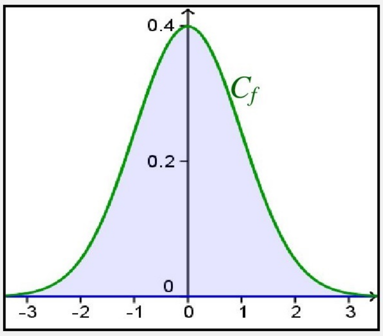
III – Loi normale centrée réduite

Définition 6 : On dit qu'une variable aléatoire continue suit la **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, lorsqu'elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



Remarque : La fonction de densité de la loi normale centrée réduite $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ n'a pas de primitive explicite. On utilise donc la calculatrice pour calculer une aire sous cette courbe.

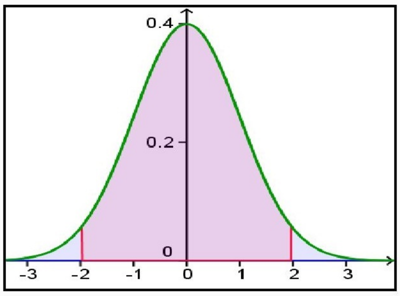
Calcul de probabilité avec la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

Calcul de $P(-1,96 \le X \le 1,96)$ avec la calculatrice **Casio 35 +**

MENU STAT → DIST → NORM → Ncd →

Lower	: -1,96
Upper	: 1,96
σ	: 1
μ	: 0

On obtient : $P(-1,96 \le X \le 1,96) \approx 0,95$



$P(-1,96 \le X \le 1,96)$

Remarque : La courbe C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc :

$$\boxed{P(X \le 0) = P(X \ge 0) = 0,5}$$

Conséquence : $P(X \le -2) = P(X \le 0) - P(-2 \le X \le 0) \approx 0,5 - 0,48 = 0,02$

$P(X \le 1) = P(X \le 0) + P(0 \le X \le 1) \approx 0,5 + 0,34 = 0,84$

Calcul k tel que $P(X \le k) = 0,45$ avec la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

Avec la calculatrice **Casio 35 +**

MENU STAT → DIST → NORM → InvN →

Area	: 0,45
σ	: 1
μ	: 0

On obtient : $k \approx -0,126$

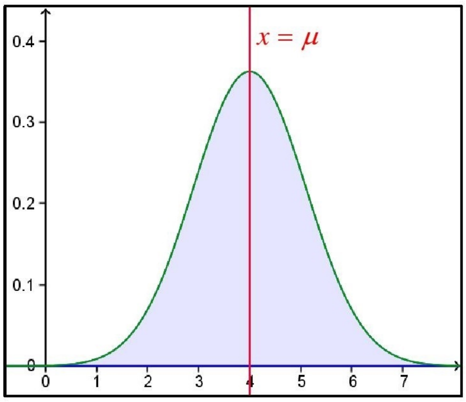
Application : T est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Donner l'arrondi au millième de : **a)** $P(-1,96 \le T \le 1,96)$ **b)** $P(T \le 1)$ **c)** $P(T \ge 0,5)$

IV– Loi normale

Définition 6: On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la **loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$** lorsque la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Remarques : • La fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

• La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.



Propriété 4: Si la variable aléatoire continue X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ alors son espérance est :

$$\boxed{E(X) = \mu}$$

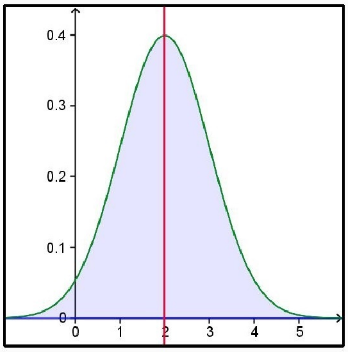
Définition 7: Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

On appelle **écart-type de X** le nombre noté σ et **variance de X** le nombre noté $V(X)$ tel que :

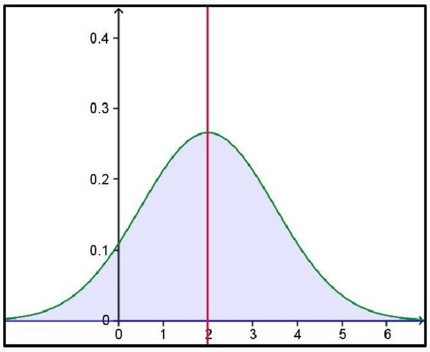
$$\boxed{V(X) = \sigma^2}$$

Interprétation de l'écart-type

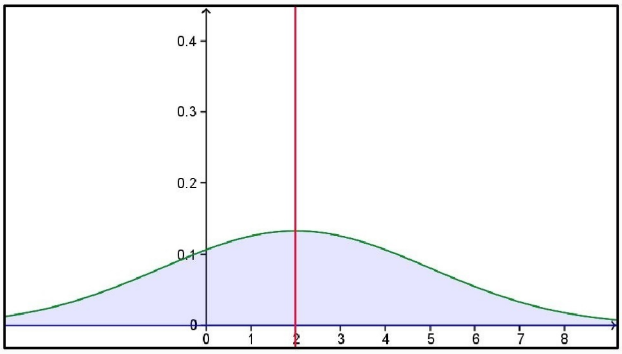
Plus l'écart-type σ est grand, plus les valeurs de X sont dispersées autour de l'espérance μ.



$\sigma = 1$



$\sigma = 1{,}5$



$\sigma = 3$

Application :