFFICHER "L'équation de la tangente au point d'abscisse "
  AFFICHER xp
  AFFICHER " est : y = "
  AFFICHER dxp
  AFFICHER "x + "
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

Reproduire l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »).

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = -2x^2 - x + 6$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Faire afficher l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

**3.** Soit $g$ la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $g(x) = -x^2 - 2x - 5$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Faire afficher l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

**4.** Effectuer d'autres essais, avec de nouvelles fonctions et de nouvelles abscisses de points.

**76** ALGO AG5 **Obtention, pour une fonction polynôme $f$ de degré 2 ou 3, de la valeur $f'(x)$ pour une valeur donnée de $x$**

**1.** L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche permettant d'obtenir, pour une fonction polynôme $f$ de degré 2 ou 3, la valeur $f'(x)$ pour une valeur donnée de $x$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  deg EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  dx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Degré du polynôme, 2 ou 3  ? "
  LIRE deg
  AFFICHER deg
  SI (deg==2) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "valeurs de a, b et c  ? "
    LIRE a
    AFFICHER a
    LIRE b
    AFFICHER b
    LIRE c
    AFFICHER c
    AFFICHER "valeur de x ?  "
    LIRE x
    AFFICHER x
    dx PREND_LA_VALEUR 2*a*x+b
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "valeurs de a, b, c et d  ?"
      LIRE a
      AFFICHER a
      LIRE b
      AFFICHER b
      LIRE c
      AFFICHER c
      LIRE d
      AFFICHER d
      AFFICHER "valeur de x ?  "
      LIRE x
      AFFICHER x
      dx PREND_LA_VALEUR 3*a*pow(x,2)+2*b*x+c
      FIN_SINON
  AFFICHER "f'("
  AFFICHER x
  AFFICHER ") = "
  AFFICHER dx
FIN_ALGORITHME
```

Reproduire l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »).

**2. a)** Soit $f$ la fonction définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 5$.
Déterminer $f'(1)$ et $f'(-1)$ en utilisant le programme précédent.

**b)** Soit $g$ la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $g(x) = -4x^3 - 3x - 1$.
Déterminer $g'(-1)$ en utilisant le programme précédent.

**c)** Effectuer d'autres essais, avec de nouvelles fonctions et de nouvelles valeurs de $x$.

## PROBLÈMES

**77** ** Soit $f$ la fonction définie sur $[-10 ; 10]$ par $f(x) = -0{,}25x^2 - 0{,}5x + 3{,}75$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

**1.** Étudier le signe de $f(x)$, pour $x$ appartenant à $[-10 ; 10]$. Présenter les résultats dans un tableau.

**2. a)** Calculer $f'(x)$.

**b)** Étudier le sens de variation de $f$ et établir son tableau de variation.

**3. a)** Quelle particularité présente la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1$ ? Justifier.





**b)** Existe-t-il un point de $\mathscr{C}$ en lequel le coefficient directeur de la tangente est égal à 2 ?
Si oui, déterminer les coordonnées de ce point.

**c)** Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

**78** * Un laboratoire fabrique et commercialise un produit. Ce laboratoire peut fabriquer de 5 à 30 kg de ce produit par jour.

**1.** Le coût total de production, exprimé en euros, est modélisé par la fonction $C$ définie sur $[5 ; 30]$ par $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 100x + 72$.

**a)** Tracer sur l'écran d'une calculatrice ou d'un tableur la courbe représentative de la fonction $C$.

**b)** Conjecturer le sens de variation de la fonction $C$.

**2.** Le prix de vente du produit est fixé à 60 € le kilogramme.

**a)** Exprimer en fonction de $x$ l'expression de la fonction $R$ modélisant la recette ($5 \leqslant x \leqslant 30$).

**b)** Ajouter au graphique précédent la courbe représentative de la fonction $R$.

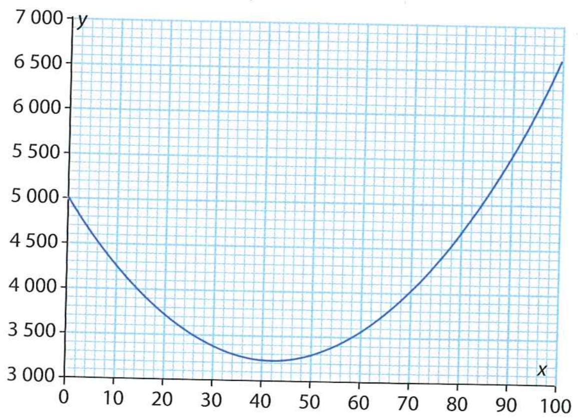
**c)** Déterminer graphiquement les valeurs de $x$ pour lesquelles le laboratoire réalise un bénéfice.

**3. a)** Écrire en fonction de $x$ l'expression de la fonction $B$ définie sur $[5 ; 30]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$. Que représente la fonction $B$ ?

**b)** Calculer $B'(x)$et étudier son signe ; en déduire le sens de variation de la fonction $B$ ; dresser son tableau de variation (on fera figurer dans ce tableau des valeurs arrondies à l'unité).

**c)** À partir de quelle quantité de produit fabriqué et vendu le bénéfice baisse-t-il ?

**79** *** M. Leboss, PDG d'une société fabriquant du mobilier urbain conditionné en lots, s'intéresse au coût unitaire de production de ces lots, en euros, ainsi qu'au bénéfice réalisé pendant une semaine.
Il considère que $x$ lots sont fabriqués chaque semaine, où $x$ est un entier compris entre 0 et 100.
Il obtient un tracé de la courbe représentative de la fonction $f$ modélisant le coût unitaire en fonction du nombre $x$ de lots fabriqués :




**1.** Déterminer graphiquement :

**a)** le coût unitaire de production lorsque la société fabrique 70 lots ;

**b)** l'autre quantité de lots fabriqués donnant le même coût unitaire de production.

**2. a)** Conjecturer graphiquement le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

**b)** En déduire la quantité de lots que l'entreprise doit produire pour que le coût unitaire soit minimal.

**3.** Chaque lot est vendu 5 000 €.
M. Leboss a calculé que le bénéfice, exprimé en euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend $x$ lots est donné par la fonction $B$ définie par $B(x) = -x^3 + 84x^2$, où $0 \leqslant x \leqslant 100$.

**a)** Calculer $B'(x)$.

**b)** Étudier le signe de $B'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction $B$.

**c)** Déterminer le nombre de lots que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ; calculer ce bénéfice maximal.

**d)** Montrer que le coût de production $C(x)$ pour $x$ lots produits est $C(x) = x^3 - 84x^2 + 5\,000x$.

**4. a)** Déduire de l'expression de $C(x)$ obtenue à la question précédente celle de $f(x)$.

**b)** Contrôler, en utilisant $f'(x)$, les conjectures faites graphiquement à la question **2.**.

**80** ** Dans une petite entreprise, la fabrication journalière de $x$ objets conduit à un coût de fabrication par objet, en euros, modélisé par la fonction $f$ définie sur $[0 ; 50]$ par $f(x) = x^2 - 40x + 480$.

**1. a)** Dresser le tableau de variation de $f$.

**b)** Tracer la courbe représentative de $f$ sur calculatrice ou tableur.

**2.** Chaque objet est vendu 12 €.

**a)** Ecrire en fonction de $x$ l'expression de la fonction $g$ modélisant la recette ($0 \leqslant x \leqslant 50$).

**b)** Ajouter la courbe représentative de $g$ sur le graphique.

**3.** À l'aide du graphique et d'un tableau de valeurs de $g$, conjecturer la quantité d'objet fabriqués et vendus qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

**4. a)** Justifier que le bénéfice, exprimé en euros, est donné par la fonction $B$ définie sur $[0 ; 50]$ par $B(x) = -x^2 + 52x - 480$.

**b)** Calculer $B'(x)$.

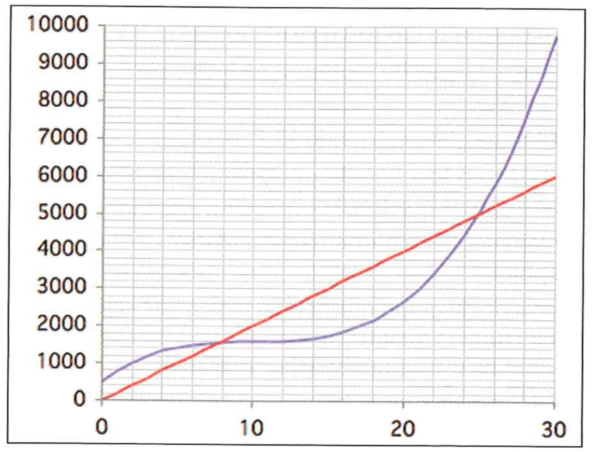
**c)** Étudier le signe de $B'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction $B$.

**d)** Confronter ce résultat à la conjecture de la question **3.**.

**81** *** Un artisan fabrique des bottes sur mesure. Toute paire de bottes est donc commandée, fabriquée et vendue.

Le coût de fabrication de $x$ paires de bottes, pour $0 \leqslant x \leqslant 30$, est modélisé par la fonction $c$ définie par $c(x) = x^3 - 30x^2 + 309x + 500$.
Chaque paire de bottes est vendue 201 € ; la fonction $r$ modélisant la recette est ainsi définie sur [0 ; 30] par $r(x) = 201x$.
Le tableau de valeurs et le graphique suivants ont été obtenus sur tableur.

| ◇ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | $x$ | $c(x)$ | $r(x)$ |
| 2 | 0 | 500 | 0 |
| 3 | 1 | 780 | 201 |
| 4 | 2 | 1006 | 402 |
| 5 | 3 | 1184 | 603 |
| 6 | 4 | 1320 | 804 |
| 7 | 5 | 1420 | 1005 |
| 8 | 6 | 1490 | 1206 |
| 9 | 7 | 1536 | 1407 |
| 10 | 8 | 1564 | 1608 |
| 11 | 9 | 1580 | 1809 |
| 12 | 10 | 1590 | 2010 |
| 13 | 11 | 1600 | 2211 |
| 14 | 12 | 1616 | 2412 |
| 15 | 13 | 1644 | 2613 |
| 16 | 14 | 1690 | 2814 |
| 17 | 15 | 1760 | 3015 |
| 18 | 16 | 1860 | 3216 |
| 19 | 17 | 1996 | 3417 |
| 20 | 18 | 2174 | 3618 |
| 21 | 19 | 2400 | 3819 |
| 22 | 20 | 2680 | 4020 |
| 23 | 21 | 3020 | 4221 |
| 24 | 22 | 3426 | 4422 |
| 25 | 23 | 3904 | 4623 |
| 26 | 24 | 4460 | 4824 |
| 27 | 25 | 5100 | 5025 |
| 28 | 26 | 5830 | 5226 |
| 29 | 27 | 6656 | 5427 |
| 30 | 28 | 7584 | 5628 |
| 31 | 29 | 8620 | 5829 |
| 32 | 30 | 9770 | 6030 |




**1. a)** Quelle formule a été entrée dans la cellule B2 puis recopiée jusqu'en B32 pour obtenir les valeurs de $c(x)$ ?

**b)** Quelle formule a été entrée dans la cellule C2 puis recopiée jusqu'en C32 pour obtenir les valeurs de $r(x)$ ?

**2. a)** Quel est le coût de fabrication de 20 paires de bottes ?

**b)** Quelle est la recette obtenue par la vente de ces 20 paires de bottes ?

**c)** En déduire le bénéfice correspondant.

**3. a)** À partir du graphique et du tableau de valeurs, conjecturer le sens de variation de la fonction $c$.

**b)** Retrouver ce résultat en calculant $c'(x)$, puis en étudiant son signe.

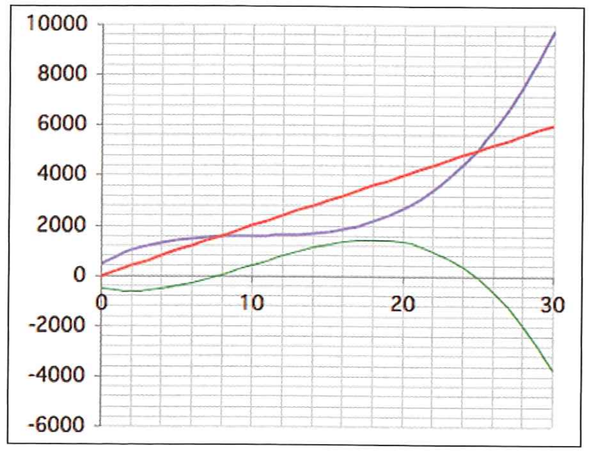
**4. a)** L'artisan réalise-t-il un bénéfice quel que soit le nombre de paire de bottes vendues ? Justifier.

**b)** Déterminer l'expression de la fonction $b$ modélisant le bénéfice réalisé par la vente de $x$ paires de bottes.

**c)** Calculer $b'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction $b$.

**5. a)** Quelle formule doit-on entrer dans la cellule D2 et recopier jusqu'en D32 pour obtenir les valeurs de $b(x)$ ?

**b)** On obtient le graphique suivant en ajoutant au graphique précédent le tracé de la fonction $b$.




À partir de ce dernier graphique, retrouver les résultats obtenus aux questions **4. a)** et **4. c)**.

**82** * Le coût de production hebdomadaire de $x$ kilogrammes de miel produit par un apiculteur est donné, en euros, par $c(x) = 0{,}04x^2 + x + 150$, pour $0 \leqslant x \leqslant 120$.

**1.** Calculer le coût de production de 40 kg de miel, puis celui de 60 kg.

**2. a)** Calculer le coût de production de 100 kg de miel, puis celui de 101 kg.

**b)** Calculer $c(101) - c(100)$.

**c)** Cette différence représente-t-elle le coût supplémentaire entraîné par la production du 100ᵉ ou du 101ᵉ kg de miel ?

**4. a)** Calculer $c'(x)$, puis $c'(100)$.

**b)** Quelle est l'erreur commise en remplaçant $c(101) - c(100)$ par $c'(100)$ ?

**83** ** Une entreprise fabrique des objets.
Le coût de fabrication de $x$ objets, en euros, est modélisé par la fonction $c$, définie pour $x \geqslant 0$ par $c(x) = 2\,000 + 100x - 0{,}01x^2$.

**1. a)** Quel est le coût de fabrication de 1 000 objets ? de 1 001 objets ?

**b)** En déduire l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire.







**2. a)** Exprimer, en fonction de $x$, le coût de fabrication $c(x + 1)$ de $x + 1$ objets.

**b)** On appelle coût marginal du $x$-ième objet la différence $c(x + 1) - c(x)$.
Déterminer son expression en fonction de $x$.

**3. a)** Calculer $c'(x)$.

**b)** Exprimer, en fonction de $x$, l'erreur $e(x)$ commise lorsqu'on prend $c'(x)$ comme valeur du coût marginal du $x$-ième objet, à la place de $c(x + 1) - c(x)$.

**c)** Calculer $c'(1\,000)$, puis confronter le résultat à la valeur trouvée à la question **1. b)**.

**84** ** Une entreprise fabrique chaque jour $x$ kilogramme d'un produit.
Le coût total de fabrication est donné par la fonction $f$ définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$.
On s'intéresse au coût marginal de production du produit, c'est-à-dire à la différence $f(x + 1) - f(x)$.
Dans la pratique, pour une quantité de produit fabriqué importante, on remplace $f(x + 1) - f(x)$ par $f'(x)$.

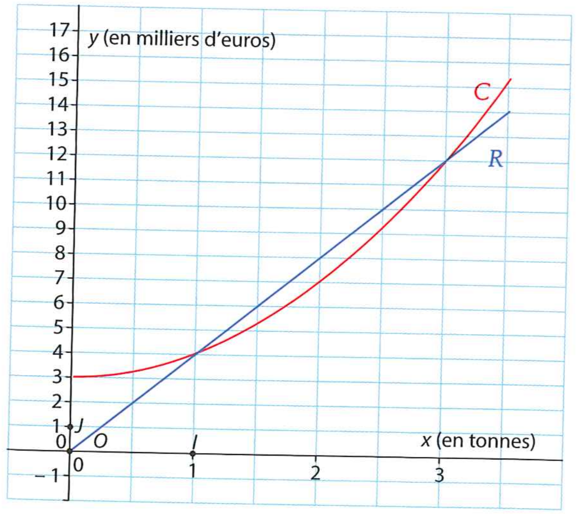
**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** Vérifier que par exemple pour $x = 100$, on commet une erreur peu importante en remplaçant $f(101) - f(100)$ par $f'(100)$.

**3. a)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f'$.

**b)** En déduire pour quelle quantité de produit fabriqué le coût marginal de production est le plus faible.

**85** *** Une entreprise, qui fabrique et commercialise un produit, a une capacité de production limitée à 3,5 tonnes par jour.
Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, pour fabriquer $x$ tonnes de ce produit est noté $C(x)$.
On note $R(x)$ la recette, exprimée en milliers d'euros, obtenue pour $x$ tonnes de produit vendues.
On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, obtenu pour $x$ tonnes de produit vendues.
On donne ci-après un tracé des courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère des fonctions $C$ et $R$.




**Partie A**
Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique.

**1. a)** Déterminer le montant en euros du coût de production lorsque cette production est nulle.

**b)** Quel est le montant en euros de la recette si l'entreprise produit et vend 0,5 tonne de produit ? Réalise-t-elle un bénéfice dans ce cas ? (Justifier la réponse.)

**2. a)** Pour quelles quantités de produit le bénéfice est-il nul ?

**b)** Déterminer l'intervalle des quantités de produit pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

**3.** Déterminer la quantité de produit qui assure à l'entreprise un bénéfice maximal.
Quel est ce bénéfice ?

**Partie B**

**1.** $C(x)$ et $R(x)$ s'écrivent sous la forme $C(x) = ax^2 + b$ et $R(x) = cx$.
En utilisant le graphique et en donnant à $x$ des valeurs particulières, déterminer $a$, $b$, et $c$.

**2. a)** Exprimer $B(x)$ en fonction de $x$.

**b)** Calculer $B'(x)$.

**3.** Retrouver par le calcul :

**a)** les résultats de la question **1.** de la **partie A** ;

**b)** les résultats de la question **2.** de la **partie A** ;

**c)** les résultats de la question **3.** de la **partie A**.

**86** *** Une entreprise de menuiserie produit et vend des tables. On note $x$ le nombre de tables fabriquées chaque semaine ($3 \leqslant x \leqslant 12$).
Le coût total de production de ces $x$ tables, exprimé en centaines d'euros, est donné par :
$c(x) = 0{,}25x^2 + x + 20{,}25$.

**Partie A**

**1.** Calculer $c'(x)$.
Montrer que la fonction $c$ est strictement croissante sur [3 ; 12].

**2.** Tracer la courbe représentative de la fonction $c$ sur l'écran d'une calculatrice ou sur tableur.

**Partie B**
Toutes les tables fabriquées sont vendues et l'entreprise doit fixer le prix de son produit.
On note $r(x)$ la recette, en centaines d'euros, occasionnée par la vente de $x$ tables.

**1.** La première proposition est un prix de 550 € par table.

**a)** Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de $x$.

**b)** Ajouter la courbe représentative de la fonction $r$ sur le graphique précédent.

**c)** Quelle remarque peut-on faire ?

**2.** La seconde proposition est un prix de 630 € par table.

**a)** Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de $x$ pour ce nouveau cas.

Exercices

**b)** Modifier le graphique précédent pour faire apparaître la courbe représentative de *r* dans ce nouveau cas.

**c)** Déterminer graphiquement les valeurs de *x* pour lesquelles la recette est strictement supérieure au coût.

**3.** Dans cette question, le prix de vente est 630 € par table.

**a)** Déterminer l'expression de la fonction *b* modélisant le bénéfice réalisé par la vente de *x* tables ($3 \leqslant x \leqslant 12$).

**b)** Calculer $b'(x)$.
En déduire le sens de variation de la fonction *b*.

**c)** À partir de quelle quantité de tables fabriquées et vendues le bénéfice baisse-t-il ?

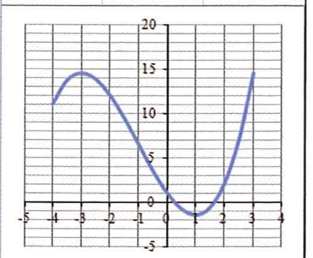
**d)** Ajouter la courbe représentative de la fonction *b* sur le graphique.

**e)** Contrôler graphiquement les résultats des questions **2. c)** et **3. c)**.

**87** * **QCM**

Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle [– 4 ; 3].
On donne une feuille de calcul, obtenue sur tableur, sur laquelle figurent des valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$, ainsi qu'un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de *f*.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | x | f(x) | f'(x) |
| 2 | -4 | 11 | 7,5 |
| 3 | -3,5 | 13,6875 | 3,375 |
| 4 | -3 | 14,5 | 0 |
| 5 | -2,5 | 13,8125 | -2,625 |
| 6 | -2 | 12 | -4,5 |
| 7 | -1,5 | 9,4375 | -5,625 |
| 8 | -1 | 6,5 | -6 |
| 9 | -0,5 | 3,5625 | -5,625 |
| 10 | 0 | 1 | -4,5 |
| 11 | 0,5 | -0,8125 | -2,625 |
| 12 | 1 | -1,5 | 0 |
| 13 | 1,5 | -0,6875 | 3,375 |
| 14 | 2 | 2 | 7,5 |
| 15 | 2,5 | 6,9375 | 12,375 |
| 16 | 3 | 14,5 | 18 |




Pour chacun des cas suivants, une seule des réponses est exacte. Indiquer laquelle.

**1.** $f(-2)$ est égal à :
a) – 1,5 ;
b) 12 ;
c) – 4,5.

**2.** $f'(-2)$ est égal à :
a) – 1,5 ;
b) 12 ;
c) – 4,5.

**3.** Dans la cellule B12, on lit :
a) l'image de 1 par *f* ;
b) le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ;
c) l'image de – 1,5 par *f*.

**4.** Dans la cellule C4, on lit :
a) l'image de 0 par *f* ;
b) le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse – 3 ;
c) $f(-3)$.

**5.** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur le nombre figurant dans la cellule :
a) A12 ;
b) B12 ;
c) C12.

**6.** La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle :
a) [– 4 ; – 3[ ;
b) ]– 3 ; 1[ ;
c) ]1 ; 3].

**7.** Sur l'intervalle [– 4 ; 3], la dérivée $f'$ s'annule :
a) zéro fois ;
b) une fois ;
c) deux fois.

**8.** $f'(x)$ est strictement positif pour tout *x* appartenant aux intervalles :
a) [– 4 ; – 3[ et ]1 ; 3] ;
b) ]– 3 ; 1[ et ]1 ; 3] ;
c) [– 4 ; – 3[ et ]– 3 ; 1].



# Tableur sur papier

## Énoncé

La société ASPIRTOU fabrique des aspirateurs. Chaque mois, elle produit un nombre *x* d'aspirateurs, *x* étant un nombre entier compris entre 1 000 et 6 000.

Le coût de production, en euros, de *x* aspirateurs est donné par $c(x) = 0{,}003x^2 + 60x + 48\,000$.

Voici une feuille de calcul obtenue sur tableur, pour $990 \leqslant x \leqslant 1\,010$.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | c(x) | d(x)=c(x+1)-c(x) | c'(x) | d(x)-c'(x) |
| 2 | 990 | 110340,3 | 65,943 | 65,94 | 0,003 |
| 3 | 991 | 110406,243 | 65,949 | 65,946 | 0,003 |
| 4 | 992 | 110472,192 | 65,955 | 65,952 | 0,003 |
| 5 | 993 | 110538,147 | 65,961 | 65,958 | 0,003 |
| 6 | 994 | 110604,108 | 65,967 | 65,964 | 0,003 |
| 7 | 995 | 110670,075 | 65,973 | 65,97 | 0,003 |
| 8 | 996 | 110736,048 | 65,979 | 65,976 | 0,003 |
| 9 | 997 | 110802,027 | 65,985 | 65,982 | 0,003 |
| 10 | 998 | 110868,012 | 65,991 | 65,988 | 0,003 |
| 11 | 999 | 110934,003 | 65,997 | 65,994 | 0,003 |
| 12 | 1000 | 111000 | 66,003 | 66 | 0,003 |
| 13 | 1001 | 111066,003 | 66,009 | 66,006 | 0,003 |
| 14 | 1002 | 111132,012 | 66,015 | 66,012 | 0,003 |
| 15 | 1003 | 111198,027 | 66,021 | 66,018 | 0,003 |
| 16 | 1004 | 111264,048 | 66,027 | 66,024 | 0,003 |
| 17 | 1005 | 111330,075 | 66,033 | 66,03 | 0,003 |
| 18 | 1006 | 111396,108 | 66,039 | 66,036 | 0,003 |
| 19 | 1007 | 111462,147 | 66,045 | 66,042 | 0,003 |
| 20 | 1008 | 111528,192 | 66,051 | 66,048 | 0,003 |
| 21 | 1009 | 111594,243 | 66,057 | 66,054 | 0,003 |
| 22 | 1010 | 111660,3 | | 66,06 | |

**1. a)** Quel est le coût de production de 1 000 aspirateurs ? de 1 001 aspirateurs ?
En déduire l'augmentation du coût entrainé par la fabrication du 1 001-ième aspirateur.

**b)** Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers le bas, de B2 à B22 pour obtenir les valeurs de $c(x)$ ? Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule B15 ?

**2.** Dans la colonne C figurent les valeurs de la différence $d(x) = c(x + 1) - c(x)$.
Pour *x* donné, $d(x)$ est appelé coût marginal au rang *x* : il s'agit du coût de la production d'un aspirateur supplémentaire lorsque *x* ont déjà été produits.

**a)** Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule C2, puis recopiée vers le bas de C2 à C21, pour obtenir les valeurs de $d(x)$ ? Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule C10 ?

**b)** Donner la valeur du coût marginal au rang 1 000.

**3.** Dans la pratique, pour un nombre *x* assez grand d'objets fabriqués, on prend pour valeur du coût marginal au rang *x* la valeur de $c'(x)$.
On veut vérifier en utilisant la feuille de calcul qu'en effet $c'(x)$ est proche de $d(x)$, pour $990 \leqslant x \leqslant 1\,009$.

**a)** Quelles colonnes de la feuille permettent cette vérification ?
Interpréter les résultats qui y figurent.

**b)** Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule D2, puis recopiée vers le bas de D2 à D22, pour obtenir les valeurs de $c'(x)$ ? Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule D12 ?

**c)** Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule E2, puis recopiée vers le bas de E2 à E21, pour obtenir les valeurs de $d(x) - c'(x)$ ? Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule E6 ?