Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A Construire un histogramme

Voir AP page 222

On étudie la répartition des employés d'une entreprise suivant leur salaire mensuel :

Salaire (en €)	[900 ; 1 400 [	[1 400 ; 1 900 [	[1 900 ; 2 400 [	[2 400 ; 2 900 [	[2 900 ; 3 400 [
Fréquence	0,13	0,38	0,34	0,12	0,04

On souhaite construire l'histogramme des salaires.

a. Quelle sera la largeur des rectangles ?

b. On admet que l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence, exprimée en pourcentage. Calculer la hauteur du rectangle représentant la classe [2 400 ; 2 900 [.

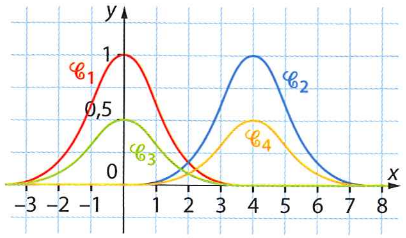
B Associer à $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$

Voir chapitre 3 page 78

À chacune des courbes ci-contre, associer l'une de ces fonctions :

a. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$. **b.** $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{-(x-4)^2}{2}}$.

c. $h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$. **d.** $k(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{-(x-4)^2}{2}}$.



C Lier aire et calcul intégral

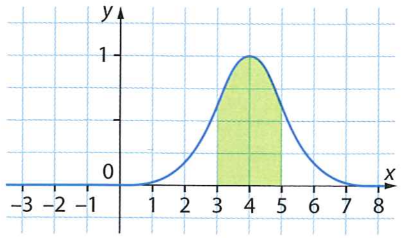
Voir chapitre 5 page 138

Soit *f* la fonction représentée ci-contre. L'aire, en unité d'aire, du domaine colorié en vert est égale à :

a. $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. **b.** $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. $\int_5^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. **d.** $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Plusieurs réponses sont possibles.

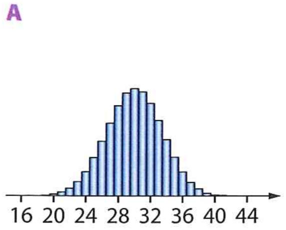


D Reconnaître une loi binomiale

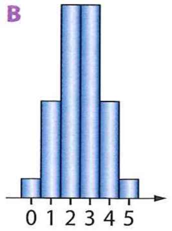
Voir AP 59 page 222

X suit la loi $\mathscr{B}(5\,;0{,}5)$; Y suit la loi $\mathscr{B}(50\,;0{,}6)$; Z suit la loi $\mathscr{B}(50\,;0{,}95)$; T suit la loi $\mathscr{B}(10\,;0{,}8)$.
Associer à chacune de ces lois sa représentation en diagramme en bâtons. Les comparer.

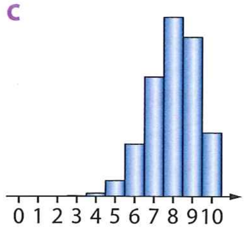
A



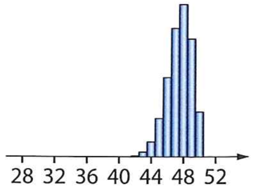
B



C



D



CHAPITRE 7

Lois de probabilité

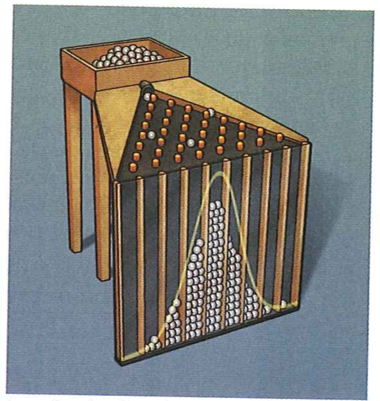
D'hier à aujourd'hui

Il était une fois la « courbe en cloche »…

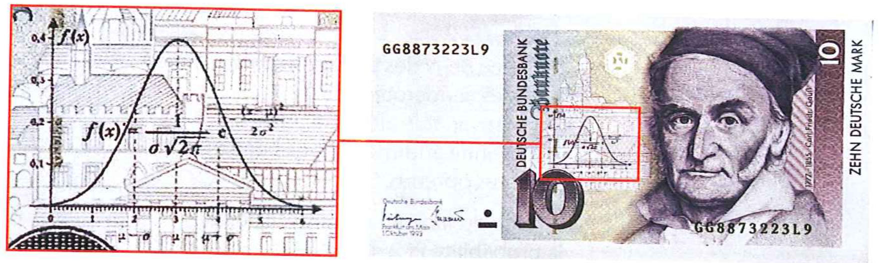
Historiquement, c'est le jeu de Pile ou Face qui a conduit à la « courbe en cloche ». Le théorème d'Abraham de Moivre (1667-1754) affirme que le diagramme représentant les probabilités de tomber sur *k* fois Pile dans un jeu de *n* lancers s'approche d'une « courbe en cloche » lorsque le nombre *n* de lancers tend vers l'infini.

Trois quarts de siècle plus tard, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) généralise le résultat de Moivre et est le premier à concevoir qu'il ne s'applique pas uniquement aux jeux de hasard, mais aussi « aux questions de la vie », c'est-à-dire à tout type d'observations indépendantes.

À la fin du XVIII^{e} siècle, ces résultats permettront à l'astronome d'atteindre une précision jamais égalée. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien et astronome, s'intéresse à la distribution des erreurs touchant les observations astronomiques. Des mesures avec un même instrument, répétées un grand nombre de fois dans des conditions les plus similaires possible, reportées sur un graphique, forment une courbe proche de la « courbe en cloche ». Cette courbe fut appelée alors « courbe de facilité » des erreurs de l'instrument.



La « planche de Galton » est une illustration célèbre du théorème de Moivre.



C. F. Gauss, sur un billet de 10 anciens marks allemands. À gauche, le tracé de la « gaussienne » et son équation.

Plus tard, Adolphe Quételet (1796-1874) appliqua ces résultats à des données sociales. Après avoir recensé les mesures du tour de poitrine de soldats écossais et du tour de taille de soldats français, il a constaté que les deux ensembles de mesures suivaient une distribution dont la représentation suivait la courbe de facilité. Quételet appela cette courbe, la « courbe de la loi des causes accidentelles ». Il élabora alors sa théorie de « l'homme moyen ». La loi des causes accidentelles va connaître un engouement au XIX^{e} siècle. Les statisticiens découvriront partout des « courbes en cloche ». Dans la même lignée, Francis Galton (1822-1911) affirma l'omniprésence de la loi normale dans la nature, la physique, la biologie.

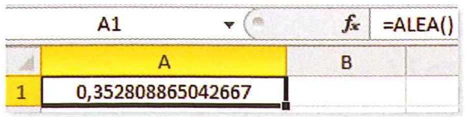
Aujourd'hui, on estime que les variables qui suivent la « loi normale » sont beaucoup moins nombreuses que ce que Galton avait pu suggérer.

Les séries statistiques expérimentales qui se rapprochent le plus de la loi normale concernent essentiellement des variables (poids, dimensions, etc.) observées dans l'industrie pour les fabrications en grande série.

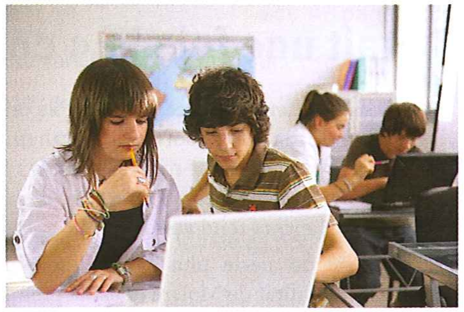
> *La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.*
>
> Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Activité 1 Choisir un nombre au hasard

TICE



	A	B
1	0,352808865042667	



1 Margaux choisit, à l'aide de la fonction Alea() d'un tableur, un nombre décimal de l'intervalle [0 ; 1 [dont le nombre de décimales est inférieur ou égal à 15.
Elle demande à Léo de deviner ce nombre.
Léo demande à Margaux le nombre de décimales de ce nombre.

a. Au départ, Margaux demande à Léo de ne trouver que la 1^{re} décimale.
Combien de nombres de ce type l'intervalle [0 ; 1 [contient-il ?
Quelle est alors la probabilité que Léo devine ce nombre du premier coup ?

b. Mêmes questions pour la 2^{e} décimale, puis pour la 15^{e}.

2 Abandonnant le tableur, Margaux choisit un nombre au hasard de l'intervalle [0 ; 2 [.

a. Elle précise en plus à Léo que le nombre choisi appartient à l'intervalle [1,4 ; 1,5 [et qu'il possède deux décimales.
Calculer la probabilité que Léo devine ce nombre du 1^{er} coup.

b. Cette probabilité est-elle égale à l'amplitude de l'intervalle [1,4 ; 1,5 [?

c. Montrer que cette probabilité peut se rapprocher de la formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Activité 2 Découvrir une variable aléatoire continue

PARTIE A Variable aléatoire discrète

On lance deux dés parfaitement équilibrés à 8 faces, numérotées de 0 à 7.
Soit X la variable aléatoire égale à la moyenne arithmétique des deux nombres obtenus.

À l'aide du tableau ci-contre, calculer la probabilité $P(2 \leqslant X < 5)$.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
1	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
2	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
3	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
4	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
5	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
6	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
7	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7

PARTIE B Variable aléatoire continue sur un intervalle

Soit Z la variable aléatoire égale à la moyenne arithmétique des deux nombres réels x et y choisis au hasard dans l'intervalle [0 ; 7].

1 Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Z.
Comparer cet ensemble à celui des valeurs prises par la variable aléatoire X.

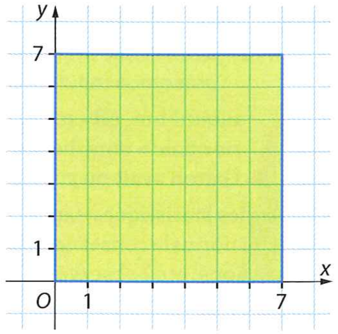
2 On a représenté, en vert ci-contre, l'univers de l'expérience aléatoire.

a. Justifier que l'événement { Z = 2 } est représenté par le segment de droite définie par : $0 \leqslant x \leqslant 7$; $0 \leqslant y \leqslant 7$ et la relation $y = 4 - x$.
Indiquer de même la représentation de l'événement { Z = 5 }.

b. Expliquer comment représenter les événements $\{ Z \geqslant 2 \}$ et $\{ 2 \leqslant Z \leqslant 5 \}$.

3 **a.** En déduire que la probabilité $P(2 \leqslant Z < 5)$ peut s'écrire comme le quotient de deux aires et calculer cette probabilité.

b. En utilisant un quotient d'aires, donner la valeur de $P(Z = 2)$.



Activité 3 Calculer une densité de population

Une rue commerçante de Tokyo.

La densité de population d'une zone géographique est le quotient du nombre d'habitants par la superficie.
Elle permet de mesurer les inégalités de répartition de la population dans le monde.

1 Dans le tableau ci-contre, on a relevé le nombre d'habitants et la superficie, en kilomètre carré, de quatre villes.
Pour chacune d'elles, calculer la densité de population.

Ville	Population	Superficie (en km^2)
Séoul (2010)	10 421 782	606
Tokyo (2010)	8 637 098	621
New York (2009)	8 143 200	1 214
Monaco (2011)	32 800	1,95

2 Au 1^{er} janvier 2012, la France métropolitaine comptait 63 460 768 habitants pour une superficie de 551 695 km^2.

a. Calculer la densité de population de la France.

b. Comparer ce résultat à la densité de l'Île-de-France égale à 949 habitants au km^2. Expliquer cette différence.

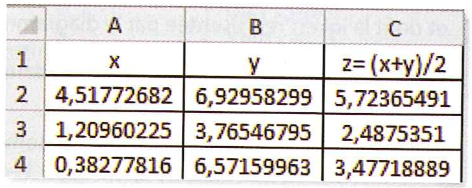
3 Si deux pays ont la même superficie, comment peut-on comparer leur densité ?

Activité 4 Définir la densité sur un histogramme

TICE

À l'aide d'un tableur et de la fonction Alea(), on simule 5 000 choix aléatoires de deux nombres réels appartenant à l'intervalle [0 ; 7 [, puis on calcule leur moyenne arithmétique.
Les valeurs obtenues sont regroupées en classes d'amplitude 1.

Note Pour calculer un nombre aléatoire dans [0 ; 7 [, on utilise 7×ALEA() .



	A	B	C
1	x	y	z= (x+y)/2
2	4,51772682	6,92958299	5,72365491
3	1,20960225	3,76546795	2,4875351
4	0,38277816	6,57159963	3,47718889

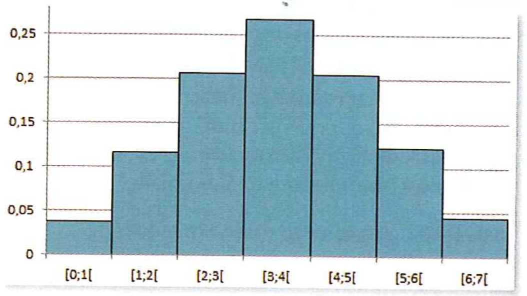
1 Lors d'une simulation, on a obtenu les résultats suivants et dessiné l'histogramme de la série :

Classe	[0 ; 1 [	[1 ; 2 [	[2 ; 3 [	[3 ; 4 [	[4 ; 5 [	[5 ; 6 [	[6 ; 7 [
Fréquence	0,0404	0,117	0,209	0,269	0,203	0,119	0,041

Sur l'histogramme ci-contre, la hauteur h d'un rectangle est le quotient de l'aire du rectangle par la largeur.
Or, ici, la fréquence de la classe est égale à l'aire. Donc :

$$h = \frac{\text{fréquence de la classe}}{\text{largeur de la classe}} = \frac{\text{« poids » de l'intervalle}}{\text{amplitude de l'intervalle}}.$$

Voir AP page 222



Histogramme réalisé sous Excel.

Par analogie avec la densité de population, ce rapport est appelé **densité** de l'intervalle.
Les classes ayant toutes pour amplitude 1, la densité d'un intervalle est, **dans ce cas**, égale à la hauteur de chaque rectangle et donc à la fréquence de la classe.

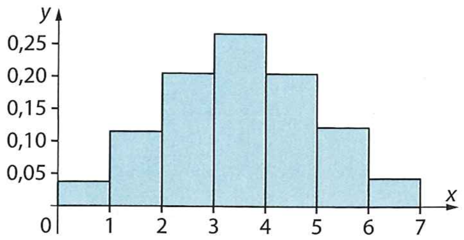
a. Préciser la densité des intervalles [2 ; 3 [, [2 ; 5 [et [5 ; 7 [.

b. En utilisant les centres de classe, calculer la moyenne de cette série.

2 Effectuer une telle simulation sur tableur. On peut reprendre la simulation en réduisant l'amplitude des classes.

Activité 5 Représenter la densité TICE

On reprend l'expérience aléatoire de l'Activité 4.
La courbe représentant la densité est obtenue en ne conservant que les segments supérieurs des rectangles de l'histogramme.



1 Représenter cette courbe sur un quadrillage.
Est-ce celle d'une fonction continue ?

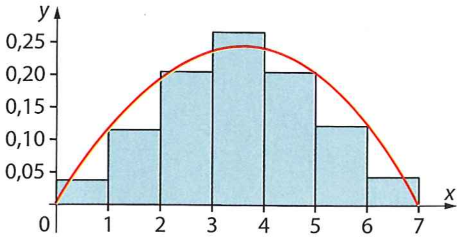
2 On choisit d'approcher la courbe représentant la densité par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction h définie et continue sur $[\,0\,;7\,]$ par :

$$h(x) = -0{,}02\,x\,(x-7)\,.$$

a. Construire cette courbe sur le graphique précédent.

b. Donner le calcul d'aire qui permet, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$, de trouver une valeur approchée de la fréquence de l'intervalle $[\,2\,;5\,[$.

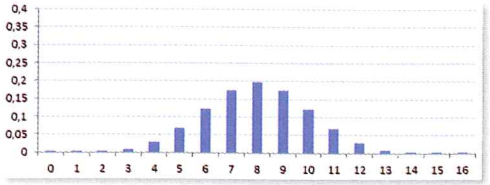
c. Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;7\,]$.



3 **Pour aller plus loin**
On reprend le fichier de Activité 4 lorsque l'amplitude des classes est 0,1. Construire la courbe de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Activité 6 Centrer, puis réduire une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(\,16\,;0{,}5\,)$ et dont la loi est représentée par le diagramme ci-contre.



PARTIE A Calculer l'écart type de la variable aléatoire X

a. Calculer l'espérance μ de la variable X.

b. On admet que la **variance de la loi binomiale** $\mathscr{B}(\,n\,;p\,)$ est :

$$V = n\,p\,q\,,\quad \text{où } q = 1-p\,.$$

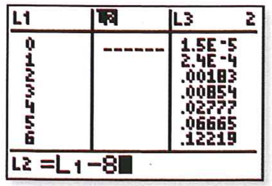
Calculer l'écart type $\sigma = \sqrt{V}$ de la variable X.

PARTIE B Centrer la variable aléatoire X

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $X' = X - \mu$.

b. Utiliser les propriétés de l'espérance pour calculer l'espérance de X'.

c. Entrer en liste L1 de la calculatrice les valeurs de X, puis en liste L2 celles de X' données par : L2 = L1 − 8 .
Entrer en liste L3 : BinomFdp (16 , 0.5) .



```
L1    |L2    |L3     2
 0    |------|1.5E-5
 1    |      |2.4E-4
 2    |      |.00183
 3    |      |.00854
 4    |      |.02777
 5    |      |.06665
 6    |      |.12219
L2 =L1-8
```

d. Tracer le diagramme en bâtons représentant la loi de X', en utilisant la fenêtre ci-contre. Indiquer un procédé géométrique pour obtenir le diagramme en bâtons de la loi X' à partir du diagramme représenté ci-contre.
La loi de X' suit-elle une loi binomiale ?

```
FENETRE
 Xmin=-8
 Xmax=8
 Xgrad=1
 Ymin=0
 Ymax=.3
 Ygrad=.1
 Xres=1
```

PARTIE C Réduire la variable aléatoire X

On pose une nouvelle variable définie par $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

a. En liste L2, entrer les valeurs de la variable X* par L2 = (L1 − 8) / 2 .

b. Lire l'écart type σ* de la variable aléatoire X*.

Voir AP page 222

c. Pour tracer le diagramme en bâtons représentant la loi de X*, il faut utiliser la fenêtre indiquée ci-contre. Justifier cette modification.

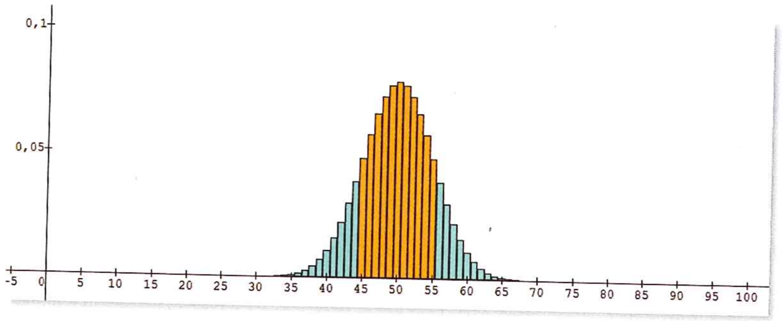
```
FENETRE
 Xmin=-8
 Xmax=8
 Xgrad=.5
 Ymin=0
 Ymax=.3
 Ygrad=.1
 Xres=1
```

Activité 7 Découvrir une nouvelle densité TICE

Au XVIIIe siècle, Jacques Bernoulli chercha, sans y parvenir, à donner une évaluation numérique des probabilités d'obtenir k fois Pile, pour un grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée.
Ce sont les travaux de Stirling, Moivre, puis plus tard de Laplace et Gauss, qui permirent de donner une approximation de ces valeurs.

1 **Loi binomiale**
On lance 100 fois une pièce parfaitement équilibrée.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient Pile.
X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(\,100\,;0{,}5\,)$ dont le diagramme en bâtons est représenté ci-contre.

Calculer son espérance μ et l'écart type $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$.



2 **Étude de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, sur calculatrice ou tableur**

a. Montrer que $P(\,X = \mu\,) = P(\,Z = 0\,)$.

b. Entrer les valeurs de X, de 0 à 100, en liste 1 de la calculatrice, puis celles de Z en liste 2 et créer la liste des probabilités de la loi binomiale $\mathscr{B}(\,100\,;0{,}5\,)$ en liste 3.

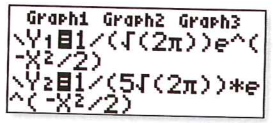
c. Représenter le **nuage de points**, représentant la loi de Z, à partir des listes 2 et 3 dans la fenêtre $[\,-10\,;10\,]$ en abscisses et $[\,0\,;0{,}5\,]$ en ordonnées.
Donner un procédé géométrique pour obtenir ce nouveau nuage à partir de celui des listes 1 et 3 représentant la loi de X.

```
FENETRE
 Xmin=-10
 Xmax=10
 Xgrad=1
 Ymin=0
 Ymax=.5
 Ygrad=.1
↓Xres=1
```

3 **Approche de la loi de Z par une fonction continue**

a. Entrer en Y1 l'expression de la fonction dite « de Gauss » : $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}$

et en Y2 celle de la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}$.



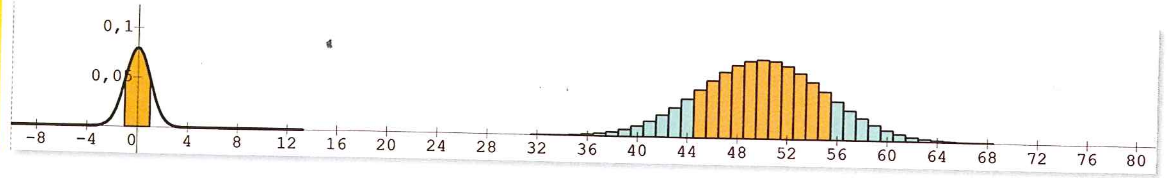
```
 Graph1 Graph2 Graph3
\Y1■1/(√(2π))e^(
-X²/2)
\Y2■1/(5√(2π))*e
^(-X²/2)
```

Visualiser leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_\varphi$.
De ces deux courbes, quelle est celle qui approche au plus près le nuage de points représentant la loi de Z ?

4 **Approximation d'une probabilité**

a. Justifier que $P(\,45 \leqslant X \leqslant 55\,) = P(\,-1 \leqslant Z \leqslant 1\,)$.

b. En observant les graduations des diagrammes obtenus au **1** et au **2**, justifier que la probabilité $P(\,45 \leqslant X \leqslant 55\,)$ peut être approchée par les intégrales : $5\displaystyle\int_{-1}^{1} f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} \varphi(z)\,dz\,.$
Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de cette probabilité.



1 Lois à densité

a Loi continue

Approche Jusqu'ici, les variables aléatoires étudiées prenaient un nombre fini de valeurs.
Or les issues d'un grand nombre d'expériences aléatoires prennent pour valeur un nombre quelconque d'un intervalle I de ℝ.

Exemples Le temps d'attente téléphonique à un service, le poids à la naissance, le taux de glycémie, etc.

b Densité sur un intervalle [*a* ; *b*]

Définition On appelle **fonction de densité** sur un intervalle [*a* ; *b*], avec $a < b$, toute fonction *f* définie, **continue et positive** sur [*a* ; *b*] et telle que **l'intégrale** de cette fonction sur [*a* ; *b*] **est égale à 1** :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

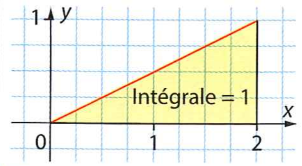
EXEMPLE

Soit *f* la fonction continue et positive sur [0 ; 2] définie par $f(x) = \frac{x}{2}$.

Une primitive de *f* est $F(x) = \frac{x^2}{4}$, alors $\int_0^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \frac{4}{4} - 0 = 1$.

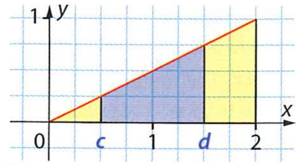
Cette fonction est une fonction de densité sur l'intervalle [0 ; 2].

Remarque Cela signifie que l'aire sous la courbe d'une fonction de densité sur l'intervalle [*a* ; *b*] est égale à une unité d'aire.



Définition Soit X la variable aléatoire à valeurs dans [*a* ; *b*], munie d'une fonction de densité *f*.
On définit la **loi de probabilité sur [*a* ; *b*] de densité *f*** en associant à tout intervalle [*c* ; *d*] inclus dans [*a* ; *b*] la probabilité que X appartienne à l'intervalle [*c* ; *d*], calculée par $P(X \in [c;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

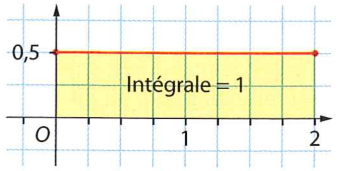
Note On choisit l'écriture d'un intervalle [*c* ; *d*] de sorte que $c \leqslant d$.



Propriétés
- Pour tout nombre réel *c* de [*a* ; *b*], $P(\{c\}) = 0$.
- Pour tout réel *c* de [*a* ; *b*], $P(X \in [c;b]) = 1 - P(X \in [a;c])$.

c Loi uniforme sur un intervalle [*a* ; *b*]

Définition et conséquences On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur [*a* ; *b*], lorsque sa densité est constante sur [*a* ; *b*].
Par conséquent, la fonction de densité *f* de la loi uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*] est définie par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

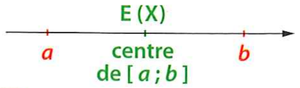


En effet, pour tout réel *x* de [*a* ; *b*], la **fonction de densité** *f* est **constante**, ce qui signifie que : $f(x) = k$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Ainsi, on a $1 = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = kb - ka = k(b-a)$. D'où $k = \frac{1}{b-a}$.

Propriétés
- Pour tout intervalle [*c* ; *d*] de [*a* ; *b*], on en déduit :
$$P(X \in [c;d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}.$$
- L'espérance de la loi uniforme sur [*a* ; *b*] est définie par :
$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2}.$$

Note On peut retenir : $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{\text{longueur de } [c;d]}{\text{longueur de } [a;b]}$.



Utiliser la loi uniforme

Exercice corrigé

Énoncé

Une enquête a révélé que, pour tout le personnel d'une grosse entreprise, la durée du trajet, exprimée en heure, entre leur domicile et leur lieu de travail, est comprise entre 0,5 h et 2,5 h.
Le nombre de salariés étant très important, toutes les durées de transport sont représentées.
On interroge au hasard des salariés sur leur temps de transport. Soit X la variable aléatoire égale à la durée du trajet d'un salarié.

1 Quelle est la loi suivie par X ? Déterminer et représenter la fonction de densité.
2 Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre trois quarts d'heure et une heure un quart.
3 Lors de l'enquête, on a interrogé un grand nombre de salariés de cette entreprise. Calculer la durée moyenne du trajet domicile-entreprise.

Points méthode

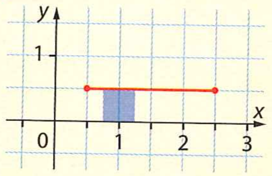
① Par convention, le choix d'un nombre **au hasard** dans un intervalle se modélise par la **loi uniforme** sur cet intervalle.

② Lorsque la variable X suit la loi uniforme sur l'intervalle **I** = [*a* ; *b*], pour tout intervalle **J** = [*c* ; *d*] inclus dans **I**, on obtient :
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}.$$

③ La durée moyenne du trajet est égale à l'espérance de X, variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [*a* ; *b*] :
$$E(X) = \frac{b+a}{2}.$$

Solution

1 Interroger **au hasard** un salarié sur la durée de son trajet revient à choisir aléatoirement un nombre dans l'intervalle [0,5 ; 2,5].
La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [0,5 ; 2,5].
Donc la fonction de densité est la fonction constante définie par :
$$f(x) = \frac{1}{2{,}5 - 0{,}5} = \frac{1}{2}.$$



2 $P\left(\frac{3}{4} \leqslant X \leqslant \frac{5}{4}\right) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2{,}5 - 0{,}5} = \frac{1}{4}$.
Ainsi, la probabilité que la durée du trajet d'un salarié soit comprise entre trois quarts d'heure et une heure un quart est égale à $\frac{1}{4}$.

3 On calcule l'espérance de X :
$$E(X) = \frac{2{,}5 + 0{,}5}{2} = 1{,}5.$$
La durée moyenne des trajets des salariés entre leur domicile et l'entreprise est d'une heure et demie.

Exercices d'application

Voir exercices 28 à 31

1 **a.** Déterminer la fonction de densité d'une loi uniforme sur le segment [−3 ; 4].
b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire correspondante.

2 On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle [−50 ; 200].
a. Calculer la probabilité que ce nombre soit égal à 100.
b. Calculer la probabilité que ce nombre soit supérieur ou égal à 150.
c. Calculer la probabilité que ce nombre soit inférieur à 0 ou supérieur à 150.

3 À la sortie de l'usinage, les diamètres des boulons fabriqués sont compris entre 10 mm et 10,5 mm. La production est considérée comme satisfaisante si, en moyenne, le diamètre des boulons est supérieur à 10,2 mm.
Cette production est-elle satisfaisante ?

4 Léna arrive tous les jours au lycée entre 8 h et 8 h 30. La variable aléatoire X, égale à l'heure d'arrivée, suit la loi uniforme sur [8 ; 8,5].
Calculer la probabilité que Léna arrive :
a. entre 8 h 15 et 8 h 20 ;
b. avant 8 h 15 ou après 8 h 20.

2 La loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

a Approche d'une densité par la loi binomiale

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, d'espérance $\mu_x = np$ et d'écart type $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$, avec $0 < p < 1$.

Soit la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X-\mu_x}{\sigma_x}$ (*).

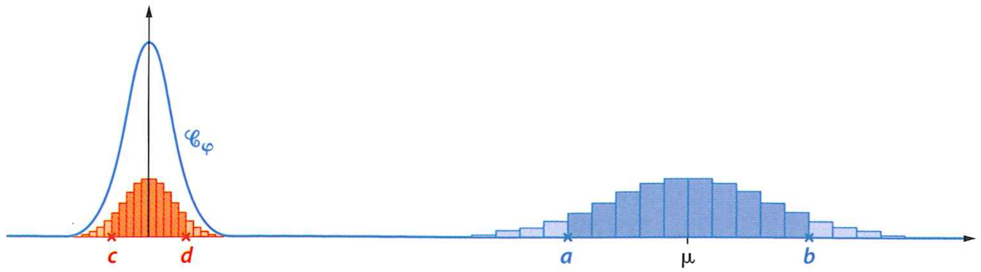
Alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(c \leqslant Z \leqslant d)$, où $c = \dfrac{a-\mu_x}{\sigma_x}$ et $d = \dfrac{b-\mu_x}{\sigma_x}$.

Note La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}$$

est appelée « **fonction de Gauss** ».

Activité 7 page 205



Lorsque le nombre d'épreuves n prend de grandes valeurs et la probabilité de succès p est proche de 0,5 la transformation associée à l'égalité (*) ci-dessus transforme d'abord **l'aire bleue** en **l'aire rouge**, tout en la divisant par σ. On obtient alors un diagramme ayant une forme de courbe en « cloche », et en multipliant la hauteur des rectangles par σ, la courbe est très proche de la courbe de la fonction de Gauss φ.

b La loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

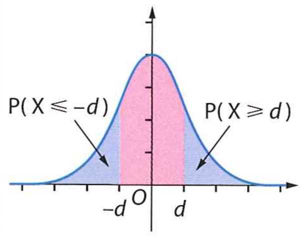
Définition Une variable aléatoire X, d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$, suit la **loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$** lorsqu'elle admet pour fonction de densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Propriétés

- Si $c \leqslant d$, alors $P(X \in [c\,;d]) = \displaystyle\int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.
- $P(X = c) = 0$; d'où $P(X \leqslant c) = P(X < c)$.
- $P(-d \leqslant X \leqslant d) = P(X \leqslant d) - P(X \leqslant -d)$.
- $P(X \geqslant d) = P(X \leqslant -d)$; d'où $P(-d \leqslant X \leqslant d) = 1 - 2\,P(X \leqslant -d)$,

ou encore $P(X \leqslant -d) = \dfrac{1-P(-d \leqslant X \leqslant d)}{2} = P(X \geqslant d)$.

Courbe représentative de φ



La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Intervalles particuliers

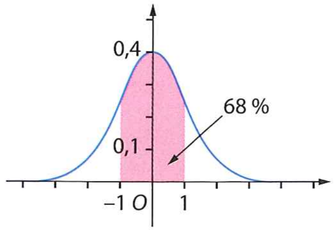
Avec la calculatrice, on obtient :

$P(X \in [-1\,;1]) \approx 0{,}68$.

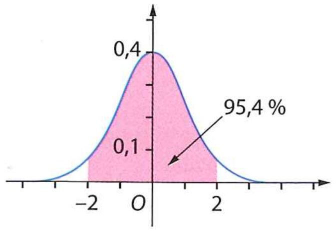
$P(X \in [-1{,}96\,;1{,}96]) \approx 0{,}95$.

$P(X \in [-2\,;2]) \approx 0{,}954$.

$P(X \in [-3\,;3]) \approx 0{,}997$.



```
normalFRép(-1,1,
0,1)
          .6826894809
```



```
normalFRép(-2,2,
0,1)
           .954499876
```

Utiliser la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

Exercice corrigé

Énoncé

L'entreprise OMBREL produit des parapluies pour distributeurs automatiques. Elle considère que sa production hebdomadaire est fidèle aux prévisions avec une probabilité égale à 0,7.

On suppose que les productions hebdomadaires sont indépendantes les unes des autres.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de semaines où la production est fidèle aux prévisions, lors d'une étude sur 84 semaines.

1 Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de X.

2 On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Montrer que $P(50 \leqslant X \leqslant 65) = P\left(\dfrac{-44}{21} \leqslant Z \leqslant \dfrac{31}{21}\right)$ et que $P(X \leqslant 63) = P(Z \leqslant 1)$.

3 On admet que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Calculer $P\left(-2 \leqslant Z \leqslant \dfrac{4}{3}\right)$, puis $P(Z \leqslant 1)$.

4 Déterminer le nombre d tel que :

$$P(-d \leqslant Z \leqslant d) \approx 0{,}95.$$

En déduire un intervalle $[a\,;b]$ de longueur minimale tel que $P(X \in [a\,;b]) \approx 0{,}95$. Interpréter.

Points méthode

① Pour établir une loi binomiale, on repère l'épreuve de Bernoulli, répétée de façon indépendante, sa probabilité de succès p et le nombre n d'épreuves.

② On applique la relation entre Z et X pour calculer les bornes de l'intervalle où varie Z.

③ Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.
On calcule $P(c \leqslant Z \leqslant d)$ à l'aide des instructions suivantes :

TI™ : 2nde var (distrib)

`2:NormalFRép(c,d,0,1)`

Casio : SHIFT 4 (CATALOG) puis descendre à :

`NormCD(c,d,1,0)`.

On approche la probabilité $P(Z \leqslant k)$ par $P(-10^{99} \leqslant Z \leqslant k)$ et $P(Z \geqslant k)$ par $P(k \leqslant Z \leqslant 10^{99})$.

④ On détermine le nombre d tel que :

$$P(-d \leqslant Z \leqslant d) = k$$

en utilisant les intervalles particuliers vus en cours pour les valeurs de k :

0,68 ; 0,95 et 0,99.

Solution

1 On étudie les productions, indépendantes les unes des autres, sur 84 semaines. On reconnaît la répétition de 84 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. La probabilité de succès « la production est fidèle aux prévisions » est $p = 0{,}7$.

Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(84\,;0{,}7)$.

$$\mu = 84 \times 0{,}7 = 58{,}8 \quad\text{et}\quad \sigma = \sqrt{84 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = \sqrt{17{,}64} = 4{,}2.$$

2 On pose $Z = \dfrac{X-58{,}8}{4{,}2}$. On en déduit :

- $P(50 \leqslant X \leqslant 65) = P\left(\dfrac{50-58{,}8}{4{,}2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{65-58{,}8}{4{,}2}\right)$,

d'où, en calculant les bornes : $P(50 \leqslant X \leqslant 65) = P\left(\dfrac{-44}{21} \leqslant Z \leqslant \dfrac{31}{21}\right)$.

- $P(X \leqslant 63) = P\left(Z \leqslant \dfrac{63-58{,}8}{4{,}2}\right) = P(Z \leqslant 1)$.

3 Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P\left(\frac{-44}{21} \leqslant Z \leqslant \frac{31}{21}\right) \approx 0{,}91 \quad\text{et}\quad P(Z \leqslant 1) \approx 0{,}84.$$

4 On sait que $P(-1{,}96 \leqslant Z \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$. Donc $d = 1{,}96$.

$$0{,}95 \approx P\left(-1{,}96 \leqslant \frac{X-58{,}8}{4{,}2} \leqslant 1{,}96\right)$$
$$= P(-1{,}96 \times 4{,}2 + 58{,}8 \leqslant X \leqslant 1{,}96 \times 4{,}2 + 58{,}8)$$
$$= P(50{,}568 \leqslant X \leqslant 67{,}032).$$ Donc $[a\,;b] \approx [50\,;67]$.

La probabilité d'obtenir entre 50 et 67 semaines de production fidèle aux prévisions est d'environ 0,95.

Exercices d'application

Voir exercices 33 à 35

5 Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

a. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité :

$$P(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5).$$

b. En déduire $P(X \geqslant 0{,}5)$.

6 On lance, 18 000 fois de suite, un dé non pipé.

a. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 ou de 1 apparus. Donner la loi suivie par X. Calculer son espérance μ et son écart type σ.

b. On admet que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Montrer que : $P(2\,850 \leqslant X \leqslant 3\,150) = P(-3 \leqslant Z \leqslant 3)$, puis donner la valeur arrondie au millième près de cette probabilité.

3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

a Loi normale

Définition Une variable aléatoire X suit la **loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$** lorsque la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Remarque Z est la variable aléatoire centrée réduite de X.

EXEMPLE

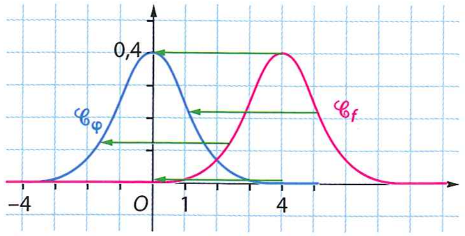
Soit X la variable aléatoire dont la fonction de densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-4)^2}{2}}$.

On utilise la variable aléatoire $Z=X-4$.

On remarque que, en faisant « glisser » la courbe $\mathscr{C}_f$ de la variable X de 4 unités à gauche, on obtient la courbe $\mathscr{C}_\varphi$.

Donc la fonction de densité de Z est la fonction de Gauss φ :

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-z^2}{2}}.$$



La variable aléatoire Z suit donc la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Comme $Z=X-4=\dfrac{X-4}{1}=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, on peut lire $\mu=4$ et $\sigma=1$.

Ainsi, la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(4;1)$.

Conséquence Si la variable aléatoire X suit la **loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$**, alors son **espérance E(X)** est μ et son écart type est σ.

En effet, si $X=Z\times\sigma+\mu$, d'après les propriétés de l'espérance et de la variance : $E(X)=0+\mu=\mu$ et $V(X)=\sigma^2\times V(Z)=\sigma^2$.

L'écart type de X est $\sqrt{V(Z)}=\sigma$.

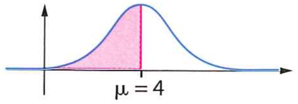
Exemple Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(100;25)$, alors **l'espérance** est $E(X)=100$ et l'écart type est $\sigma=\sqrt{25}=5$.

REMARQUE

Si X suit la **loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$**, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $F(\mu)=P(X\leqslant\mu)=0{,}5$.

Exemple Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(4;1)$, alors $P(X\leqslant 4)=0{,}5$.



b Critères de normalité

Définition Si la variable aléatoire X suit la **loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$**, alors :

$P(X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma])\approx 0{,}68$. (Fig. 1)
$P(X\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])\approx 0{,}954$. (Fig. 2)
$P(X\in[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma])\approx 0{,}997$. (Fig. 3)

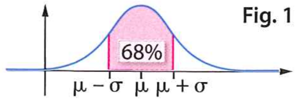


Fig. 1

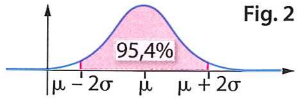


Fig. 2

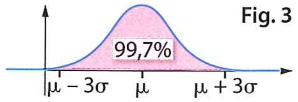


Fig. 3

En effet, la variable aléatoire telle que $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

$$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=P\left(-1\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right)=P(-1\leqslant Z\leqslant 1)\approx 0{,}680.$$

$$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=P\left(-2\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 2\right)=P(-2\leqslant Z\leqslant 2)\approx 0{,}954.$$

$$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=P\left(-3\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 3\right)=P(-3\leqslant Z\leqslant 3)\approx 0{,}997.$$

Utiliser la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Exercice corrigé

Énoncé

Dans une entreprise, la demande mensuelle de pièces automobiles du même type suit une loi normale d'espérance $\mu=600$ et d'écart type $\sigma=40$.

1 Déterminer le nombre a de pièces demandées pour que la demande mensuelle soit comprise entre $600-a$ et $600+a$ pièces, avec une probabilité de 0,95.

2 **a.** Le stock de l'entreprise est de 620 pièces. Calculer la probabilité que la demande soit satisfaite, c'est-à-dire qu'elle soit inférieure ou égale à 620.

b. L'entreprise possède un stock de sécurité supplémentaire de 30 pièces. Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

3 L'entreprise souhaite conserver un stock minimal de sécurité S afin que la probabilité de satisfaire la demande soit supérieure à 0,95.
Déterminer la valeur de ce stock.

Points méthode

① Pour chercher un intervalle à 95 %, on utilise les probabilités des intervalles particuliers.

② **a.** Si k est donné, la probabilité $P(X\leqslant k)$ se calcule à l'aide de la calculatrice.

b. Penser que les événements

$\{D>650\}$ et $\{D\leqslant 650\}$

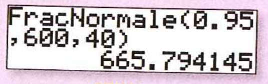
sont contraires.

Comme $P(D=650)=0$, alors :

$P(D>650)=P(D\geqslant 650)$.

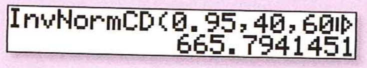
③ On détermine la valeur de x telle que $P(X\leqslant x)=0{,}95$ à l'aide de la fonction « Fractile » de la loi normale, que l'on trouve dans le catalogue de la calculatrice :

TI™ : 2nde catalog 0, puis



```
FracNormale(0.95
,600,40)
         665.794145
```

Casio : SHIFT CATALOG 4, puis



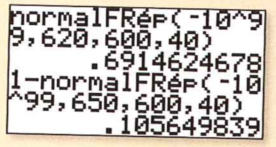
```
InvNormCD(0.95,40,60▶
            665.7941451
```

Solution

On note D la variable aléatoire égale à la demande mensuelle.
Elle suit la loi normale $\mathcal{N}(600;1\,600)$, car $\mu=600$ et $\sigma=40$.

1 D'après le cours, $P(D\in[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])\approx 0{,}95$.
Donc il suffit de choisir $a=2\sigma=2\times 40=80$.
Ainsi : $600-a=\mu-2\sigma=520$ et $600+a=\mu+2\sigma=680$.
Les demandes mensuelles sont comprises entre 520 et 680 pièces, avec une probabilité égale à 0,95.

2 **a.** La demande est satisfaite si elle est inférieure ou égale aux 620 pièces du stock.
À la calculatrice : $P(D\leqslant 620)\approx 0{,}6915$.
Donc la probabilité que la demande soit satisfaite est d'environ 0,6915.



```
normalFRép(-10^9
9,620,600,40)
        .6914624678
1-normalFRép(-10
^99,650,600,40)
         .105649839
```

b. L'entreprise est en rupture de stock, lorsque la demande mensuelle dépasse $620+30=650$ pièces.
Or $P(D>650)=1-P(D\leqslant 650)$; d'où $P(D>650)\approx 0{,}1056$.

3 Le nombre de pièces du stock de sécurité S vérifie :

$P(D\leqslant 620+S)\geqslant 0{,}95$.

D'après le tableau ci-contre, **la plus petite valeur entière de a** telle que :

$P(D\leqslant a)>0{,}95$ est $a=666$.

Le stock de sécurité doit donc contenir au moins $666-620=46$ pièces pour que la probabilité de satisfaire la demande soit supérieure à 0,95.

a	$P(D\leqslant a)$
664	0,94520071
665	0,94791872
666	**0,95052853**
667	0,95303288
668	0,95543454
669	0,95773626
670	0,95994084

Exercices d'application

Voir exercices 42 à 46

7 Une machine utilise un robot pour remplir des boîtes. Du fait des variations des mécanismes, le poids du produit par boîte varie en suivant une loi normale de moyenne 201 g et d'écart type 1,5 g.
Calculer la probabilité que le poids du produit soit compris entre 199 g et 203 g.

8 Une étude portant sur de nombreux relevés annuels a permis d'affirmer que le débit D d'une rivière suit une loi normale d'espérance 47 m^3/s et d'écart type 8,8 m^3/s.
Calculer la valeur du débit d tel que $P(D>d)<0{,}1$.
Interpréter ce résultat.

Capacités | Mise en œuvre

Montrer qu'une fonction *f* est une fonction de densité de probabilité.

On prouve que la fonction f est définie, continue et positive sur $[\,a\,;b\,]$ et que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Donc pour tout intervalle $[c;d]$ de $[a;b]$: $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

Connaître la fonction *f* de densité de la loi uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*]

et l'espérance de cette loi.

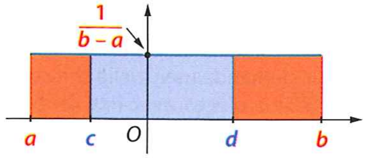
La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$, où $a < b$.
Si sa densité est constante sur $[\,a\,;b\,]$,

alors : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Pour tout intervalle $[\,c\,;d\,]$ de $[\,a\,;b\,]$:

$$P([\,c\,;d\,]) = \frac{\text{longueur de }[c\,;d]}{\text{longueur de }[a\,;b]}.$$

L'espérance de la loi uniforme sur $[\,a\,;b\,]$ est $E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{b+a}{2}$.



Connaître la fonction *f* de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$, et l'espérance et l'écart type de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ lorsqu'elle admet pour fonction de densité la fonction de Gauss définie sur $\mathbb{R}$ par :

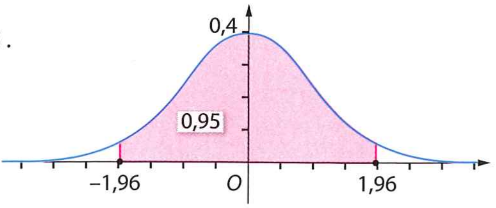
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

L'espérance d'une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ est nulle et son écart type est 1.

Connaître une valeur arrondie de quelques probabilités d'événements particuliers de la forme $\{X \in [-a\,;a]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

En particulier :
$P(X \in [-1{,}96\,;1{,}96]) \approx 0{,}95$.

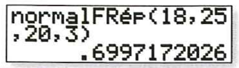
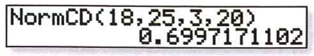
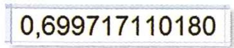
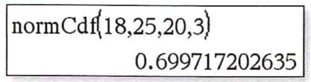
Et de plus :
$P(X \in [-1\,;1]) \approx 0{,}683$;
$P(X \in [-2\,;2]) \approx 0{,}954$;
$P(X \in [-3\,;3]) \approx 0{,}997$.



Calculer une probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$ lorsque la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart type σ.
Ci-contre, exemple de calcul de probabilité pour la loi normale $\mathcal{N}(20\,;9)$, où $\mu = 20$ et $\sigma = 3$: $P(X \in [18\,;25])$.

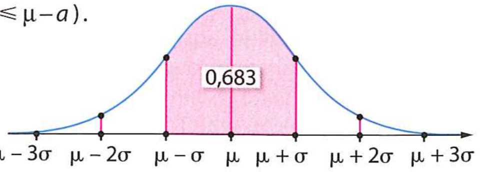
On ne garde que les 6 premiers chiffres du fait de l'approximation des logiciels.

Pour calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dans le cas d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, on utilise les fonctionnalités de la calculatrice. **Voir pages 346 et 347**
Pour $P(X \geqslant a)$, prendre $b = 10^{99}$. Pour $P(X \leqslant b)$, prendre $a = -10^{99}$.

TI™ : 2nde var 0 (distrib)	Casio : SHIFT 4 (CATALOG)
NormalFRép(a , b , μ , σ)	NormCD(a , b , σ , μ)
 normalFRép(18,25 ,20,3) .6997172026	 NormCD(18,25,3,20) 0.6997171102
Tableur Excel :	**TI-Nspire™ :**
=LOI.NORMALE(25;20;3;VRAI) -LOI.NORMALE(18;20;3;VRAI)  0,699717110180	 normCdf(18,25,20,3) 0.699717202635

Connaître les probabilités d'événements particuliers de la forme $\{X \in [\mu-a\,;\mu+a]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.

$P(\mu-a \leqslant X \leqslant \mu+a) = 1-2P(X \leqslant \mu-a)$.
$P(X \in [\mu-\sigma\,;\mu+\sigma]) \approx 0{,}683$.
$P(X \in [\mu-2\sigma\,;\mu+2\sigma]) \approx 0{,}954$.
$P(X \in [\mu-3\sigma\,;\mu+3\sigma]) \approx 0{,}997$.



QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

9 La fonction f donnée par $f(x)$ est une fonction de densité sur $[\,1\,;e\,]$.
a. $f(x) = \dfrac{x}{e}$. **b.** $f(x) = e^x$. **c.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

10 Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,1\,;10\,]$, alors :
a. la fonction de densité de X est $f(x) = \dfrac{1}{10}$. **b.** $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{1}{3}$. **c.** $E(X) = 5$.

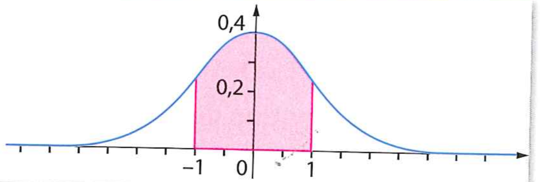
11 On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[\,14\,;20\,]$.
La probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 15 est :
a. $\dfrac{5}{6}$. **b.** $\dfrac{6}{5}$. **c.** $\dfrac{1}{6}$.

12 La fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ est :
a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}$. **b.** $g(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{2\sqrt{2\pi}}$. **c.** $h(x) = \sqrt{2\pi}\,e^{-x^2}$.

13 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors :
a. $P(X \geqslant 1) = P(X \leqslant 1)$. **b.** $P(-3 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - P(X \geqslant 1)$. **c.** $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - 2P(X \leqslant -1)$.

14 X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors :
a. $P(X \leqslant -3) = 0$. **b.** $P(X \leqslant -1) \approx 0{,}16$. **c.** $P(X = 0) = 0{,}4$.

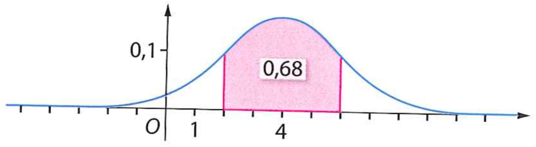
15 X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors l'aire coloriée en rose, en unité d'aire, est égale à :
a. 0,5 .
b. $P(X \leqslant -1) - P(X \leqslant 1)$.
c. $1 - 2\,P(X \geqslant 1)$.



16 La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. Alors :
a. $P(X \in [\mu-\sigma\,;\mu+\sigma]) \approx 0{,}683$. **b.** $P(X \in [\mu-3\sigma\,,\mu+3\sigma]) \approx 0{,}95$. **c.** $P(X \in [\mu-2\sigma\,,\mu+2\sigma]) \approx 0{,}095$.

17 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(16\,;4)$. Alors :
a. $P(X \leqslant 20) \approx 0{,}841$. **b.** $P(12 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0{,}682$. **c.** $P(X \leqslant 20) \approx 0{,}977$.

18 La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(4\,;\sigma^2)$ et on a représenté ci-contre la probabilité $P(2 \leqslant X \leqslant 6)$. Alors :
a. $\sigma = 4$. **b.** $\sigma = 2$. **c.** $\sigma = 1$.



1 Lois à densité

19 Vrai ou faux ? – Fonctions de densité

Justifier la réponse.

a. La fonction f donnée par $f(x)=\frac{3}{x^2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[-6\,;6]$.

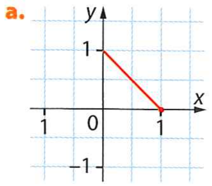
b. La fonction g donnée par $g(x)=1-\frac{x}{2}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. La fonction h donnée par $h(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[1\,;4]$.

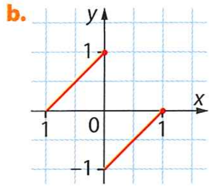
20 Reconnaître graphiquement une fonction de densité

Parmi les courbes suivantes, indiquer celles qui représentent des fonctions de densité :

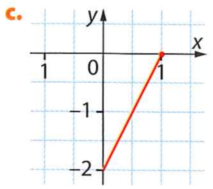
a.



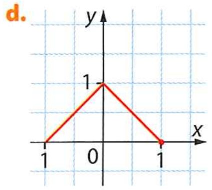
b.



c.



d.



21 Créer une fonction de densité

Déterminer le nombre k afin que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k(2-2x)$, soit une fonction de densité sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

22 Fonction de densité définie par intervalle

1 **a.** Montrer que la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x$ et sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x)=2-x$ est une fonction de densité sur $[0\,;2]$.

b. Soit X la variable aléatoire de densité f.
Calculer la probabilité $P(1\leqslant X\leqslant 2)$.

2 Mêmes questions pour la fonction f définie :

- sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=\frac{1}{2}$;
- sur l'intervalle $[1\,;3]$ par $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{x}{4}$.

23 Fonction de densité affine

1 **a.** Dans un repère orthonormé, représenter la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x)=4-x$.

b. Par propriété géométrique, peut-on affirmer que f est une fonction de densité sur $[0\,;4]$?

2 Déterminer le nombre k pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=k-x$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;k]$.

24 Fonction de densité exponentielle

1 Donner une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=e^{-x}$.

2 En déduire le nombre k tel que la fonction $g=k\times f$ soit une fonction de densité sur $[0\,;1]$.

3 Calculer alors la valeur exacte de la probabilité :

$$P(X\geqslant 0{,}5).$$

25 Fonction de densité et fonction puissance

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$f(x)=n\,x^{n-1}$, où n est un entier naturel non nul.

1 Montrer que la fonction f est une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2 **a.** Soit X une variable aléatoire de densité f.
Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement :

$$A=\{X\in[0{,}5\,;1]\}.$$

b. Déterminer la valeur du plus petit entier n pour que :

$$P(0{,}5\leqslant X\leqslant 1)\geqslant 0{,}9.$$

26 Fonction de densité polynômiale

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x)=k(x^2-x+1).$$

a. Déterminer le nombre k pour que la fonction $k\times f$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f.
On pose $A=\{X\in[0\,;0{,}5]\}$.
Calculer P(A), puis $P_A(X\in[0{,}4\,;0{,}6])$.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

27 Fonction de densité et fonction logarithme népérien

a. Montrer que la fonction F telle que $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\ln x$ sur l'intervalle $[e\,;e^3]$.

b. Déterminer le nombre k pour que la fonction $k\times f$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $[e\,;e^3]$.

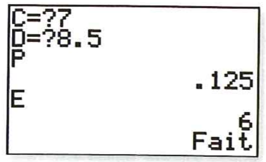
c. Soit X une variable aléatoire de densité f.
Calculer la valeur exacte de la probabilité $P(e\leqslant X\leqslant e^2)$.

28 Loi uniforme ALGO

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\,;12]$.

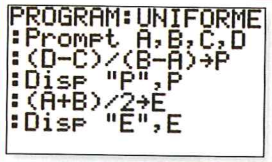
1 Calculer la probabilité $P(X\geqslant 10)$.

2 Un programme renvoie les valeurs P et E.
Expliquer ce que représentent ces valeurs pour la variable aléatoire X sachant que $A<C<D<B$.



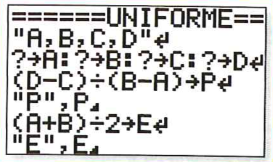
```
C=?7
D=?8.5
P
                .125
E
                   6
                Fait
```

TI™



```
PROGRAM:UNIFORME
:Prompt A,B,C,D
:(D-C)/(B-A)→P
:Disp "P",P
:(A+B)/2→E
:Disp "E",E
```

Casio



```
======UNIFORME==
"A,B,C,D"↵
?→A:?→B:?→C:?→D↵
(D-C)÷(B-A)→P↵
"P",P◢
(A+B)÷2→E↵
"E",E◢
```

29 Loi du hasard

On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[0\,;1]$.
Sachant que ce nombre est compris entre 0 et 0,5 , calculer la probabilité qu'il soit plus grand que 0,3 .

30 Calcul de l'espérance

Un établissement est ouvert de 7 h à 19 h. Un inspecteur de la sécurité décide de venir vérifier les installations. Sa visite dure deux heures, et il choisit son heure d'arrivée de manière totalement aléatoire.

1 Soit X la variable aléatoire indiquant l'heure d'arrivée de l'inspecteur.
Déterminer la loi de X et préciser son intervalle.

2 Calculer alors l'espérance de l'heure d'arrivée de l'inspecteur.

31 Temps d'attente

Un TGV part toutes les deux heures, entre 5 h et 24 h. Ziva doit prendre l'un de ces trains.
Elle arrive à la gare entre 8 h et 10 h. Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Ziva à la gare.

1 On suppose que X suit une loi uniforme sur un intervalle. Préciser cet intervalle.

2 Calculer la probabilité que Ziva attende moins de 30 minutes avant l'arrivée d'un TGV.

32 Nombre aléatoire et inéquation

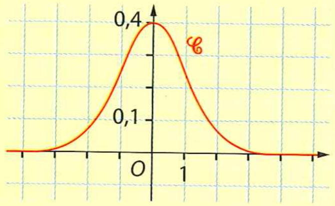
On choisit au hasard un nombre réel x de l'intervalle $[0\,;10]$. Calculer la probabilité que ce nombre x soit solution pour chacune des inéquations données.

a. $x^2-6x+5<0$ **b.** $x^2-7x+6>0$

2 La loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

33 QCM – Lecture de la courbe de Gauss

X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. À l'aide du graphique de la fonction de Gauss ci-contre, **indiquer toutes les bonnes réponses.**



1 **a.** $P(X=0)=0{,}4$
b. $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=0{,}5$
c. $P(X\geqslant 3)=P(X\leqslant -3)=0$

2 **a.** $P(X\geqslant -2)=P(X\leqslant 2)$
b. $P(-2\leqslant X\leqslant -1)=P(1\leqslant X\leqslant 2)$
c. $P(-2\leqslant X\leqslant 2)=1-\frac{1}{2}P(X\geqslant 2)$

3 À l'aide de la calculatrice, **indiquer toutes les bonnes réponses.**
a. $P(X\leqslant 1)\approx 0{,}84$
b. $P(0\leqslant X\leqslant 1)\approx 0{,}84$
c. $P(X\geqslant -1)\approx 0{,}84$
d. Si $P(X\leqslant a)=0{,}90$, alors $a=0{,}84$.

34 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse.

1 La fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ est définie par $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$.

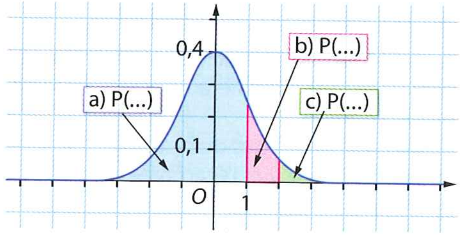
2 La courbe de densité est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3 f est définie uniquement sur $[-3\,;3]$.

4 Les valeurs de $f(x)$ pour $x\leqslant -3$ ou $x\geqslant 3$ n'apparaissent pas sur le graphique car elles sont inférieures au centième.

35 Visualiser des probabilités

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.
Compléter les étiquettes par les probabilités égales aux aires des domaines indiqués par la flèche.



36 Construire et lire la courbe de Gauss

1 Dans un repère orthogonal, d'unités 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées, représenter la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{0}\,;\mathbf{1})$.

2 a. Mettre en évidence sur ce graphique, la probabilité de l'événement $\{X \in [0\,;1]\}$.

b. Lire graphiquement, en comptant les carreaux, une valeur approchée de cette probabilité.

c. Utiliser ce résultat pour retrouver la probabilité pour que la variable X soit dans $[-1\,;1]$.

37 Loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ et tableur TICE

PARTIE A

Lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$, pour calculer $P(X \leqslant 3)$ à l'aide d'un tableur, on utilise la fonction LOI.NORMALE.STANDARD(3).

(Ou `fx =LOI.NORMALE.STANDARD.N(3;VRAI)` *sur la version 2010. VRAI signifie que l'on calcule des probabilités cumulées.)*

Pour déterminer la valeur du nombre a tel que $P(X \leqslant a) = k$, on utilise la loi normale inverse :

`fx =LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,95)`

Déterminer le nombre a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}95$.

PARTIE B Applications

1 a. Exprimer $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$ uniquement en fonction de $P(X \leqslant -1)$.

On pourra s'aider de la représentation de la fonction de Gauss de l'exercice ***35***.

b. À l'aide du tableur, calculer la probabilité :

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 1).$$

c. À l'aide du tableur, retrouver le résultat du cours pour la probabilité $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96)$.

2 Exprimer la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$ en fonction de $P(X \leqslant b)$ et de $P(X \leqslant a)$.

Calculer la probabilité $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

3 Utiliser le résultat obtenu en **Partie B 1 a.** pour déterminer, à l'aide du tableur, la valeur arrondie au centième près du nombre a tel que :

$$P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0{,}86.$$

38 Représentation de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ sur calculatrice

On lance 4 500 fois de suite un dé parfaitement équilibré. La variable aléatoire X égale au nombre de 6 apparus suit une loi binomiale.

1 a. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de X.

c. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 800)$.

d. Calculer la probabilité $P(775 \leqslant X \leqslant 800)$.

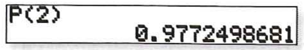
2 On pose $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. On admet que l'on peut assimiler la loi de Z à la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

a. Montrer que $P(X \leqslant 800) \approx P(Z \leqslant 2)$.

b. Représenter $P(Z \leqslant 2)$ sur la calculatrice et en donner une valeur arrondie au millième près, en utilisant les fonctionnalités ci-dessous.

Sur Casio : $P(Z \leqslant 2)$ se calcule par P(2). Il faut aller chercher la fonction P par :

MENU 1 OPTN F6 F3 F6 F1 2) EXE

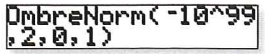


```
P(2)
            0.9772498681
```

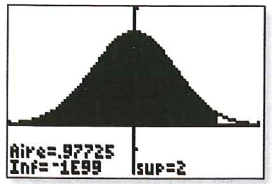
Sur TI™ : on peut calculer et représenter $P(Z \leqslant \mathbf{2})$:

2nde distrib var et choisir

```
DISTRIB DESSIN
1:OmbreNorm(
```



```
OmbreNorm(-10^99
,2,0,1)
```



```
Aire=.97725
Inf=-1E99    sup=2
```

On obtient ainsi la représentation et le calcul.

c. En utilisant ces fonctions, donner la valeur arrondie au centième près de $P(1 \leqslant Z \leqslant 2)$.

En déduire une approximation de la probabilité $P(775 \leqslant X \leqslant 800)$, les bornes étant arrondies à l'unité près.

39 Étude de la fonction de Gauss

a. Calculer la fonction dérivée φ' de la fonction de Gauss, définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$.

b. Calculer la fonction dérivée seconde φ'' de la fonction de Gauss, puis étudier son signe.

c. En déduire l'existence de deux points d'inflexion pour la courbe de φ, dont on précisera les abscisses α_1 et α_2.

d. On considère la variable aléatoire X de fonction de densité φ. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \in [\alpha_1\,;\alpha_2]\}$.

40 Une primitive de la fonction de Gauss

Soit Φ une primitive de la fonction de Gauss.

On ne demande pas de la déterminer.

1 Exprimer $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$ à l'aide de Φ.

2 a. Déterminer la fonction dérivée de Φ.

b. Montrer que la fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 a. Calculer la fonction dérivée seconde de la fonction Φ, puis étudier son signe.

b. En déduire que la courbe représentative de la fonction Φ admet un point d'inflexion dont on donnera l'abscisse.

4 On considère une variable aléatoire X, dont la fonction de densité est la fonction de Gauss φ.

Justifier que $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

---

3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

41 Vrai ou faux ?

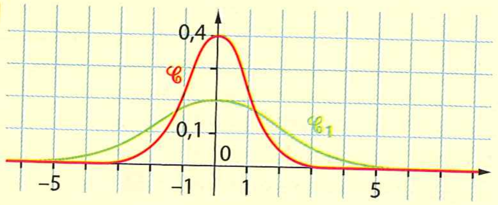
Dans les trois graphiques ci-dessous, les deux courbes représentent les fonctions de densité de variables aléatoires qui suivent une loi normale.

En justifiant la réponse, dire pour chaque graphique si ces deux variables aléatoires ont :

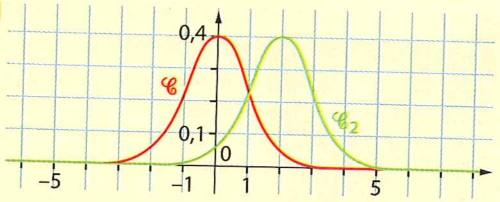
a. la même espérance ;

b. le même écart type.

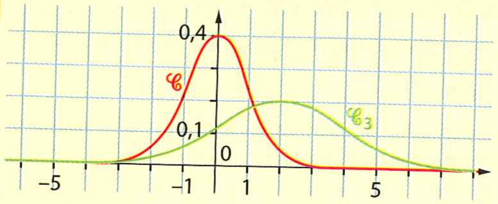
1



2



3



42 QCM

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart type 2.

Donner toutes les bonnes réponses.

1 On pose $Z = \dfrac{X-5}{2}$. La loi suivie par Z est :

a. une loi binomiale d'espérance 5 et d'écart type 2.

b. la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

c. la loi normale $\mathcal{N}(0\,;2)$.

d. la loi normale $\mathcal{N}(5\,;1)$.

2 a. $P(X \leqslant 9) = P(Z \leqslant 1)$

b. $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

c. $P(X \geqslant 7) = P(Z \leqslant -1)$

3 Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart type 2.

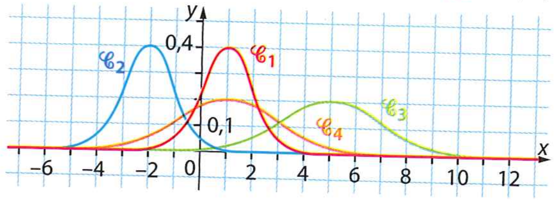
La valeur arrondie au centième de la probabilité $P(10 \leqslant X \leqslant 14)$ est égale à :

a. 0,99. **b.** 0,95. **c.** 0,68.

43 Reconnaître une courbe de densité

Associer à chaque courbe de densité, la loi normale correspondante.

a. $\mathcal{N}(-2\,;1)$ **b.** $\mathcal{N}(1\,;4)$ **c.** $\mathcal{N}(1\,;1)$ **d.** $\mathcal{N}(5\,;4)$



44 Influence de l'écart type TICE

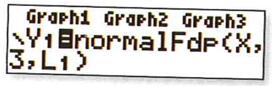
On veut observer l'influence de l'écart type σ sur la courbe de densité. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(3\,;\sigma^2)$. L'écart type σ varie.

1 Sur calculatrice TI™

Entrer, en liste L1 de la calculatrice, la suite de nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5, donnant différentes valeurs de l'écart type.

En Y1, entrer la fonction de densité de la loi, obtenue par : 2nde distrib var, puis :

`1:normalFdp(X,3,L1)`



```
 Graph1 Graph2 Graph3
\Y1■normalFdp(X,
3,L1)
```

Valider la fenêtre ci-contre.

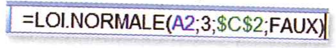
Puis tracer les courbes.

```
FENETRE
 Xmin=-10
 Xmax=15
 Xgrad=1
 Ymin=-.1
 Ymax=.5
 Ygrad=0.1
↓Xres=1
```

2 Sur tableur

a. En colonne A, de A2 à A22, entrer les nombres entiers de −10 à 10 et entrer en cellule C2 une valeur choisie pour l'écart type.

b. En cellule B2, saisir la formule qui, par recopie vers le bas, donne les valeurs de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(3\,;\sigma^2)$:



`=LOI.NORMALE(A2;3;$C$2;FAUX)`

(Mettre LOI.NORMALE.N pour la version 2010. FAUX indique que les probabilités ne sont pas cumulées.)

c. Sélectionner la plage B2:B22 et construire le nuage de points.

d. Changer la valeur de l'écart type en C2 et observer l'influence sur :

- l'amplitude de l'intervalle $[3-\sigma\,;3+\sigma]$;
- la valeur de la fonction de densité en 3.

3 Pour aller plus loin

Retrouver ce dernier résultat en utilisant l'expression de la fonction de densité :

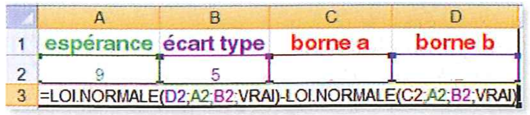
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{2\sigma^2}}.$$

45 Calculs de probabilités TICE

La distribution des notes obtenues à l'épreuve de mathématiques, à un concours d'entrée dans une école de commerce, suit une loi normale d'espérance 9 et d'écart type 5. On suppose que le tableur ne calcule que les probabilités de type $P(X \leqslant a)$.

1 **a.** Exprimer la probabilité $P(8 \leqslant X \leqslant 12)$ en fonction de $P(X \leqslant 8)$ et de $P(X \leqslant 12)$.

b. En cellule A3, on a l'instruction suivante :



	A	B	C	D
1	espérance	écart type	borne a	borne b
2	9	5		
3	=LOI.NORMALE(D2;A2;B2;VRAI)-LOI.NORMALE(C2;A2;B2;VRAI)			

Quelles valeurs faut-il entrer en ligne 2 pour effectuer le calcul précédent ?
Interpréter le résultat obtenu.

a	$P(X \leqslant a)$
4,5	0,18406013
5	0,2118554
5,5	0,24196365
6	0,27425312
6,5	0,30853754
7	0,34457826

2 **a.** À l'aide d'un tableur, on a obtenu les valeurs des probabilités $P(X \leqslant a)$ pour plusieurs valeurs de a.
Déterminer le nombre a le plus grand tel que $P(X \leqslant a) \approx 0{,}30$.

b. On souhaite obtenir une valeur du nombre a arrondie au centième près. On utilise alors la fonction : LOI.NORMALE.INVERSE du tableur.
Écrire l'instruction dans une cellule et conclure.

```
=LOI.NORMALE.INVERSE(0,3;9;5)
```

c. On sait que 30 % des élèves n'ont pas été admissibles. Quelle est la barre d'admissibilité ?

46 Taux de cholestérol

On a relevé les taux de cholestérol de 100 personnes. Ci-dessous le tableau de répartition :

Taux (en g/L)	1,2	1,5	1,7	1,9	2,1
Effectif	4	10	14	22	18
Taux (en g/L)	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
Effectif	13	9	5	3	2

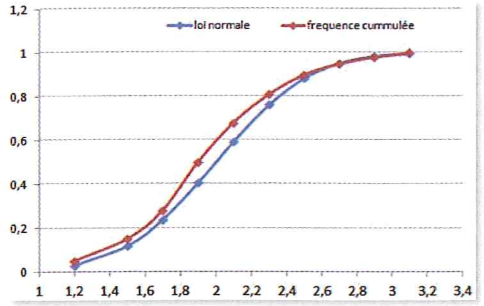
1 **a.** Calculer le taux de cholestérol moyen, ainsi que l'écart type de cette série.

b. Calculer les fréquences cumulées croissantes.

c. En déduire la part des personnes dont le taux de cholestérol est inférieur ou égal à 2,1 g/L.
Calculer la part des personnes dont le taux est compris entre 1,62 et 2,45 .

2 On a représenté sur le graphique ci-après les fréquences cumulées croissantes des taux de cholestérol, ainsi que les probabilités cumulées de la loi normale d'espérance 2,04 et d'écart type 0,42 .

Les deux courbes étant très proches, on admet que le taux de cholestérol d'une personne, choisie au hasard, suit la loi normale d'espérance 2,04 et d'écart type 0,42 .



a. Calculer la probabilité d'obtenir une personne dont le taux de cholestérol est inférieur à 2,1 g/L.

b. Calculer la probabilité d'obtenir une personne dont le taux est compris entre 1,62 et 2,45 .

c. Comparer aux valeurs obtenues en **1** .

47 Paramètres d'une loi normale

1 La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.
La variable aléatoire X vérifie de plus :

$$P(X \leqslant 15) = 0{,}015 \quad \text{et} \quad P(X \leqslant 28) = 0{,}5\,.$$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

2 **a.** On considère la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

Préciser la loi suivie par la variable aléatoire Z.

b. Montrer que : $P\left(Z \leqslant \dfrac{15 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}015$.

c. En déduire la valeur arrondie au dixième près de l'écart type σ de la loi X.

48 Durée de vie d'une ampoule fluo-compacte

On admet que la durée de vie, mesurée en heure, d'une ampoule fluo-compacte est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.
La variable aléatoire X vérifie :
$P(X \geqslant 10\,000) = 0{,}6$ et $P(X \leqslant 13\,000) = 0{,}69$.

a. On considère la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

Préciser la loi suivie par la variable aléatoire Z.

b. Montrer que :

$$P\left(Z \geqslant \frac{10\,000 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \text{ et } P\left(Z \leqslant \frac{13\,000 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}69\,.$$

c. Justifier que μ et σ sont solutions du système :

$$\begin{cases} 10\,000 - \mu = -0{,}252 \times \sigma \\ 13\,000 - \mu = 0{,}496 \times \sigma \end{cases}.$$

En déduire la valeur de l'écart type σ, puis celle de l'espérance μ. *Arrondir à l'unité près.*

49 Durée de séchage

Un sèche-linge est muni d'une sonde qui permet de déterminer le temps nécessaire pour sécher la charge de linge.

1 Mia met son linge à sécher sans en connaître la charge. On admet que la durée du séchage, exprimée en minute, suit une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [30 ; 150] . Mia met son linge à sécher à 11 h.

a. Calculer la probabilité qu'il soit sec avant 12 h.

b. Calculer le temps de séchage moyen que l'on peut espérer, en ayant réalisé un grand nombre de séchages dans cet appareil.

2 On admet désormais que la durée du séchage est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 30. Mia met son linge à sécher à 11 h.

a. Calculer la probabilité qu'il soit sec avant midi.

b. Calculer la probabilité que Mia récupère son linge sec entre 11 h 30 et 12 h.

50 Autonomie d'un véhicule

Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques. On se propose d'étudier l'autonomie, en kilomètre, de ces véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque véhicule pris au hasard dans la production, associe son autonomie en km.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1 Déterminer la probabilité que l'autonomie d'un véhicule pris au hasard dans la production soit comprise entre 98 et 122.

2 La probabilité qu'un véhicule ait une autonomie jugée insuffisante est $p = 0{,}04$. Calculer l'autonomie correspondante, c'est-à-dire la valeur du nombre a telle que $P(X \leqslant a) = 0{,}04$, arrondie au dixième près.

51 Magasin d'usine

Un fabricant de vêtements de sport commercialise directement sa production. Son commercial a constaté, lors d'une étude statistique sur un grand nombre de clients, que le montant total des achats d'un client choisi au hasard suit une loi normale d'espérance 350 € et d'écart type 150 €.
On note X la variable aléatoire égale au montant total des achats d'un client choisi au hasard.

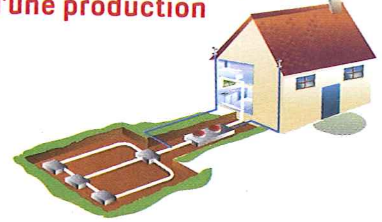
1 Calculer les probabilités que le montant des achats :

a. soit inférieur à 100 € ; **b.** soit de 400 € au moins ;

c. soit compris entre 200 € et 500 €.

2 Le fabricant décide d'accorder une remise aux clients dont le montant des achats est suffisamment élevé. Quel montant doit-il choisir pour que 30 % des clients bénéficient de cette remise ? *Arrondir à la dizaine supérieure.*

52 Amélioration de la qualité d'une production



Une usine fabrique des tubes spécifiques pour les installations de chauffage géothermique.
Un tube est accepté au contrôle si l'épaisseur de la paroi est comprise entre 1,35 mm et 1,65 mm.
On désigne par X la variable aléatoire égale à l'épaisseur de la paroi d'un tube prélevé au hasard.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart type 0,07 .

1 Calculer la probabilité qu'un tube soit accepté au contrôle. *On donnera le résultat arrondi au centième de millimètre près.*

2 L'entreprise désire améliorer la qualité de la production en modifiant le réglage des machines.
On admet, qu'après réglages, la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1{,}5\,;\sigma^2)$.
Pour quelle valeur de l'écart type σ, arrondie au millième près, un tube prélevé au hasard dans la nouvelle production est accepté au contrôle avec une probabilité égale à 0,99 ?

53 Suivi anténatal

Une société française d'obstétrique a déterminé des normes de biométrie pour le suivi anténatal des fœtus par échographie.
Parmi les mesures utilisées, la longueur fémorale permet de suivre la croissance du fœtus quel qu'il soit. Lors de l'échographie du 3^{e} trimestre, cette longueur est distribuée selon une loi normale d'espérance 60 mm et d'écart type 2 mm.

k	$P(X \leqslant k)$
54	0,001349898
55	0,006209665
56	0,022750132
57	0,066807201
58	0,158655254
59	0,308537539
60	0,5
61	0,691462461
62	0,841344746
63	0,933192799
64	0,977249868
65	0,993790335

1 Calculer la probabilité que la longueur fémorale :

a. soit comprise entre 58 et 62 mm ;

b. soit supérieure à 62 mm.

2 Déterminer la longueur fémorale maximale ℓ, arrondie au dixième de millimètre près, pour que la probabilité d'être inférieure à ℓ soit de l'ordre de 0,07 .

3 Déterminer le plus petit intervalle $[a\,;b]$ tel que :

$$P(X \in [a\,;b]) = 0{,}95\,.$$

Accompagnement personnalisé

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Calculer la probabilité de $\{X\in[c;d]\}$.	$\{X\in[c;d]\}$ est un événement qui se réalise si la variable aléatoire X prend une valeur entre *c* et *d* comprises. **Attention** Ne pas confondre l'événement $\{c\leqslant X\leqslant d\}$ avec sa probabilité $P(c\leqslant X\leqslant d)$ qui est toujours un nombre entre 0 et 1.
On considère une variable aléatoire X continue sur un intervalle. **Calculer $P(c\leqslant X\leqslant d)$.**	Bien repérer, dans l'énoncé, la variable aléatoire et si elle est continue, et indiquer clairement ce qu'elle représente et dans quel intervalle elle varie. • Si la variable aléatoire X est définie par sa fonction de densité *f*, alors on calcule à l'aide d'une intégrale : $P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut utiliser la calculatrice pour en connaître une valeur numérique. • Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a;b]$, alors $P(c\leqslant X\leqslant d)=\dfrac{d-c}{b-a}$. • Si la variable aléatoire suit une loi normale, on indique explicitement l'espérance μ et l'écart type σ et on note $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors on utilise la calculatrice ou le tableur pour calculer la probabilité. Voir AP 59 page 222
Calculer la probabilité pour que la variable aléatoire X soit supérieure à une valeur seuil *d* : $P(X>d)$.	Dans le cas d'une **loi continue**, la probabilité d'obtenir exactement la valeur *d* est nulle, donc $P(X\geqslant d)=P(X>d)$. Quelle que soit la variable aléatoire X, l'événement $\{X\geqslant d\}$ est le contraire de l'événement $\{X<d\}$ ou $\{X\leqslant d\}$. Ainsi, $P(X\geqslant d)=1-P(X<d)=1-P(X\leqslant d)$.
Calculer une valeur arrondie d'une probabilité.	En général, on modélise la loi d'une variable aléatoire continue, ou discrète ayant de nombreuses valeurs, par une loi « classique » (uniforme, normale, etc.). On n'a donc jamais une valeur exacte d'une probabilité, mais une valeur approchée. On arrondit, en général, le résultat numérique d'une probabilité en ne gardant que 3 ou 4 chiffres maximum après la virgule.

Exercice guidé

54 En moyenne la largeur de la main d'un homme adulte est de 9,5 cm. On admet que la variable aléatoire égale à cette largeur suit une loi normale d'espérance 9,5 et d'écart type 2.
Un fabricant de poignées de porte étudie cette loi pour programmer sa production.
On arrondira les résultats au millième près.

1 Quelle est la probabilité que la largeur de la main d'un homme mesure moins de 8 cm ?

2 Quelle est la probabilité que la largeur de la main d'un homme mesure plus de 12 cm ?

3 Le fabricant veut assurer une production couvrant au moins 90 % de la population.

a. Quel intervalle d'amplitude 2*a* centré en 9,5 a pour probabilité 0,90 ?
Arrondir les bornes de l'intervalle au dixième de cm près.

b. Quelle doit être la longueur minimale de la poignée d'une porte ?

Aide

On nomme X la variable aléatoire égale à la largeur de la main d'un homme. On indique que c'est une loi continue.

1 On calcule $P(-10^{99}\leqslant X<8)$ à la calculatrice. On peut calculer $P(0\leqslant X<8)$, car la valeur de $P(-10^{99}\leqslant X<0)$ est négligeable.

2 On demande de calculer $P(X\geqslant 12)$.
On calcule donc $1-P(X\leqslant 12)$.

3 On cherche *a* tel que :

$$P(9{,}5-a\leqslant X\leqslant 9{,}5+a)=0{,}90$$
$$\Leftrightarrow 1-2\,P(X\leqslant 9{,}5-a)=0{,}90,$$

donc on cherche la valeur de *a* telle que :

$$P(X\leqslant 9{,}5-a)=0{,}05\,.$$

Puis on utilise la calculatrice pour trouver la valeur de $9{,}5-a$, puis la longueur minimale $9{,}5+a$ de la poignée pour couvrir au moins 90 % de la production.

Accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

Savoir déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

55 Un joueur lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré.
S'il obtient 4 ou 5, il gagne 0,20 €.
S'il obtient le 6, il gagne 0,50 €.
Sinon, il perd 0,10 €.

a. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance du gain *m*.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'écart type σ de la variable X.

Aide

Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X, puis dresser le tableau de la loi de probabilité.

X	x_1	x_2	x_3
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3

L'espérance est :

$$E(X)=p_1\times x_1+p_2\times x_2+p_3\times x_3\,.$$

Voir pages 345 à 349

Savoir utiliser les propriétés de l'espérance et de l'écart type

56 On reprend l'exercice **55**.
Le joueur mise 0,20 € au début du jeu.

a. Donner la loi de probabilité du nouveau gain algébrique Y du joueur. Calculer son espérance et son écart type et comparer avec ceux de la loi X de l'exercice **55**.

b. En déduire une relation entre les espérances $E(X-k)$ et $E(X)$, puis entre les écarts types σ_{X-k} et σ_X.

57 Le meneur de jeu décide de doubler tous les gains et les pertes. Soit Z la variable aléatoire égale au nouveau gain du joueur.

a. Exprimer Z en fonction de X.

b. Calculer l'espérance $E(Z)$ et l'écart type σ_Z.

c. Comparer aux valeurs de l'espérance et de l'écart type de la variable X.

d. En déduire une relation entre les espérances $E(kX)$ et $E(X)$, puis entre les écarts types σ_{kX} et σ_X.

Aide

Le but est de revoir les propriétés de l'espérance et de l'écart type d'une loi.
Comme l'espérance est une moyenne pondérée, elle a les mêmes propriétés que la moyenne :

- si on ajoute, ou soustrait, le même nombre *k* à toutes les valeurs de la variable X, l'espérance augmente ou diminue du même nombre *k* ;
- si on multiplie toutes les valeurs de la variable X par un nombre *k* non nul, l'espérance est multipliée par *k*.

Pour l'écart type, on admet les propriétés mises en évidence dans ces exercices :

$$\sigma_{X-k}=\sigma_X \quad\text{et}\quad \sigma_{kX}=k\,\sigma_X\,.$$

Savoir construire un histogramme

58 On considère la série statistique suivante :

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20]
f_i (en %)	5	35	50	10

1 a. Placer les bornes des classes sur un axe gradué. Calculer les amplitudes de chaque classe.

b. Choisir une hauteur pour la classe de plus faible amplitude et calculer les hauteurs des autres rectangles.

c. Construire l'histogramme.

2 Sur l'histogramme, construire le polygone de fréquences.

3 Refaire l'histogramme si la classe [10 ; 15 [est coupée en deux classes :
[10 ; 12 [d'effectif 30 et [12 ; 15 [d'effectif 20.

Aide

1 Un histogramme est formé de rectangles ayant une aire proportionnelle à la fréquence et une largeur égale à l'amplitude de la classe.
Si on choisit l'unité d'aire pour que l'aire soit égale à la fréquence, alors :

$$\text{Aire}=\text{amplitude}\times\text{hauteur}=\text{fréquence},$$

$$\text{d'où : }\quad \text{hauteur}=\frac{\text{fréquence de la classe}}{\text{amplitude de la classe}}\,.$$

Lorsque toutes les classes ont la même amplitude, la hauteur est proportionnelle à la fréquence.

2 Le polygone des fréquences s'obtient en joignant les milieux des segments supérieurs des rectangles.

Accompagnement personnalisé

Savoir reconnaître et utiliser la loi binomiale

59 Une enquête montre, qu'un soir, 78 % des jeunes regardent la série Docteur H.
On interroge successivement, et de manière indépendante, 25 jeunes.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jeunes interrogés ayant regardé la série Docteur H ce soir-là.

1 Calcul d'une probabilité
Vrai ou faux ? Justifier la réponse.

a. X suit la loi $\mathcal{B}(0{,}78 ; 25)$.

b. $P(X=18)=\binom{25}{18}\times 0{,}78^{18}\times 0{,}22^{7}$.

c. $P(X=25)=0{,}78^{25}$.

2 Utilisation de la calculatrice
À l'aide de la calculatrice, calculer :

a. $P(X=18)$. **b.** $P(X\leqslant 20)$.
c. $P(X>20)$. **d.** $P(18\leqslant X\leqslant 20)$.

3 Espérance et variance
Vrai ou faux ? Justifier la réponse.

a. $E(X)=25\times 0{,}78$. **b.** $E(X)=\frac{25}{2}$.
c. $E(X)=25+0{,}78$. **d.** $V(X)=4{,}29$.

Aide

On reconnaît la **répétition** de $n = 25$ **épreuves de Bernoulli** **identiques et indépendantes** de succès « avoir regardé la série docteur H » de probabilité $p = 0{,}78$.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; 0{,}78)$.

1 $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^{k}\times(1-p)^{n-k}$, où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial donnant le nombre de listes composées de n termes et **contenant k succès** parmi ces **n termes**.

2 **Attention** Si X est une loi binomiale, la probabilité $P(X=k)$ n'est pas nulle.

$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a-1)$

TI™	Casio
distrib 2nde var puis DISTRIB	OPTN STAT DIST BINM
Pour P(X = k)	
Ø:binomFdp(n,p,k)	Bpd puis BinomialPD(n,p,k)
Pour P(X ⩽ k)	
A:binomFrép(n,p,k)	Bcd puis BinomialCD(n,p,k)

3 Lorsque X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n ; p)$,
alors son **espérance** est $E(X)=n\times p$,
et sa **variance** est $V(X)=n\times p\times(1-p)$.

Pour aller plus loin

60 Modéliser : centrer et réduire pour calculer une probabilité

Une étude vétérinaire a montré que la probabilité que des animaux contractent une certaine maladie était égale à 0,04 . On choisit au hasard 10 000 animaux et on étudie si ceux-ci ont contracté ou non la maladie.
On admet que les états de santé des animaux sont indépendants les uns des autres.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi les 10 000.

1 a. Déterminer la loi de probabilité de X et préciser ses paramètres.
b. Calculer son espérance μ et son écart type σ.

2 Soit la variable aléatoire $Z=\frac{X-400}{8\sqrt{6}}$. On admet que la variable aléatoire Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

a. Montrer que $P(X\leqslant b)=P\left(Z\leqslant\frac{b-400}{8\sqrt{6}}\right)$.

b. En utilisant le tableau ci-après, déterminer la plus petite valeur du nombre b tel que $P(X\leqslant b)\approx 0{,}70$.

c. Vérifier le résultat en utilisant la « fonction inverse » de la loi normale sur tableur ou calculatrice.
d. Interpréter le résultat trouvé.

3 a. Montrer que :

$$P(400-a\leqslant X\leqslant 400+a)=2\ P\left(Z\leqslant\frac{a}{8\sqrt{6}}\right)-1.$$

b. En utilisant le tableau, déterminer la valeur du nombre a, arrondie à l'unité, telle que :

$$P(400-a\leqslant X\leqslant 400+a)\approx 0{,}50.$$

c. Interpréter le résultat trouvé.

d	$P(Z\leqslant d)$
0,5	0,6915
0,51	0,6950
0,52	0,6985
0,53	0,7019
0,54	0,7054
0,55	0,7088
0,56	0,7123
0,57	0,7157
0,58	0,7190
0,59	0,7224

d	$P(Z\leqslant d)$
0,6	0,7257
0,61	0,7291
0,62	0,7324
0,63	0,7357
0,64	0,7389
0,65	0,7422
0,66	0,7454
0,67	0,7486
0,68	0,7517
0,69	0,7549

Accompagnement personnalisé

61 Raisonner : étude d'une densité

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(t)=2t\,e^{-t^2}.$$

1 a. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser le tableau des variations.
b. Calculer la dérivée seconde f'', puis étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
c. En déduire que la courbe représentative (C) de la fonction f admet un point d'inflexion, dont on déterminera les coordonnées, arrondies au dixième près.
d. Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé d'unités 2 cm pour 0,5 sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

2 a. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(t)\,dt$.
b. En déduire la valeur du nombre k, pour que la fonction $g=k\times f$ soit une densité de probabilité sur $[0 ; 3]$.
c. Soit X une variable aléatoire de fonction de densité g obtenue en **2 b.**
Calculer la valeur exacte de $P(X\leqslant 1)$, puis sa valeur arrondie au centième près.

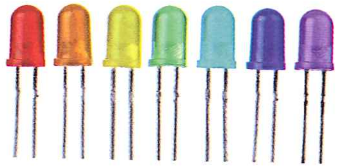
3 Justifier que la fonction saisie en Y1 est la fonction h définie par $h(x)=x\,g(x)$.
Calculer l'intégrale de cette fonction entre 0 et 3.
Que représente ce calcul ?

```
Graph1 Graph2 Graph3
\Y1■X*(2X*e^(-X²
))/(1-e^(-9))
```

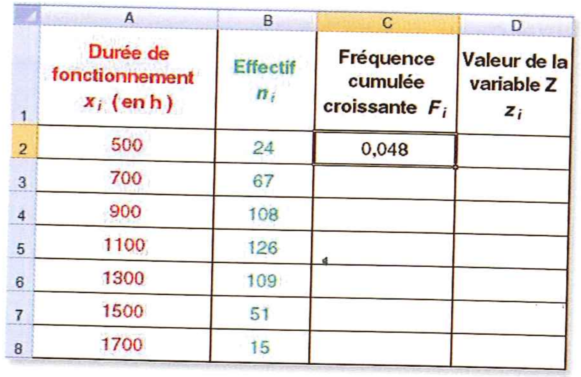
```
intégrFonct(Y1,X
,0,3)
```

62 Modélisation sur tableur : droite de Henry

TICE



Une étude sur la durée de fonctionnement de 500 composants électroniques a permis de construire le tableau suivant :



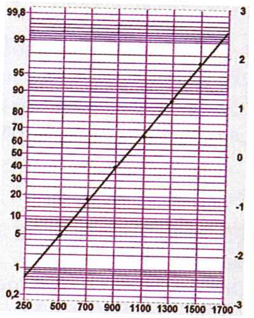
	A	B	C	D
1	Durée de fonctionnement x_i (en h)	Effectif n_i	Fréquence cumulée croissante F_i	Valeur de la variable Z z_i
2	500	24	0,048	
3	700	67		
4	900	108		
5	1100	126		
6	1300	109		
7	1500	51		
8	1700	15		

1 À l'aide d'un tableur, calculer les fréquences cumulées croissantes de cette série.
Indiquer la formule à écrire en cellule C3.
Calculer la moyenne μ et l'écart type σ de cette série.

2 Soit une variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et la variable aléatoire définie par $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Z ?
b. Déterminer, en fonction de x, l'expression du réel z tel que $P(X\leqslant x)=P(Z\leqslant z)$.
c. Justifier que le point de coordonnées $(x ; z)$ appartient à une droite $\mathcal{D}$, dont on donnera l'équation réduite.

Pour info La **droite de Henry** porte le nom de son inventeur, le polytechnicien J. P. P. Henry (1848-1907), qui l'a enseignée à l'école d'artillerie en 1880.
C'est une méthode graphique qui permet, lorsqu'une série statistique peut être ajustée par une loi normale, de déterminer rapidement la moyenne et l'écart type de cette série.
Pour cela, on place les points $(x_i ; f_i)$ sur du papier **gausso-arithmétique** comme ci-contre (logiciel *Sine Qua Non*).



d. Justifier que l'abscisse du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses est l'espérance μ de X.
e. Justifier que l'abscisse du point de la droite de Henry d'ordonnée 1 est $\mu+\sigma$.

3 On formule l'hypothèse que la durée de fonctionnement d'un composant électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi normale.
On assimile alors les fréquences cumulées croissantes F_i aux probabilités cumulées $P(X\leqslant x_i)$.
On a donc $F_i=P(Z\leqslant z_i)$.

a. En utilisant la fonction du tableur :

LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE ,

appliquée aux valeurs F_i, compléter la colonne D des valeurs z_i du tableau précédent.
b. Construire le nuage de points $(x_i ; z_i)$.
Ces points sont-ils alignés ?
c. On admet que la droite qui s'approche au mieux de l'ensemble de ces points a pour équation :

$$y=0{,}0035\,x-3{,}4.$$

En utilisant les réponses aux questions **2 d.** et **2 e.**, donner la valeur arrondie à l'unité près de l'espérance de X, ainsi que de l'écart type.

4 Calculer une valeur approchée de la probabilité que la durée de fonctionnement d'un composant soit comprise entre 600 et 800 heures.
Pouvait-on répondre à cette question avec les seules données initiales ?

63 QCM

Donner toutes les bonnes réponses.

1 La fonction de densité d'une variable aléatoire X est définie sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ par $f(x)=k\,x^2$, où k un nombre réel.

a. $k=3$. **b.** $P(X=2)=4\,k$. **c.** $P(0{,}5\leqslant X\leqslant 1)=\frac{1}{2}$.

2 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

a. La fonction de densité de la loi normale est définie par $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$.

b. $P(-1\leqslant X\leqslant 1)=\frac{1}{2}$.

c. Si le nombre a vérifie $P(-a\leqslant X\leqslant a)\approx 0{,}95$, alors $a=1{,}96$.

3 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\,;36)$. Le plus petit entier n tel que :

$$P(20-n\leqslant X\leqslant 20+n)\approx 0{,}68 \text{ est :}$$

a. $n=14$. **b.** $n=6$. **c.** $n=12$.

64 QCM

Donner toutes les bonnes réponses.

1 Corentin doit prendre le bus à 7 heures. Il arrive régulièrement en retard à l'arrêt de bus et le suivant passe 30 minutes plus tard.

On suppose que la variable aléatoire X égale au retard de Corentin est uniformément répartie dans l'intervalle $[\,0\,;30\,]$.

a. La fonction de densité de X est définie par $f(x)=30$.

b. La probabilité que Corentin attende entre 10 et 15 minutes est égale à $\frac{1}{6}$.

c. Corentin peut espérer attendre en moyenne 10 minutes.

2 Une étude a été réalisée sur une population de jeunes enfants pour déterminer l'âge auquel les premiers mots de vocabulaire apparaissent.

Soit X la variable aléatoire égale à l'âge auquel les jeunes enfants prononcent leur premier mot.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 11,5 mois avec un écart type de 3,2 mois. Alors :

a. $P(X\leqslant 9)\approx 0{,}21$.

b. $P(X\geqslant 15)\approx 0{,}86$.

c. $P(8\leqslant X\leqslant 12)=0{,}5$.

3 Lors d'un test de mathématiques, les élèves de Terminale ES ont obtenu une moyenne de 42 points sur 60 et d'écart type 18.

On suppose que les notes se répartissent suivant une loi normale.

a. Il y a environ 1 chance sur 4 qu'un élève ait eu moins de 30.

b. Il y a 67 % de chances qu'un élève ait eu plus de 50.

c. Il y a 5 % de chances qu'un élève ait eu moins de 20.

65 Taille des femmes en France

1 Une étude sur une population, contenant le même nombre d'hommes et de femmes, a montré que 7 % des femmes et 84 % des hommes mesurent plus de 175 cm.

On choisit une personne au hasard dans cette population.

a. Calculer la probabilité que cette personne soit une femme mesurant plus de 175 cm.

b. Calculer la probabilité d'obtenir une personne mesurant plus de 175 cm.

c. On choisit une personne mesurant plus de 175 cm. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

2 On suppose maintenant que la variable aléatoire X égale à la taille d'une femme française suit la loi normale d'espérance 163 cm et d'écart type 11 cm. Le tableau ci-après donne les probabilités cumulées de cette loi normale pour des valeurs comprises entre 164 et 188 cm.

a. Calculer la probabilité qu'une femme française mesure moins de 175 cm.

b. La taille minimale pour exercer certains métiers est de 175 cm. Quelle est la probabilité pour une femme française de remplir ce critère ?

c. Déterminer le plus grand nombre a tel que :

$$P(X\leqslant a)=0{,}70.$$

d. En déduire la taille maximale, au cm près, de 70 % des femmes françaises.

a	$P(X\leqslant a)$
164	0,5362
165	0,5721
166	0,6075
167	0,6419
168	0,6753
169	0,7073
170	0,7377
171	0,7665
172	0,7934
173	0,8183
174	0,8413
175	0,8623
176	0,8814

a	$P(X\leqslant a)$
177	0,8984
178	0,9137
179	0,9271
180	0,9389
181	0,9491
182	0,9579
183	0,9655
184	0,9719
185	0,9772
186	0,9817
187	0,9854
188	0,9885

66 Carte de fidélité

Un grand magasin procède à la vérification de ses cartes de fidélité, avant leur mise en circulation.

Sur les 100 000 dernières cartes fabriquées, on a observé que :

- 0,5 % des cartes de fidélité présentent un défaut ;
- 0,6 % des cartes de fidélité sans défaut sont rejetées lors du contrôle ;
- 99 % des cartes de fidélité avec défaut sont rejetées lors du contrôle.

On prélève au hasard une carte parmi ces 100 000 cartes.

On considère les événements suivants :

D : « la carte de fidélité présente un défaut » ;

A : « la carte de fidélité est acceptée après contrôle ».

1 a. Calculer $P_A(\overline{D})$, puis $P(A)$.

Arrondir les résultats au dix millième près.

b. Calculer la probabilité qu'une carte, qui a été rejetée, ait un défaut.

2 On interroge un client choisi au hasard parmi l'ensemble des clients possédant la carte de fidélité.

Soit X la variable aléatoire égale au montant, en euro, de ses achats par semaine.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

a. Calculer $P(34\leqslant Y\leqslant 46)$. Interpréter le résultat.

b. Calculer la probabilité que le montant des achats dépasse 30 €.

67 Test de QI

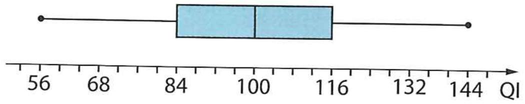
Au cours d'examens psychologiques, les psychologues peuvent avoir recours à des tests de QI (Quotient Intellectuel) pour mesurer différentes aptitudes intellectuelles. Il existe différents types de tests.

On étudie la répartition des résultats de deux tests de QI : le test de **QI standard** et le **test de Cattell**, tous deux effectués sur 1 000 personnes choisies au hasard.

Pour info James Mc Keen Cattell (1860-1944), philosophe et psychologue, a cherché comment rationnaliser et mesurer la psychologie à partir de tests anthropométriques et mentaux.

1 Le diagramme en boîte ci-dessous montre la répartition des résultats du test de Cattell effectué sur ces 1 000 personnes.

Les extrémités des moustaches correspondent aux valeurs minimale et maximale.



Recopier le diagramme en boîte et justifier l'affirmation suivante :

« Au moins 25 % des personnes testées ont obtenu au test de Cattell un résultat supérieur ou égal à 116. »

2 Les résultats du test de QI standard effectué sur ces 1 000 personnes sont répartis ainsi :

Minimum : 56 ; Maximum : 144 ;

$Q_1=88$; $Q_3=110$; Médiane : 100.

a. Construire le diagramme en boîte des résultats du test de QI standard au-dessus de celui du test de Cattell.

b. En comparant les deux diagrammes en boîtes, indiquer le test pour lequel la dispersion des résultats dans cet échantillon est la plus importante.

Justifier la réponse.

3 Des études statistiques sur un grand nombre d'individus choisis au hasard ont permis de modéliser la loi des résultats au test de Cattell par une loi normale d'espérance 100 et d'écart type 24.

Soit X la variable aléatoire égale au résultat d'un test sur un individu choisi au hasard.

a. Calculer la probabilité d'obtenir un QI inférieur à 70.

b. Calculer la probabilité d'obtenir un QI compris entre 90 et 110.

c. Montrer que trouver le nombre a tel que :

$$P(X\in[\,100-a\,;100+a\,])\approx 0{,}80$$

revient à trouver le nombre a tel que :

$$P(X\leqslant 100-a)\approx 0{,}10.$$

d. En déduire, à l'aide du tableau ci-contre, la valeur du nombre a pour que la probabilité d'obtenir un QI compris entre $100-a$ et $100+a$ soit d'environ 0,80.

a	$P(X\leqslant a)$
66	0,0783
67	0,0846
68	0,091211
69	0,098236
70	0,10565
71	0,11346

68 Fabrication de pièces métalliques

Une usine fabrique en grande quantité deux types de pièces métalliques pour l'industrie, dont des pièces triangulaires. On admet que 40 % des pièces de la production sont triangulaires.

On prélève au hasard 60 pièces dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces triangulaires.

1 a. Déterminer la nature de la loi suivie par la variable aléatoire X et donner ses paramètres.

b. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité :

$$P(20\leqslant X\leqslant 28).$$

2 On suppose maintenant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(24\,;14{,}4)$.

Calculer la probabilité que le nombre de pièces triangulaires d'un prélèvement soit compris entre 20 et 28.

3 a. Montrer que :

$$P(24-a\leqslant X\leqslant 24+a)=1-2\,P(X\leqslant 24-a).$$

b. En déduire que trouver le nombre a tel que :

$$P(X\in[\,24-a\,;24+a\,])\approx 0{,}90$$

revient à trouver le nombre a tel que : $P(X\leqslant 24-a)\approx 0{,}05$.

c. Déterminer, à l'aide du tableau, le nombre de pièces triangulaires minimal a pour qu'au moins 90 % des prélèvements contiennent entre $24-a$ et $24+a$ pièces triangulaires.

x	$P(X\leqslant x)$
16	0,01750748
17	0,03254336
18	0,05692315
19	0,09381616

69 Entreprises sans salarié

On a observé que 87,4 % des entreprises créées en France en 2010 n'emploient aucun salarié.

On étudie au hasard 70 entreprises parmi l'ensemble des entreprises françaises. Le nombre d'entreprises créées est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'entreprises qui n'emploient aucun salarié.

1 **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b. À l'aide de la calculatrice, calculer la probabilité $P(X \geqslant 50)$, arrondie au centième près.

2 On admet désormais que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 61 et d'écart type 3.

a. Calculer la probabilité $P(55 \leqslant X \leqslant 67)$. Interpréter.

b. Calculer la probabilité que plus de 50 entreprises n'emploient aucun salarié.

70 Étude d'une fonction de densité

PARTIE A Étude de fonctions

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(t)=t^2-t^3$.

1 **a.** Étudier les variations de la fonction f, puis dresser le tableau des variations sur $[0\,;1]$.

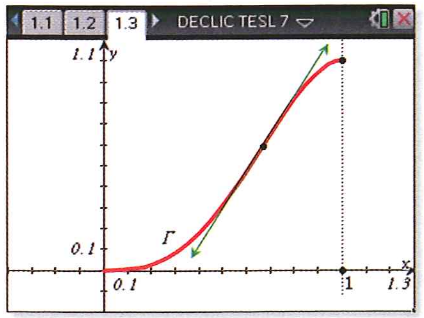
b. Calculer la dérivée seconde, notée f'', puis étudier son signe. En déduire que la courbe (C), représentative de la fonction f, admet un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées.

c. Tracer la courbe (C) dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour 0,1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,02 sur l'axe des ordonnées. Placer le point A.

2 **a.** Justifier que la fonction g, définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=12\,f(x)$, est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b. On pose $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$. Calculer $G'(x)$, puis étudier les variations de la fonction G sur l'intervalle $[0\,;1]$.

c. Montrer que la courbe (Γ) représentant G admet un point d'inflexion dont on déterminera les cordonnées. On peut vérifier sur une calculatrice graphique.



PARTIE B Variable aléatoire

1 Soit X une variable aléatoire de densité g.

a. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 0{,}5)$.

b. Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer le réel a tel que :

$$P(X \leqslant a)=0{,}5\,.$$

c. Calculer la probabilité $P(0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}8)$.

2 Le 1^{er} mai, un jardinier sème au hasard un grand nombre de graines de fleurs à croissance rapide dans un massif.

À partir du 1^{er} juin, il observe l'éclosion des fleurs de son massif et ce, durant une centaine de jours.

Soit X la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le 1^{er} juin et le jour où une fleur éclot.

On admet que la fonction g est la fonction de densité de X.

Le temps écoulé est exprimé en centaine de jours.

Utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre aux questions suivantes :

a. Donner la probabilité pour qu'une fleur éclose avant le 19 août.

b. À quel moment la moitié des fleurs semées auront-t-elles éclos ?

3 **a.** Calculer l'espérance de X, définie par :

$$E(X)=\int_0^1 t\,g(t)\,dt.$$

En déduire le temps moyen nécessaire pour qu'une fleur éclose.

b. Un logiciel de calcul formel effectue le calcul suivant :

$$\int_0^1 \left(t^2\cdot 12\cdot\left(t^2-t^3\right)\right)dt-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \qquad \frac{1}{25}$$

Que représente ce calcul ?

En déduire l'écart type de la variable aléatoire X.

c. Déterminer les valeurs arrondies au centième près des probabilités des événements :

$B=\{X\in[E(X)-\sigma\,;E(X)+\sigma]\}$;

$C=\{X\in[E(X)-2\sigma\,;E(X)+\sigma]\}$.

71 Taux de calcium d'une eau minérale

Composition en mg/l

Calcium : 112 ; Magnésium : 28 ; Sodium : 6,6 ; Potassium : 1,8 ; Hydrogénocarbonates : 430 ; Sulfates : 61 ; Chlorures : 8 ; Nitrates : <1 ; Extrait sec à 180°C : 467 ; pH : 7,3.

Lorsque le taux de calcium dans une bouteille d'eau minérale dépasse 65 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est calcaire.

Dans un stock important de bouteilles, 7,5 % des bouteilles contiennent de l'eau calcaire.

1 On prélève au hasard 40 bouteilles dans le stock pour vérifier le taux de calcium. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de ce prélèvement, qui contiennent de l'eau calcaire.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X.

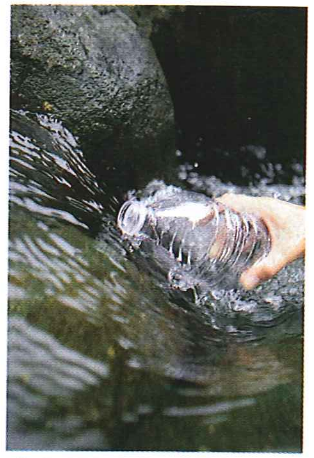
b. Calculer la probabilité de prélever au moins une bouteille contenant de l'eau calcaire.

2 On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 50,6 et d'écart type 10.

a. Calculer la probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard soit calcaire.

b. Comparer le résultat obtenu à 0,075. Justifier.

3 L'eau minérale provient de deux sources, 1 et 2.



Parmi les bouteilles de la **source 1**, la probabilité que l'eau soit calcaire est $p_1=0{,}065$ et $p_2=0{,}10$ pour les bouteilles de la **source 2**.

La source 1 fournit 70 % de la production totale des bouteilles d'eau et la source 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau parmi la production totale de la journée. Toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirées.

On définit les événements :

A : « la bouteille d'eau provient de la source 1 » ;

B : « la bouteille d'eau provient de la source 2 » ;

C : « l'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

a. Calculer les probabilités $P(C\cap A)$ et $P(C\cap B)$.

b. En déduire P(C).

72 Lecture ou film

Dans un lycée, on a demandé à chacun des 719 élèves de Première et Terminale le nombre de livres lus et le nombre de films vus au cinéma dans l'année.

Les résultats sont fournis par les tableaux suivants :

Nombre de films	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves	5	10	10	20	35	40	60

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
80	85	80	70	60	50	40	30	20	10	8	6

Série \ Livres	de 0 à 4	de 5 à 9	de 10 à 14
S	120	59	80
ES	50	100	50
L	50	110	100

PARTIE A

1 Dans l'ensemble des élèves interrogés, quel est le pourcentage de « petits lecteurs » (ceux lisant entre 0 et 4 livres) dans la série ES ? *Arrondir à 1 % près.*

2 Parmi les « plus gros lecteurs » (ceux qui ont lu 10 livres ou plus), quel est le pourcentage d'élèves de série L ? *Arrondir à 1 % près.*

3 Parmi les élèves de la série S, quel est le pourcentage d'élèves qui ont lu au plus 4 livres ?

PARTIE B

1 Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de la série du nombre de films vus au cinéma pendant l'année.

2 **a.** Déterminer l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$, puis l'intervalle $[\overline{x}-2\,\sigma\,;\overline{x}+2\,\sigma]$.

b. Calculer la part en pourcentage des élèves dont le nombre de films vus au cinéma pendant l'année appartient à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$, puis à l'intervalle $[\overline{x}-2\,\sigma\,;\overline{x}+2\,\sigma]$.

PARTIE C

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de films vus au cinéma dans l'année, par un élève pris au hasard.

Les résultats précédents justifient le fait que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 9 et d'écart type inconnu σ.

1 On sait que la probabilité qu'un élève ait vu au plus 8 films au cinéma dans l'année est environ 0,362.

a. Traduire cet énoncé en termes de probabilités.

b. Soit la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-9}{\sigma}$.

Quelle est la loi suivie par Z ?

c. Montrer que $P(X \leqslant 8)=P\left(Z \leqslant \dfrac{-1}{\sigma}\right)$.

d. La calculatrice donne le résultat suivant :

$$P(Z \leqslant -0{,}353)\approx 0{,}362\,.$$

En déduire la valeur arrondie à l'unité près de l'écart type σ.

2 Calculer la probabilité qu'un élève ait vu au moins un film par mois.

73 ... en économie

Détermination d'un prix de vente

Avant le lancement d'un nouveau produit, une entreprise organise un sondage auprès de 100 acheteurs potentiels pour connaître le prix qu'ils seraient prêts à payer pour cet article.
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix (en €)	90	95	100	110	115	120	125	130	135
Nombre de clients	5	5	10	18	22	18	11	6	5

a. Calculer le prix moyen $\overline{x}$ et l'écart type σ.
Arrondir les résultats au centième près.
b. Déterminer la part des prix appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma ; \overline{x}+\sigma]$, puis à l'intervalle $[\overline{x}-2\sigma ; \overline{x}+2\sigma]$.
c. Expliquer pourquoi les résultats précédents permettent de modéliser le prix que les clients potentiels seraient prêts à payer, par la loi normale d'espérance 114,25 et d'écart type 11,25.
d. L'entreprise fixe le prix de vente à un niveau tel que seulement 25 % des clients potentiels ont proposé un prix supérieur.
Déterminer le prix de vente fixé.

74 ... en agriculture

Calibrage de fruits pour la vente

Les mangues de catégories « extra » doivent être exemptes de défaut (à l'exception de très légères altérations superficielles) et doivent répondre à des normes de calibrage concernant le poids.
- Le poids d'une mangue « extra » doit être compris entre 550 g et 800 g ;
- 5 % des fruits peuvent avoir un poids en dehors de cet intervalle ;
- La variable aléatoire X égale au poids d'une mangue suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et l'intervalle $[550 ; 800]$ est centré en μ.

a. Calculer la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X.
b. Calculer l'écart type σ de la variable aléatoire X.
c. Quelle est la probabilité que le poids d'une mangue « extra », choisie au hasard, dépasse 700 g ?

75 ... en hydrologie

Les crues de l'Amazone

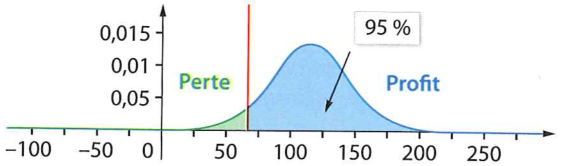
L'étude des crues de l'Amazone est assez délicate puisqu'elle traite des plus forts débits observés du monde. Une des lois de probabilité qui s'applique le mieux est la loi de Gauss.
Sur une période de 32 années entre 1968 et 2000, on a constaté qu'un débit égal à 239 milliers de mètres cube par seconde pouvait être égal ou dépassé une année sur deux et qu'un débit égal à 261 milliers de mètres cube par seconde pouvait être égal ou dépassé une année sur cinq.
a. Donner la valeur de l'espérance de la variable aléatoire égale au débit du fleuve.
b. Démontrer que $P(X \geqslant 261) = 1 - P\left(Z \leqslant \dfrac{22}{\sigma}\right)$, où $Z = \dfrac{X-239}{\sigma}$ et σ est l'écart type de la variable aléatoire X.
c. Rappeler la loi suivie par Z et en déduire la valeur de l'écart type σ.
d. Calculer $P(X \geqslant 272)$. Interpréter le résultat trouvé.

---

76 ... en finance

Investissement et risque de perte

Dans la gestion financière, pour évaluer les éventuelles pertes qu'un investisseur peut subir en plaçant son capital sur un marché donné, on calcule une valeur, appelée la **VAR**, Value At Risk. Cette valeur est la perte maximale que peut subir un gestionnaire de portefeuille durant une période donnée. La probabilité que le portefeuille dépasse cette VAR est fixée, très souvent, à 0,95 ou 0,99.



Un portefeuille, dont l'investissement initial est de 100 €, a un taux annuel moyen de rendement de 15 % d'écart type 30 €.
On admet que la valeur finale aléatoire X de ce portefeuille suit une loi normale.
a. Justifier que l'espérance de la variable aléatoire X est 115 et l'écart type 30.
b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie au centième près du plus grand nombre a tel que $P(X \geqslant a) \approx 0{,}95$.
c. En déduire le montant de la VAR.
Interpréter ce résultat en termes de perte éventuelle.

77 ... en gestion

Réservation dans un restaurant

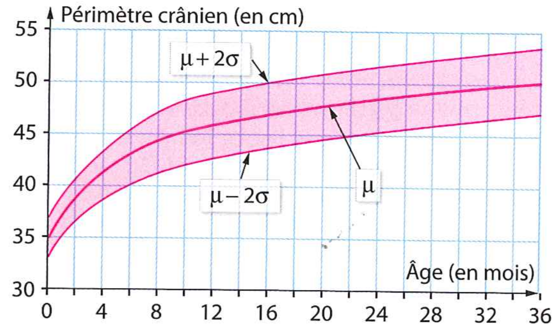
Le gérant d'un restaurant renommé n'accepte ses clients que sur réservation. Il dispose de 100 couverts.
La probabilité qu'une personne ayant réservé ne se présente pas est 0,1. X est la variable aléatoire égale au nombre de repas servis un jour donné.

1 Le gérant accepte 100 réservations. X suit alors la loi normale $\mathcal{N}(90 ; 9)$. Quelle est la probabilité que le gérant serve plus de 95 repas ?
2 Le gérant accepte 110 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il se retrouve dans une situation embarrassante ?

78 ... en biologie

Courbes de croissance des enfants

Les études statistiques portant sur un grand nombre d'enfants ont permis d'établir des courbes de croissance (taille, poids, périmètre crânien, etc.) que l'on trouve sur le « carnet de santé » remis aux parents à la naissance d'un enfant. Ces courbes sont construites à partir de la plage de normalité $[\mu-2\sigma ; \mu+2\sigma]$. Elles permettent aux parents et aux médecins de surveiller la croissance d'un enfant.
La variable aléatoire X égale au périmètre crânien d'un enfant de six mois suit la loi normale $\mathcal{N}(43 ; 2{,}25)$.



a. Déterminer l'intervalle $I = [\mu-2\sigma ; \mu+2\sigma]$ et la probabilité $P(X \in I)$.
b. Calculer la probabilité que le périmètre crânien d'un bébé soit compris entre 42 cm et 44 cm.
c. Déterminer le 1^{er} percentile et le 99^{e} percentile du périmètre crânien d'un tel enfant, c'est-à-dire les nombres P_1 et P_{99} tels que $P(X \leqslant P_1) = 0{,}01$ et $P(X \leqslant P_{99}) = 0{,}99$.
d. Le périmètre crânien d'un enfant de 8 mois est de 40 cm. Cette mesure est en dessous de la zone rose du carnet de santé.
Peut-on conclure que cette mesure est « anormale » ?