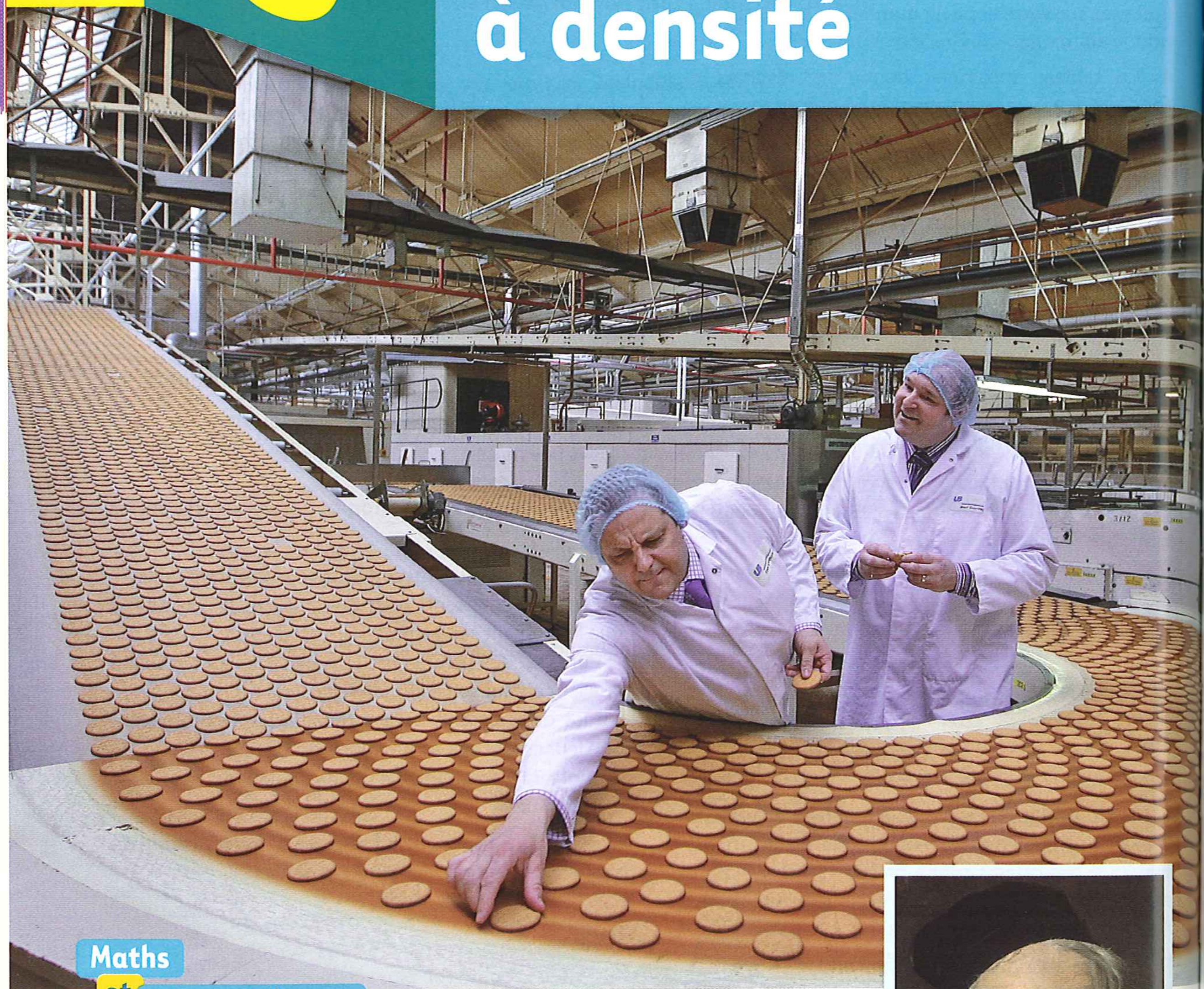
CHAPITRE

8 Lois de probabilité à densité



Maths et vie quotidienne

La conformité des éléments à la sortie d'une chaîne de production dépend de la variabilité du processus : plus le processus est fiable, et plus grande sera la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit conforme aux attentes.

La méthode d'amélioration de la qualité *Six Sigma* propose un cadre méthodologique pour réduire la variabilité des processus industriels. L'appellation *Six Sigma* repose sur l'hypothèse que les caractéristiques des éléments fabriqués suivent une loi normale, et traduit l'objectif (ambitieux !) d'une probabilité de non-conformité voisine de deux sur un milliard.

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

→ Chercheurs d'hier p. 236

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Variable aléatoire

• Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Lorsque $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $(X = a_i)$ l'événement « X prend la valeur a_i ».

• Lorsqu'à chaque valeur a_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $(X = a_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de X**. On peut la présenter à l'aide d'un tableau.

Valeur a_i	a_1	a_2	…	a_n
$p(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On note que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

• **L'espérance mathématique** de X est le nombre noté E(X) défini par :

$$E(X) = a_1 \times p(X = a_1) + a_2 \times p(X = a_2) + \dots + a_n \times p(X = a_n).$$

1 On lance un dé non pipé. On gagne 5 € si le 6 sort, on perd 2 € si le 1 sort et on perd 1 € dans les autres cas.

On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le gain positif ou négatif correspondant.

1. Donnez la loi de probabilité de X.

2. Déterminez l'espérance mathématique de X.

2 On lance une pièce de monnaie non équilibrée. La probabilité d'apparition du côté pile est égale à 0,4 et celle du côté face égale à 0,6. On gagne 1 € si pile sort et on perd 1 € si face sort.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque événement élémentaire le gain, positif ou négatif, correspondant.

1. Donnez la loi de probabilité de X.

2. Déterminez l'espérance mathématique de X.

Loi binomiale

• Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire pour laquelle on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non-réalisation $\overline{S}$ (appelé « échec »).

• Plusieurs épreuves de Bernoulli successives, indépendantes les unes des autres, constituent un **schéma de Bernoulli**.

• On considère un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S.

La **loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$** est la loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.

• Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k \leqslant n);$$

$$E(X) = np.$$

3 La variable aléatoire X suit la loi binimiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{1}{4}\right)$.

1. Calculez, à l'aide de la calculatrice, les 4 nombres $\binom{3}{k}$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3.

2. Déduisez-en la loi de probabilité de X.

3. Calculez l'espérance mathématique de X.

→ Voir les corrigés p. 361

Activité 1 DE LA LOI BINOMIALE À LA LOI NORMALE

Nous nous proposons de construire les diagrammes en bâtons de variables aléatoires X qui suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}4)$ pour $n = 4, 5, 6, 7$ puis à l'aide du logiciel GeoGebra pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'allure d'une courbe reliant les sommets de ces bâtons.

1 Calculs directs

1. Construisez « à la main » le diagramme en bâtons de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}4)$ dans chacun des cas suivants :

a) $n = 4$; **b)** $n = 5$; **c)** $n = 6$; **d)** $n = 7$.

2. Dans chacun des cas précédents, reliez les sommets des bâtons par une courbe continue et régulière. Comment semble évoluer cette courbe lorsque n augmente ?

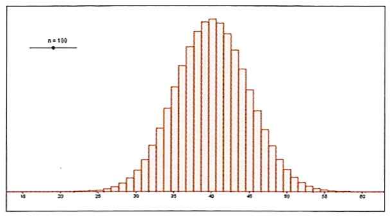
2 À l'aide du logiciel GeoGebra

1. À l'aide du logiciel GeoGebra, faites tracer les diagrammes en bâtons de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}4)$:

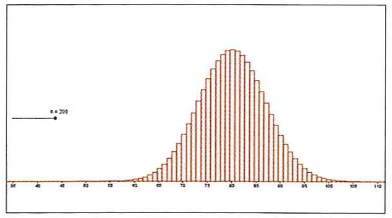
• Créez 2 curseurs : n qui varie de 0 à 200 et p qui varie de 0 à 1.

• Entrez dans la fenêtre de saisie la formule :
Barres[0,n,Séquence[Combinaison[n,k]*p^k*(1–p)^(n–k),k,0,n]].

2. Faites varier n de 5 à 200 et vérifiez que vous obtenez pour $n = 100$ et $n = 200$ avec $a = 0{,}4$ les figures ci-dessous.



Loi $\mathcal{B}(100\,;0{,}4)$



Loi $\mathcal{B}(200\,;0{,}4)$

Vous pouvez constater que dans chaque cas les sommets des bâtons semblent situés sur une courbe « en cloche ».

3. On suppose à présent que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ et on considère la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

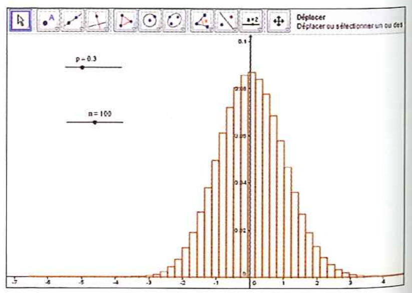
Faites tracer le diagramme en bâtons de Y pour $p = 0{,}2$, $p = 0{,}4$, $p = 0{,}6$ et pour $n = 100$ puis 200 en utilisant les curseurs.

Indication

Entrez dans la fenêtre de saisie les formules : $m = n*p$ et $s = \text{sqrt}(n*p*(n-p))$, puis Barres[–m/s,(n–m)/s,Séquence[Combinaison[n,k]*p^k*(1–p)^(n–k),k,0,n]].

Vérifiez que vous obtenez des courbes du même type que dans la question 2 mais cette fois le sommet des courbes a pour abscisse 0.

Ci-contre la figure obtenue pour $p = 0{,}3$ et $n = 100$.



On dira que quand n devient grand la courbe obtenue est la courbe représentative de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Activité 2 LOI À DENSITÉ

• Dans le cas d'un lancer de dé au hasard, par exemple, il y a un nombre fini d'événements élémentaires {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} ; l'ensemble Ω des événements élémentaires est l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

Considérons alors la variable aléatoire X qui prend la valeur 5 si le nombre sorti est 3 ou 6, et –5 dans le cas contraire.

On a alors $p(\{X = 5\}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(\{X = -5\}) = \dfrac{2}{3}$.

• Supposons à présent qu'on lance une flèche, au hasard, sur une cible circulaire D de rayon 1 mètre et de centre O. On peut considérer que l'ensemble Ω des événements élémentaires est égal à D.

1 La flèche étant lancée au hasard, il est normal de définir la probabilité d'une partie A de Ω ainsi :

$$p(A) = \frac{\text{Aire de A}}{\text{Aire de }\Omega}.$$

Calculez la probabilité de chacune des parties suivantes :

a) A est le disque D.

b) A est le disque de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

c) A est un cercle de centre O inclus dans D.

d) A est une couronne délimitée par les cercles de centre O et de rayons a et b avec $0 < a < b < 1$.

2 Considérons alors la variable aléatoire X qui associe au point d'impact de la flèche la distance, en mètres, au centre de la cible. Cette variable aléatoire prend toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; 1].
Déduisez des résultats de la question **1.** les résultats suivants :

a) $p(\{X < 1\}) = 1$.

b) $p\left(\left\{X < \dfrac{1}{2}\right\}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c) Pour tout réel $k \in [0\,;1]$, $p(\{X = k\}) = 0$.

d) Si $0 < a < b < 1$, $p(\{X \in [a\,;b]\}) = b^2 - a^2$.

3 On pose, pour $x \in [0\,;1]$, $f(x) = 2x$.

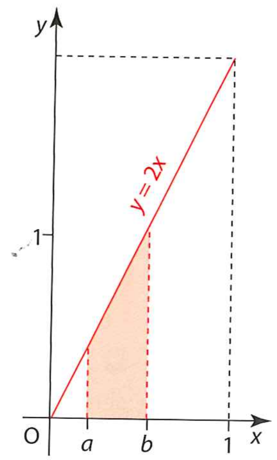
Vérifiez que :

a) $p(\{X < 1\}) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) $p\left(\left\{X < \dfrac{1}{2}\right\}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

c) Pour tout réel $k \in [0\,;1]$, $p(\{X = k\}) = \displaystyle\int_k^k f(x)\,dx$.

d) Plus généralement, si $0 < a < b < 1$, $p(\{a < X < b\}) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.



On dira que la variable aléatoire X suit la loi de densité f sur l'intervalle [0 ; 1].

1 Loi à densité sur un intervalle I

1.1 Définition

La notion qui suit a été introduite en activité page 217.

Définition 1 X est une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I. On dit que **X suit la loi à densité f** si :

- f est une fonction continue et positive sur I.
- Pour tous réels a et b de I, $p(\{a < X < b\}) = \int_a^b f(x)\,dx$.

La fonction f est appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire X.

Remarque. Dans le cas où I n'est pas borné, on admet que $\int_I f(x)\,dx$ est un nombre fini que l'on peut visualiser par l'aire sous la courbe d'un « domaine infini » et que les propriétés usuelles de l'intégrale sont encore vraies dans ce cas : linéarité, relation de Chasles…

1.2 Propriétés

Théorème 1 X est une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur I. Alors :

1. $\int_I f(x)\,dx = 1$.

2. Pour tout réel a de I, $p(\{X = a\}) = 0$.

3. Si A et B sont deux intervalles disjoints de I, alors $p(\{X \in A \cup B\}) = p(\{X \in A\}) + p(\{X \in B\})$.

4. Pour tout réel a de I, $p(\{X < a\}) = p(\{X \leqslant a\})$.

Démonstration

1. $\int_I f(x)\,dx = p(\{X \in I\})$. Or X prend toutes ses valeurs dans I, donc l'événement $\{X \in I\}$ est l'événement certain et $p(\{X \in I\}) = 1$.

2. $p(\{X = a\}) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. Les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont disjoints puisque les intervalles A et B sont disjoints. Donc $p(\{X \in A \cup B\}) = p(\{X \in A\}) + p(\{X \in B\})$.

4. L'événement $\{X \leqslant A\}$ est la réunion des deux événements $\{X < a\}$ et $\{X = a\}$. Or ces deux événements sont disjoints. Donc, d'après la propriété 3, $p(\{X \leqslant a\}) = p(\{X < a\}) + p(\{X = a\})$ et $p(\{X = a\}) = 0$. D'où le résultat.

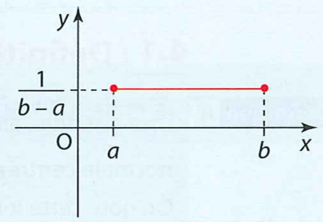
Remarque importante. Pour qu'une fonction f continue positive sur un intervalle I soit une densité de probabilité, il est nécessaire que $\int_I f(x)\,dx = 1$.

1.3 Exemple

Reprenons l'exercice présenté en activité p. 217 : on lance au hasard une flèche sur un disque D de rayon 1 mètre. Notons X la variable aléatoire qui associe à chaque point du disque sa distance au centre du disque. Posons, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) = 2x$. On a vu que X suit la loi de densité f sur $[0\,;1]$.

2 Loi uniforme sur $[a\,;b]$

Définition 2 Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur $[a\,;b]$** si elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.



- On peut remarquer que $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à 1. En effet, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire « sous la courbe », c'est donc l'aire du rectangle de côtés $b - a$ et $\dfrac{1}{b-a}$.

3 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

3.1 Définition

Définition 3 X est une variable aléatoire de densité f sur $[a\,;b]$. Alors l'espérance mathématique de X est le nombre noté E(X) défini par $E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx$.

Remarque. Du cas discret au cas continu

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, c'est-à-dire prenant un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on sait que l'espérance mathématique de X, notée E(X), est définie ainsi :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p(\{X = x_i\}).$$

On peut remarquer l'analogie entre les deux définitions. Quand on passe du cas discret au cas continu, le symbole $\sum_{i=1}^{i=n}$ devient $\int_a^b$, et « $p(\{X = x_i\})$ » devient « $f(x)\,dx$ ».

3.2 Espérance d'une loi uniforme

Théorème 2 X est une variable aléatoire qui suit la **loi uniforme sur $[a\,;b]$**. Alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration. La densité de probabilité de X est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$.

Donc $E(X) = \int_a^b x \times \dfrac{1}{b-a}\,dx = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^b = \dfrac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) = \dfrac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a)$.

$= \dfrac{b+a}{2}$.

Exemple

X suit une loi uniforme sur $[0\,;1]$. Dans ce cas, $a = 0$ et $b = 1$ d'où $E(X) = \dfrac{1}{2}$.

4 Loi normale centrée réduite

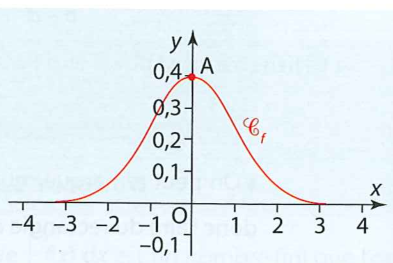
Cette notion a été introduite en activité page 216.

4.1 Définition

Définition 4 Une variable aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}$ suit la **loi normale centrée** réduite si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note cette loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}\,;\mathbf{1})$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.



Propriétés de la courbe $\mathscr{C}_f$

Cette courbe peut être obtenue aisément à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

On peut remarquer que :

- L'ordonnée du point A est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ car $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, deux points quelconques de cette courbe, d'abscisses opposées a et $-a$, ont même ordonnée car $e^{-\frac{a^2}{2}} = e^{-\frac{(-a)^2}{2}}$.

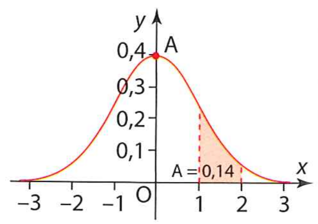
Remarque. L'aire du domaine « illimité » compris entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 puisque f est une densité de probabilité. On note cette aire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

4.2 Exemples

Les calculatrices donnent directement $p(a \leqslant X \leqslant b)$ (voir page 225).

Ainsi par exemple pour $a = 1$ et $b = 2$, on a $p(\{1 \leqslant X \leqslant 2\}) \approx 0{,}14$.

Ce nombre est égal à l'aire du domaine colorié ci-contre.



4.3 Probabilité de l'événement $\{X \in [-1{,}96\,; 1{,}96]\}$

On peut lire sur la calculatrice que $\boldsymbol{p(\{-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96\}) \approx 0{,}95}$.

Donc $p(\{X \notin [-1{,}96\,; 196]\}) = 1 - p(\{-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96\}) \approx 0{,}05$.

Ceci signifie que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1{,}96} f(x)\,dx + \int_{1{,}96}^{+\infty} f(x)\,dx \approx 0{,}05$; donc, en dehors de l'intervalle $[-1{,}96\,; 1{,}96]$, l'aire sous la courbe est très petite.

On conçoit intuitivement que pour qu'il en soit ainsi, la courbe se rapproche « très vite » de l'axe des abscisses lorsque x devient de plus en plus grand.

5 Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

5.1 Définition

Définition 5 Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

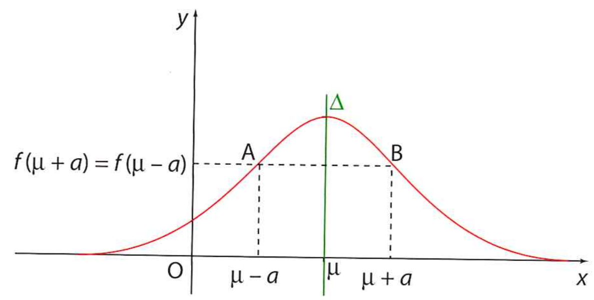
Remarques

1. On peut démontrer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors la densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Cette expression algébrique n'est pas un attendu du programme.

2. La courbe d'équation $y = f(x)$ est **symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.**

En effet, considérons, pour $a > 0$, les réels $\mu + a$ et $\mu - a$ symétriques par rapport à μ.



$f(\mu + a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2}$, $f(\mu - a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-a}{\sigma}\right)^2}$.

Donc $f(\mu + a) = f(\mu - a)$.

Les points A et B sont donc symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $x = \mu$.

5.2 Espérance et écart-type

Définition 6 X désigne une variable aléatoire de densité f sur I. Notons $m = E(X)$.

Alors la **variance** de X, notée V(X) est le nombre défini par $\mathbf{V(X) = E((X - m)^2)}$.

L'**écart-type** de X est égal à $\sqrt{\mathbf{V(X)}}$.

Théorème 3 Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors :

$$E(X) = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2.$$

Nous admettons ce théorème.

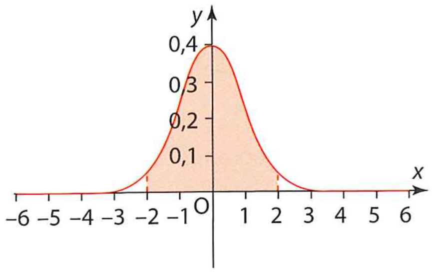
Remarque. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$, alors $E(x) = 0$ et $V(x) = 1$.

5.3 | Interprétation de la variance

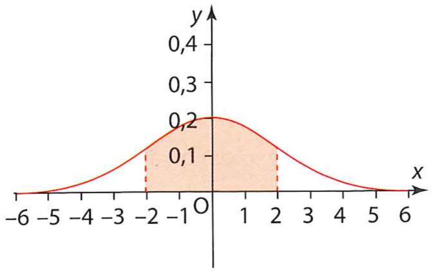
On peut vérifier à l'aide d'un logiciel que V(X) traduit la dispersion des valeurs de X par rapport à l'espérance μ.

Exemple

Voici ci-dessous deux courbes représentant la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$ dans le cas où $\sigma = 1$ et où $\sigma = 2$:



$\sigma = 1$



$\sigma = 2$

Plus précisément, lorsque σ est petit « l'aire sous la courbe » est plus concentrée autour de l'espérance, égale à μ.

La probabilité que $X \in [-2\,;2]$, dans le cas $\sigma = 1$, est plus grande que dans le cas $\sigma = 2$.

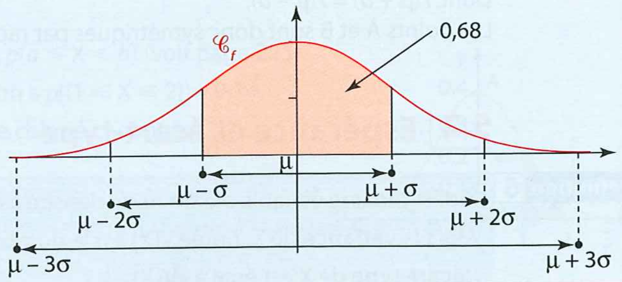
5.4 | Probabilité des événements $\{X \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]\}$

Théorème 4 X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. Alors :

$p(\{X \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]\}) \approx$ **0,68**

$p(\{X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\}) \approx$ **0,95**

$p(\{X \in [\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]\}) \approx$ **0,977.**



Nous admettons ce théorème. Le logiciel GeoGebra permet de justifier ces valeurs : voir travaux dirigés page 251.

Remarque. Les trois probabilités précédentes 0,68, 0,95 et 0,997 **ne dépendent ni de μ, ni de σ.**

OBJECTIF 1 Connaître la fonction de densité de la loi uniforme

La fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Si α et β vérifient $a < \alpha < \beta < b$, alors $p(\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\}) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$.

Si X suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

EXERCICE RÉSOLU A

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\,;5]$.

1. Représentez graphiquement la fonction de densité de cette loi.

2. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $\{X \in [0\,;2]\}$;

b) $\{X \in [0\,;1] \cup [3\,;5]\}$.

Méthode

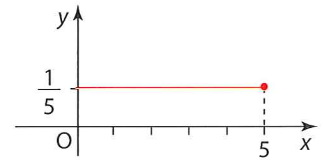
1. La représentation graphique de f est un segment parallèle à l'axe des abscisses.

On peut vérifier que $\int_0^5 f(t)\,dt = 1$.

2. La probabilité de l'événement $\{X \in [0\,;2]\}$ est l'aire du domaine délimité par la courbe, la droite des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Solution

1. La fonction de densité est la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}$.



2. a) $p(\{X \in [0\,;2]\}) = \dfrac{2}{5}$.

b) Les événements $\{X \in [0\,;1]\}$ et $\{X \in [3\,;5]\}$ sont disjoints, donc $p(\{X \in [0\,;1] \cup X \in [0\,;2]\})$
$= p(\{X \in [0\,;1]\}) + p(\{X \in [3\,;5]\})$
$= \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Mise en pratique

1 Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[1\,;7]$.

1. Représentez graphiquement la fonction de densité de cette loi.

2. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $\{X \in [1\,;2]\}$;

b) $\{X \in [0\,;1] \cup [2\,;3] \cup [6\,;7]\}$;

c) $\{X \geqslant 5 \text{ ou } X \leqslant 4\}$.

3. Quelle est l'espérance de X ?

2 Une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[-2\,;8]$.

1. Représentez graphiquement la fonction de densité de cette loi.

2. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $\{X \in [-2\,;0]\}$;

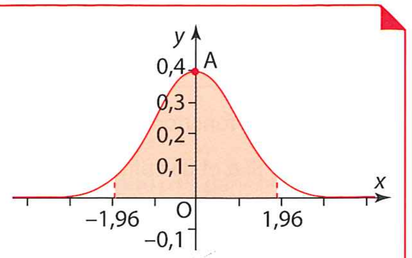
b) $\{X \in [-1\,;0] \cup [1\,;2] \cup [3\,;8]\}$;

c) $\{1 \leqslant X \leqslant 2 \text{ ou } X \geqslant 1\}$.

3. Quelle est l'espérance de X ?

OBJECTIF 2 Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

- **La fonction de densité de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
- Sa courbe représentative est donnée ci-contre.
- Si X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$:
$$p\big(X \in [-1{,}96\,;1{,}96]\big) \approx \mathbf{0{,}95}.$$



EXERCICE RÉSOLU B

X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. a) Représentez graphiquement les probabilités des événements $\{1 \leqslant X \leqslant 3\}$ et $\{-3 \leqslant X \leqslant -1\}$.

b) Donnez une valeur approchée de ces probabilités.

2. Donnez une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [0\,;1{,}96]\}$.

Méthode

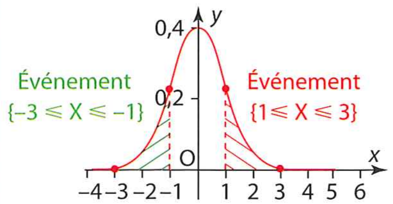
1. On trace la représentation graphique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.
La probabilité de l'événement $\{a \leqslant X \leqslant b\}$ est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

b) La calculatrice permet de calculer $p(\{a \leqslant X \leqslant b\})$. On utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

2. $p\big([X \in [-1{,}96\,;1{,}96]]\big) \approx 0{,}95$.

Solution

1. a) La probabilité de l'événement $\{1 \leqslant X \leqslant 3\}$ est égale à l'aire du domaine hachuré.



b) $p(\{1 \leqslant X \leqslant 3\}) \approx 0{,}1573$. D'où, par symétrie :
$p(\{-3 \leqslant X \leqslant -1\}) \approx 0{,}1573$.

2. $p\big([X \in [0\,;1{,}96]]\big) = \dfrac{1}{2}\,p\big([X \in [-1{,}96\,;1{,}96]]\big)$
Or $p\big([X \in [-1{,}96\,;1{,}96]]\big) \approx 0{,}95$.
Donc $p\big([X \in [0\,;1{,}96]]\big) \approx 0{,}475$.

Mise en pratique

3 X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. a) Représentez graphiquement les probabilités des événements suivants :
$A = \{X \geqslant 0\}$; $B = \{0 \leqslant X \leqslant 1\}$; $C = \{-1 \leqslant X \leqslant 0\}$; $D = \{1 \leqslant X < 2\}$; $E = \{-2 \leqslant X \leqslant -1\}$.

b) Donnez une valeur approchée de ces probabilités.

2. Donnez une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [-1{,}96\,;0]\}$.

4 X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. a) Représentez graphiquement les probabilités des événements suivants :
$A = \{-1 \leqslant X \leqslant 1\}$; $B = \{-2 \leqslant X \leqslant 2\}$; $C = \{x \geqslant 1\}$; $D = \{X \leqslant 1\}$.

b) Donnez une valeur approchée de ces probabilités.

2. Donnez une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 1{,}96\}$.

OBJECTIF 3 Obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Pour μ et σ connus, les calculatrices disposent de commandes spécifiques pour calculer :
– la probabilité de l'événement $\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\}$, α et β étant donnés ;
– le réel x tel que $p(\{X \leqslant x\}) = a$, a étant donné.

	TI	Casio
$p(\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\})$	2nd Var 2:normalFRép(α,β,μ,σ)	MENU STAT F5 (DIST) F1 (NORM) F2 (NCD); Lower:α,Upper:β, puis σ et μ.
x tel que $p(X \leqslant x) = a$	2nd Var 3:FracNormale(a,μ,σ)	MENU STAT F5 (DIST) F1 (NORM) F3 (InvN); Area:a, puis σ et μ.

EXERCICE RÉSOLU C

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec $\mu = 100$ et $\sigma = 10$.

1. Calculez à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur les probabilités des événements suivants :
a) $\{90 \leqslant X \leqslant 120\}$; **b)** $\{X \geqslant 120\}$.

2. Calculez la probabilité de l'événement $\{90 \leqslant X\}$.

3. Soit a un réel, on sait que la probabilité de l'événement $\{X \leqslant a\}$ est égale à 0,25. Déterminez a.

Méthode

1. a) Pour une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$~ la calculatrice indique directement $p(\{a \leqslant X \leqslant b\})$.
b) Pour calculer la probabilité d'un événement du type $\{X \geqslant c\}$, on se ramène à un calcul de probabilité de la forme $p(\{a < X < b\})$ donné par la calculatrice.

2. On utilise les résultats de la question précédente.

3. La calculatrice donne la valeur de a tel que $p(\{X \leqslant a\})$ ait une valeur connue.

Solution

1. a) $p(\{90 \leqslant X \leqslant 120\}) \approx 0{,}8186$.

b) $p(\{X \geqslant 100\}) = \dfrac{1}{2}$.
Or $\{X \geqslant 100\}$ est la réunion de deux événements disjoints $\{100 \leqslant X \leqslant 120\}$ et $\{X \geqslant 120\}$ donc
$p(\{X \geqslant 120\}) = \dfrac{1}{2} - p(\{100 \leqslant X \leqslant 120\})$.
Or $p(\{100 \leqslant X \leqslant 120\}) \approx 0{,}4772$ donc $p(\{X \geqslant 120\}) \approx 0{,}0228$.

2. $\{X \geqslant 90\}$ est la réunion de deux événements disjoints $\{90 \leqslant X \leqslant 120\}$ et $\{X \geqslant 120\}$, d'où $p(\{X \geqslant 90\}) \approx 0{,}8413$.

3. On obtient $a \approx 93{,}26$.

Mise en pratique

5 La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec $\mu = 2$ et $\sigma = 0{,}3$.

1. Calculez à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur les probabilités des événements suivants :
a) $\{1{,}5 < X < 3\}$. **b)** $\{X \geqslant 3\}$.

2. Calculez de deux façons différentes la probabilité de l'événement $\{X < 1{,}5\}$.

3. Soit a un réel, on sait que la probabilité de l'événement $\{X \leqslant a\}$ est égale à 0,6. Déterminez a.

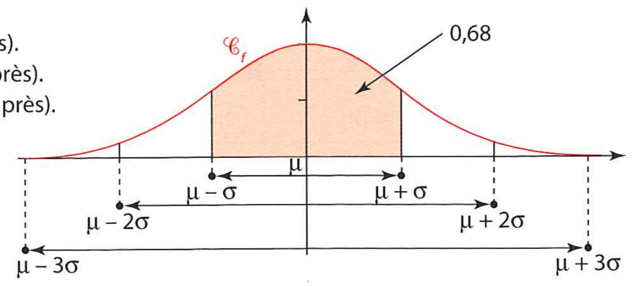
6 Le poids en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire X qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$.

1. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pèse moins de 3 kg ?

2. a) Déterminez le poids x tel que $p(X < x) = 0{,}99$.
b) Déterminez le poids y tel que $p(X > y) = 0{,}99$.

OBJECTIF 4 Connaître la probabilité des événements $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.
Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreux contextes ; ils peuvent être visualisés sur la figure ci-dessous :
$p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ (à 10^{-2} près).
$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ (à 10^{-2} près).
$p(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$ (à 10^{-3} près).



EXERCICE RÉSOLU D

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1\,000$ et d'écart-type $\sigma = 150$.

1. Donnez sans calculatrice la probabilité des événements suivants :

a) $\{X \in [850\,;1\,150]\}$ **b)** $\{X \in [700\,;1\,300]\}$ **c)** $\{X \in [550\,;1\,450]\}$.

2. Quelle est la probabilité de l'événement $\{X \leqslant 850\}$?

Méthode

1. On applique les résultats du cours rappelés en haut de la page.

2. On se ramène à un calcul de probabilité de la forme $p(\{a < X < b\})$. On peut aussi utiliser la propriété $p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,000\}) = \dfrac{1}{2} \times p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,150\})$.

Solution

1. a) $p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,150\})$
$= p(\{\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma\})$
donc $p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,150\}) \approx 0{,}68$.

b) $p(\{700 \leqslant X \leqslant 1\,300\})$
$= p(\{\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\}) \approx 0{,}95$.

c) $p(\{550 \leqslant X \leqslant 1\,450\})$
$= p(\{\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma\}) \approx 0{,}997$.

2. $p(\{X \leqslant 850\})$
$= p(\{X \leqslant 1\,000\}) - p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,000\})$.
Or 1 000 est la moyenne donc
$p(\{X \leqslant 1\,000\}) = \dfrac{1}{2}$ et $p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,000\})$
$= \dfrac{1}{2}\, p(\{850 \leqslant X \leqslant 1\,150\})$ d'où
$p(\{X \leqslant 850\}) \approx 0{,}5 - 0{,}34 \approx 0{,}16$.

Mise en pratique

7 La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}2$.

1. Donnez sans calculatrice la probabilité des événements suivants :

a) $\{X \in [2{,}8\,;3{,}2]\}$; **b)** $\{X \in [2{,}6\,;3{,}4]\}$; **c)** $\{X \in [2{,}4\,;3{,}6]\}$.

2. Déduisez-en la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $\{X \leqslant 2{,}6\}$; **b)** $\{X \geqslant 3{,}6\}$; **c)** $\{2{,}6 \leqslant X \leqslant 3{,}6\}$.

8 La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 5$ et d'écart-type 0,35.

1. Donnez sans calculatrice la probabilité des événements suivants :

a) $\{X \in [4{,}65\,;5{,}35]\}$; **b)** $\{X \in [3{,}95\,;6{,}05]\}$.

2. Déduisez-en la probabilité des événements suivants :

a) $\{X \geqslant 5{,}35\}$; **b)** $\{X \geqslant 4{,}65\}$;
c) $\{X \leqslant 3{,}95\}$; **d)** $\{3{,}95 \leqslant X \leqslant 4{,}65\}$.

Pour se tester

Exercices interactifs

9 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

1. La loi uniforme sur $[a\,;b]$ a pour fonction de densité la fonction f définie sur $[a\,;b]$ par :
$f(x) = \ldots\ldots$.

2. La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$ a pour fonction de densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ldots\ldots$.

3. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$ est le réel E(X) égal à …… .

4. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ alors l'événement $\{X \in [-1{,}96\,;1{,}96]\}$ a une probabilité de valeur approchée …… .

5. Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si …… suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

10 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. Si X suit la loi uniforme sur $[0\,;2]$ alors la probabilité de l'événement $\left\{X \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]\right\}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

2. Si X suit la loi uniforme sur $[0\,;2]$ alors les événements $\{X \geqslant 1\}$ et $\{X \leqslant 1\}$ ont la même probabilité.

3. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$, alors la probabilité $p(\{X < 1\})$ de l'événement $\{X < 1\}$ est égale à $0{,}5 + p(\{0 < X < 1\})$.

4. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(2\,;1)$ alors :
$p(\{X \in [0\,;4]\}) = 2p(\{X \in [1\,;3]\})$.

11 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. X suit la loi uniforme sur $[1\,;3]$; alors son espérance est égale à :
a) 1
b) $\dfrac{1}{2}$
c) 2.

2. X suit la loi normale d'espérance mathématique $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}25$; alors la probabilité de l'événement $\{X \in [0{,}5\,;1{,}5]\}$ a pour valeur approchée à 10^{-2} près :
a) 0,68 **b)** 0,95 **c)** 0,997.

3. X suit la loi normale $\mathcal{N}(3{,}3\,;0{,}5^2)$; alors la probabilité de l'événement $\{X < 2{,}5\}$ a pour valeur approchée à 10^{-3} près :
a) 0,945 **b)** 0,55 **c)** 0,055.

12 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. X suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$, alors :
a) son espérance mathématique est égale à $\dfrac{1}{2}$;
b) la probabilité de l'événement $\{X \in [0{,}1\,;0{,}9]\}$ est égale à 0,4 ;
c) les événements $\{X < 0{,}5\}$ et $\{X \geqslant 0{,}5\}$ ont la même probabilité.

2. On note f la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors :
a) $f(0) = 0$ **b)** $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
c) $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

3. X suit la loi normale d'espérance mathématique $\mu = 3$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$. Alors la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - 3}{0{,}5}$:
a) suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$;
b) suit la même loi que X ;
c) a pour moyenne 0.

4. X suit la loi normale d'espérance mathématique $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 3$. Alors :
a) $p(\{1 < X < 4\}) = p(\{-2 < X < 1\})$;
b) $p(\{X \in [-2\,;4]\}) \approx 0{,}95$;
c) $p(\{X \in [-8\,;10]\}) \approx 0{,}997$.

Voir les corrigés p. 361

Utiliser Geogebra

→ Pour mettre en évidence l'influence de l'écart-type

13 Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, l'écart-type traduit la dispersion, autour de l'espérance mathématique, des valeurs prises par la variable aléatoire.
On se propose d'étudier la signification de cette notion dans le cas d'une variable aléatoire continue X.

A À l'aide d'une calculatrice

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance mathématique 0 et d'écart-type σ.

1. Calculez la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 2\}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\sigma = 0{,}6$;

b) $\sigma = 1$;

c) $\sigma = 2$;

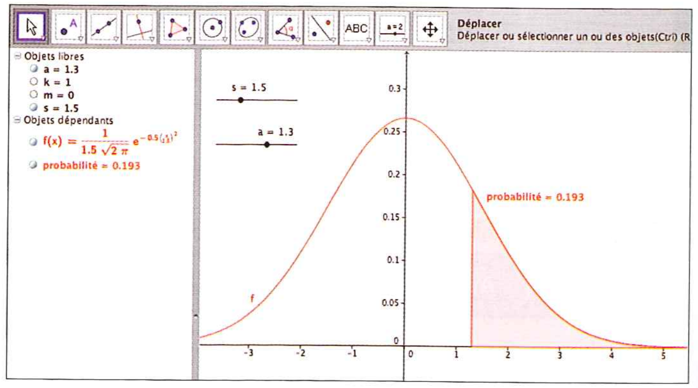
d) $\sigma = 3$;

e) $\sigma = 4$.

2. Comment semble varier la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 2\}$ lorsque σ augmente ?

B À l'aide du logiciel GeoGebra

1. Créez deux curseurs notés a et s qui peuvent varier de 0 à 20 puis faites tracer la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;s^2)$.
Faites afficher la valeur de la probabilité de l'événement $\{X \geqslant a\}$, c'est-à-dire l'aire du domaine compris entre la courbe et la droite des abscisses et « à droite » de la droite d'équation $x = a$.
Vérifiez que vous obtenez un écran semblable à celui de la figure ci-contre. Le domaine étudié est le domaine colorié. La probabilité cherchée est affichée dans la colonne algèbre à gauche.



Aide
Vous pouvez calculer la probabilité cherchée à l'aide de l'instruction « 1-normale [0, s, a] » ou avec un calcul d'intégrale.

2. Pour $a = 2$, faites varier s de 0,5 à 4 et observez les variations de la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 2\}$.
Vérifiez que les résultats sont en accord avec ceux de la partie 1.

3. Quelle est la valeur affichée à l'écran pour la probabilité de l'événement $\{X \geqslant a\}$ pour $a = 0$? Expliquez ce résultat.

4. Pour $a > 0$, vérifiez que la probabilité de l'événement $\{X \geqslant a\}$ augmente lorsque s augmente.

Conclusion. Comme dans le cas où la variable aléatoire est discrète, l'écart-type traduit la dispersion, autour de l'espérance mathématique, de la variable aléatoire.

Utiliser Geogebra

→ Pour étudier la probabilité de quelques événements particuliers

14 X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. L'objet de cet exercice est l'étude de la probabilité des événements :

$$A = \{X \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]\},\ B = \{X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\} \text{ et } C = \{X \in [\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma]\}$$

à l'aide du logiciel GeoGebra.

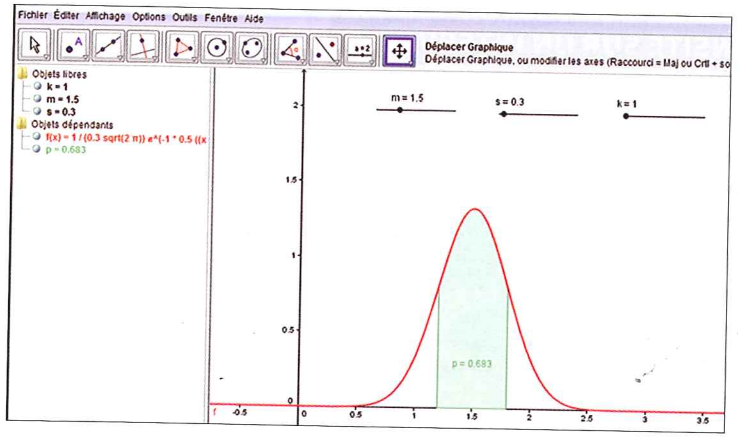
1. Créez trois curseurs que l'on notera m pour l'espérance mathématique, s pour l'écart-type et k pour le coefficient de σ dans l'expression des événements A, B et C :
– m peut varier de 0 à 5 ;
– s peut varier de 0 à 5 ;
– k peut prendre les valeurs 1, 2 et 3.

Aide Il suffit de faire varier k de 1 à 3 avec un incrément égal à 1.

2. Entrez dans la fenêtre de saisie la formule :

f(x)=1/(s*sqrt(2*π))*exp(–1/2*((x–m)/s)²).

Cette formule, donnant l'expression algébrique de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(m\,;s^2)$ n'est pas un attendu du programme.
Vous devez obtenir une courbe identique à celle tracé en rouge sur la figure ci-dessous pour $m = 1{,}5$ et $s = 0{,}3$.



3. a) Tapez dans la fenêtre de saisie la formule :

Intégrale[f(x),m–ks,m+ks].

Pour $m = 1{,}5$, $s = 0{,}3$ et $k = 1$, vous devez obtenir une figure identique à celle affichée ci-dessus. Une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale, soit 0,683, est affichée sur la figure.

b) À la probabilité de quel événement correspond l'intégrale dont la valeur est affichée ? Justifiez votre réponse.

4. a) Faites varier m et s en conservant $k = 1$. Que constatez-vous pour la valeur de l'intégrale ?

b) Donnez maintenant à k la valeur 2 et faites varier m et s. Que constatez-vous ?

c) Donnez maintenant à k la valeur 3 et faites varier m et s. Que constatez-vous ?

Entraînement

DE TÊTE

15 X suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$. Calculez :

a) $p(\{X \in [0\,;0{,}25]\})$;

b) $p(\{X \in [0{,}3\,;0{,}7]\})$.

16 X suit la loi uniforme sur $[0\,;5]$. Calculez :

a) $p(\{X \in [0\,;1]\})$;

b) $p(\{X \in [2\,;4]\})$;

c) $E(X)$.

17 f est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. Calculez $f(0)$.

2. Expliquez pourquoi $f(-1) = f(1)$.

18 X suit la loi normale d'espérance mathématique $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 10$. Donnez une valeur approchée de $p(\{80 < X < 120\})$.

LOIS À DENSITÉ SUR UN INTERVALLE

19 f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 3x^2$.

1. Justifiez que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;1]$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $\left\{X \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]\right\}$; **b)** $\{X \in [0{,}4\,;0{,}6]\}$.

20 f est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Justifiez que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;2]$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $\{X \in [0\,;1]\}$; **b)** $\{X \in [1\,;2]\}$.

21 f est la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2).$$

1. Justifiez que f est une fonction de densité de probabilité sur $[-1\,;1]$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $X \in [-1\,;0]$; **b)** $X \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Pour les exercices 22 à 24

Déterminez a pour que f définisse une densité de probabilité sur I.

22 f définie sur $I = [0\,;a]$ par $f(x) = 2x$.

23 f définie sur $I = [0\,;a]$ par $f(x) = x^2$.

24 f définie sur $I = [-a\,;a]$ par $f(x) = x + 1$.

Pour les exercices 25 à 27

Déterminez a pour que f définisse une densité de probabilité sur I.

25 f définie sur $I = [0\,;4]$ par $f(x) = a$;

26 f définie sur $I = [0\,;3]$ par $f(x) = ax$;

27 f définie sur $I = [0\,;2]$ par $f(x) = ax^2$.

28 **1.** Montrez que la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur $[0\,;2]$. Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

29 X suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$.
Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

30 X suit la loi uniforme sur $[0\,;5]$.
Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

31 X suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$, avec a, b deux réels.
Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

32 **Durée de vie**

On s'intéresse à la durée de vie X exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de densité f, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
Ainsi $p(\{X \in [0\,;t]\}) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années, et λ un réel positif.

1. Calculez $p(\{X \in [0\,;1]\})$ en fonction de λ.

2. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
Calculez λ.

Remarque

La loi de probabilité de densité $f : x \mapsto \lambda\, e^{-\lambda x}$ sur $[0\,;+\infty[$ est appelée **loi exponentielle** de paramètre λ.

33 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$.
On admet que f est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire de densité f.

1. Déterminez la probabilité de $p(\{0 < X < 10\})$.

2. Déterminez le réel t tel que $p(\{X < t\}) = 0{,}8$.

LOIS UNIFORMES SUR $[a\,;b]$

Pour les exercices 34 à 36

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur I.

34 $I = [0\,;4]$.

1. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $\{X \in [0\,;1]\}$;

b) $\{X \in [1\,;3]\}$.

2. Calculez l'espérance mathématique de X.

35 $I = [-3\,;2]$.

1. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $\{X \in [0\,;1]\}$;

b) $\{X \in [-1\,;2]\}$.

2. Calculez l'espérance mathématique de X.

36 $I = [0\,;10]$.

1. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) $\{X \in [0\,;9]\}$;

b) $\{X \in [9\,;10]\}$.

2. Calculez l'espérance mathématique de X.

37 On choisit au hasard un nombre x de l'intervalle $[0\,;1]$.
Quelle est la probabilité des événements suivants ?

1. A : « la première décimale de x est nulle ».

2. B : « x est supérieur à 0,1 ».

3. C : « la somme des deux premières décimales de x est égale à 10 ».

38 On choisit au hasard un nombre de l'intervalle $[0\,;5]$.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe au nombre choisi sa partie entière ?

2. Déterminez la probabilité de l'événement $\{X < 2\}$.

Aide

La partie entière d'un décimal x est l'entier immédiatement inférieur ou égal à x. Par exemple la partie entière de 3,75 est 3 et la partie entière de $-3{,}75$ est -4.

39 On choisit au hasard un nombre de l'intervalle $[0\,;5{,}5]$.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe au nombre choisi sa partie entière ?

2. Déterminez la probabilité de l'événement $\{X < 2{,}5\}$.

40 Emma doit se rendre au supermarché. Son heure d'arrivée est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[11\,;12]$. Emma restera 15 minutes dans le supermarché.

1. Calculez $p(\{X > 11\text{ h }15\text{ min}\})$.

2. Quelle est la probabilité qu'Emma puisse prendre connaissance de la vente promotionnelle que le supermarché va annoncer à partir de 11 h 45 ?

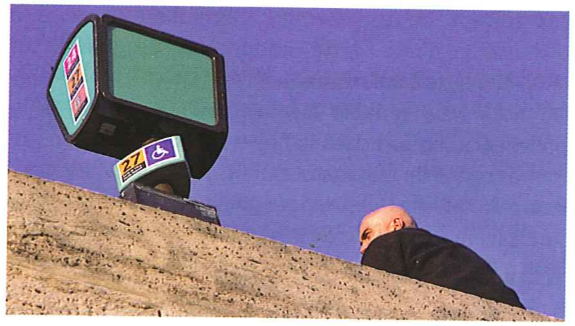
Les exercices 41 et 42 sont extraits du document d'accompagnement du programme.

41 **À l'arrêt du bus**

À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 h et 7 h 30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, représentée par le nombre de minutes après 7 h, est la variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0\,;30]$.

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?

2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?



42 **Pause-café**

Olivier vient tous les matins entre 7 h et 7 h 45 chez Karine prendre un café.

1. Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire « heure d'arrivée d'Olivier » ?

2. Calculez la probabilité qu'Olivier sonne chez Karine :

- après 7 h 30 ;
- avant 7 h 10 ;
- entre 7 h 20 et 7 h 22 ;
- à 7 h 30 exactement.

LOI NORMALE

43 Rompre la monotonie

Un commercial effectue régulièrement un trajet allant d'une ville A à une ville B. Pour rompre la monotonie, il utilise aléatoirement des parcours différents. On admet qu'il utilise le trajet passant par la ville C dans 8 % des cas et le trajet de plus courte durée dans 40 % des cas. En 2013, ce commercial devra effectuer 50 fois le trajet.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, où en 2011, ce commercial utilisera le trajet passant par la ville C.

a) Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et précisez ses paramètres.

b) Calculez $p(X = 5)$.

2. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, où en 2013, ce commercial utilisera le trajet de plus courte durée. On décide d'approcher la loi de Z par celle d'une variable Y, qui suit une loi normale.

a) Justifiez que les paramètres de cette loi normale sont $m = 20$ et $\sigma = 2\sqrt{3}$.

b) Calculez $p(16{,}5 \leqslant Y \leqslant 23{,}5)$.

Interprétez ce résultat relativement au nombre de trajets du commercial.

44 Chantier de construction

On s'intéresse au chantier de construction d'un tronçon de TGV.

Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de mètres cubes de matériaux extraits pendant la première heure du chantier. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 10.

1. Calculez $P(110 \leqslant X \leqslant 130)$.

2. Calculez la probabilité que la pelle prélevée extraie moins de 100 m³ pendant la première heure du chantier.

45 Coût d'assurance

Une assurance s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2013 sur les véhicules qu'elle assure dans un département donné. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros. L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart-type 200.

Quelle est la probabilité qu'en 2013 un sinistre pris au hasard coûte entre 1 000 et 1 500 euros ?

46 Vérification d'appareils

Une entreprise fabrique des appareils de mesure.

Les appareils sont conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale d'espérance 40 et d'écart-type 6,2.

1. Déterminez la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.

2. Déterminez le réel x tel que $P(X > x) = 0{,}01$.

Déduisez-en le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à 0,01.

47 Eau minérale

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production de la source, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 1,5.

1. Calculez $P(Y \leqslant 6{,}5)$.

2. Déduisez-en la probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la source soit calcaire.

48 Fabrique de jetons

Une entreprise fabrique des jetons destinés à un établissement de jeux. On note D la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre en millimètres des jetons et E la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur en millimètres des jetons.

On suppose que les variables aléatoires D et E sont indépendantes.

Le cahier des charges de cette entreprise indique que le diamètre doit être égal à 29 ± 0,4 mm et que l'épaisseur

doit être égale 2 ± 0,1 mm.

On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale d'espérance 29 et d'écart-type 0,2 et que la variable aléatoire E suit la loi normale d'espérance 2 et d'écart-type 0,04.

1. Calculez la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait un diamètre conforme au cahier des charges.

2. Calculez la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait une épaisseur conforme au cahier des charges.

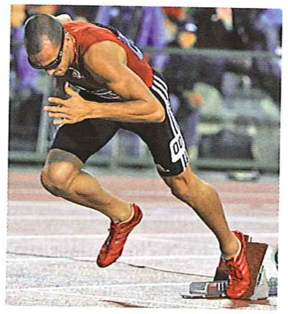
49 Longueur de pied

On suppose que, dans une population de personnes adultes, la longueur du pied en centimètres suit une loi normale d'espérance 27 et d'écart-type 2.

Quel est le pourcentage de personnes de cette population dont le pied a une taille comprise entre 23 cm et 31 cm ?

50 Faux départ

On veut étudier le temps de réaction d'un sprinter au départ d'un 100 mètres (temps qui s'écoule entre le coup de feu du starter et l'impulsion du sprinter sur son starting-block). On note X la variable aléatoire qui donne en secondes le temps de réaction d'un sprinter au départ d'un 100 m. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0{,}148$ et d'écart-type 0,20.



Un faux départ est constaté si le temps de réaction est inférieur à 0,1 s.

Quelle est la probabilité que le sprinter soit sanctionné d'un faux départ ?

51 Bonbonnes de gaz

La société K-Gaz produit des bonbonnes de gaz de volume utile 44 dm³.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque bonbonne tirée au hasard dans la production, associe sa contenance en dm³.

On admet que la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(44\,;0{,}2^2)$ d'espérance $m = 44$ dm³ et d'écart-type $\sigma = 0{,}2$ dm³.

1. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bonbonne choisie au hasard soit inférieure à 44,2 dm³ ?

2. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bonbonne choisie au hasard soit comprise entre 43,8 dm³ et 44,3 dm³ ?

52 Vaccination

Dans une population, on estime à 0,35 la probabilité qu'une personne se fasse vacciner contre une forme particulière de la grippe. Ce vaccin demande une seule injection.

Un responsable d'une région qui compte 100 000 habitants veut commander assez de doses pour que la probabilité de manquer de vaccin soit inférieure à 0,05.

1. On note X le nombre de personnes qui vont demander à être vaccinées.

Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale. Donnez les paramètres de cette loi binomiale.

2. On modélise la loi de X par une loi normale d'espérance 35 000 et de variance 26 250. Montrez que le responsable doit commander au moins 35 267 doses.

53

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes aux spécifications.

Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale d'espérance $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1{,}94$.

On suppose que N suit la loi normale d'espérance $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1{,}52$.

1. Calculez la probabilité que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254 mm.

2. Calculez la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit comprise entre 147 et 153 mm.

54 La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »

Cet exercice est extrait du document d'accompagnement du programme.

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6\,000$ et d'écart-type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

a) Calculez la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5 800 litres par an.

b) Calculez la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5 900 et 6 100 litres de lait par an.

c) Calculez la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6 250 litres par an.

2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

a) la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau. Calculez cette production ;

b) la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives. Calculez cette production.

EN PASSANT PAR LA LOI $\mathcal{N}(0\,;1)$

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, la calculatrice permet de calculer la probabilité d'un événement quelconque $\{a \leqslant X \leqslant b\}$.

Lorsque μ ou σ sont inconnus, on doit se ramener à la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$ dont on connaît l'espérance et l'écart-type en posant $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

55 Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 10. X prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 20].
On suppose que la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 12\}$ est égale à $\dfrac{1}{3}$. On se propose de déterminer l'écart-type σ d'une telle loi.
On sait que dans le cas de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ les calculatrices donnent une valeur approchée de k si l'on connaît la probabilité de l'événement $\{X \leqslant k\}$.
On va donc se ramener à une loi normale centrée réduite.

1. On pose $Y = \dfrac{X-10}{\sigma}$.

a) Par définition que signifie que X suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\sigma^2)$?

b) Expliquez alors pourquoi $X \geqslant 12$ équivaut à $Y \geqslant \dfrac{2}{\sigma}$.

2. À l'aide de la calculatrice déterminez une valeur approchée de $\dfrac{2}{\sigma}$ puis de σ.

56 Fabrication de tuyaux

Un industriel fabrique des tuyaux en PVC destinés à l'évacuation des eaux sanitaires des habitations.

1. On note D_1 la variable aléatoire qui, à tout tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre extérieur. On suppose que la variable aléatoire D_1 suit la loi normale d'espérance mathématique 40 et d'écart-type 0,2. Un tuyau ne peut être commercialisé que lorsque son diamètre extérieur est compris entre 39,6 mm et 40,4 mm.
Calculez la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production de la journée soit commercialisable.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la fabrication des tuyaux : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les tuyaux.
On note D_2 la variable aléatoire qui, à chaque tuyau prélevé au hasard dans la production journalière future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D_2 suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart-type σ.
Déterminez σ pour que la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production journalière future puisse être commercialisable soit égale à 0,99. Pour cela, on posera $Y = \dfrac{(D_2 - 40)}{\sigma}$ et on écrira les conditions que doit vérifier Y.

57 Tubes de chauffage

Une usine fabrique des tubes en polyéthylène pour le chauffage géothermique.
Un tube est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètre et 1,65 millimètre.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètre.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.
Calculez la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production de la journée soit accepté au contrôle. On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes. Il est envisagé pour cela de modifier le réglage des machines produisant ces tubes.
On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube, prélevé dans la production future, associera son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.
Déterminez σ_1 pour que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production future soit accepté au contrôle soit égale à 0,99.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-2}.

58 Contrôle du poids d'une pièce

Une entreprise fabrique des pièces en grande série.
Une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
L'entreprise dispose d'une machine de contrôle des pièces fabriquées.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse d'une pièce en grammes.
On admet que X suit une loi normale d'espérance mathématique 7,5 et d'écart-type σ.

1. Après une période de production, la machine de fabrication a subi un dérèglement brutal.
L'écart-type σ vaut alors 0,015.
On rappelle qu'une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.

Calculez la probabilité qu'une pièce soit conforme.

2. Calculez la valeur de σ pour laquelle la probabilité qu'une pièce soit conforme est égale à 0,99. On posera $Y = \dfrac{(X-7{,}5)}{\sigma}$ et on exprimera les conditions portant sur Y.

3. On suppose que σ vaut 0,002 et qu'à la suite d'un nouveau dérèglement, la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 7,502 et d'écart-type 0,002.
Calculez la probabilité qu'une pièce soit conforme.

Les exercices 59 à 61 sont extraits du document d'accompagnement du programme.

59 Poids d'alerte pour cartes de contrôle

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5 g pour des collectivités et des chaînes hôtelières.
Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. La variable aléatoire X égale au poids d'une boîte de 40 microplaquettes suit une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1{,}6$.
La boîte est jugée conforme si son poids est compris entre 497,5 g et 502,3 g (soit environ $500 \pm 2\sigma$).

1. Calculez la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.

2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que :

$$p(\mu - h < X < \mu + h) = 0{,}95.$$

Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.
On veut calculer les poids d'alerte.

a) Notons $Z = \dfrac{X-500}{\sqrt{1{,}6}}$.
Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?

b) Montrez que $\mu - h < X < \mu + h$ équivaut à :

$$\frac{\mu - h - 500}{\sqrt{1{,}6}} \leqslant Z \leqslant \frac{\mu + h - 500}{\sqrt{1{,}6}}.$$

c) Donnez une valeur de a pour laquelle :

$$p(\{-a < Z < a\}) \approx 0{,}95.$$

d) Déduisez des questions précédentes une valeur approchée des poids d'alerte.

60 Réglage d'une machine d'embouteillage dans une coopérative

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?

2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?

3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.

a) Quelle est alors la valeur de μ ?

b) Quelle est dans les conditions de la question **a)** la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?

c) Déterminez μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins d'un litre ET moins de 1 % de bouteilles qui débordent. On pourra poser $Y = \dfrac{(X-\mu)}{\sigma}$ et traduire ces conditions pour Y.

61 Durée de vie d'un appareil

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5 % de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

POUR LA LOGIQUE

Pour les exercices 62 à 64

X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Dites si la propriété indiquée est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

62 **1.** $\exists a \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $p(X \in \,]-a\,;a[) = 0{,}6$.

2. $\exists a \in \,]0\,;+\infty[$ tel que $p(X \in [0\,;a[) = 0{,}6$.

63 **1.** $\forall a \in \,]0\,;+\infty[$, $p(X \in [-a\,;a]) = p(X \in \,]-a\,;a[)$.

2. $\forall a \in \,]0\,;+\infty[$, $\forall b \in \,]0\,;+\infty[$, $p(X \in [0\,;a]) \leqslant p(X \in [-b\,;b])$.

64 $\forall a \in \,]0\,;+\infty[$, $p(X \in [a\,;a+1]) = p(X \in [-a-1\,;-a])$.

65 Démontrez que la propriété suivante est fausse :
$\exists a \in \,]-\infty\,;0[$ tel que $p(X \geqslant a) = 0{,}5$.

Un peu d'histoire

Chercheurs d'hier

Carl Friedrich Gauss et la loi normale

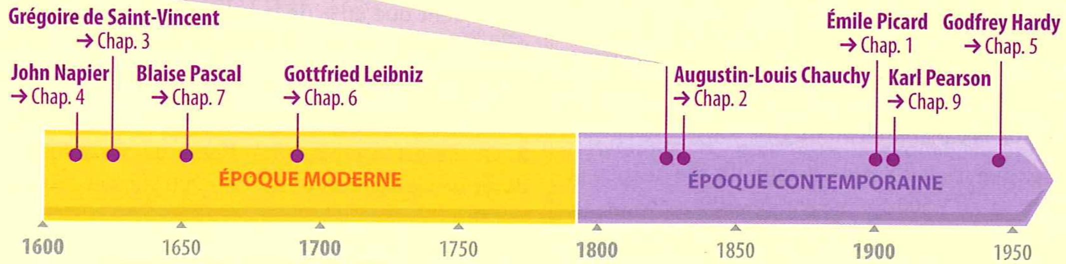
Gauss eut une enfance pauvre et austère, et connut la célébrité comme mathématicien et astronome à vingt-quatre ans. Il n'y a pas un domaine des mathématiques et de la physique mathématique qu'il n'ait abordé.

D'une grande exigence sur les explications fournies, il a laissé souvent d'autres développer des théories qu'il avait préparées pour lui seul.

La loi normale, dite aussi loi de Gauss, été découverte à peu près simultanément par Pierre Simon de Laplace (Beaumont-en-Auge, 1749-Paris 1827) et par Gauss. Les probabilités s'appuient ainsi sur une solide fondation mathématique.

C'est l'aboutissement de plus d'un siècle de travaux à partir de Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 1623 – Paris 1662), Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, 1601 – Castres, 1665), Jacques Bernoulli (Bâle, 1654 – Bâle 1705), Thomas Bayes (Londres, 1702 – Londres, 1761), etc.

Carl Friedrich Gauss
1777 - 1855



À la même époque

En France

La révolution de 1830, les « Trois Glorieuses », conduit à l'abdication de Charles X. La monarchie de Juillet est instaurée, Louis-Philippe I[er] devient roi des Français.

Louis-Philippe I[er]
(1773 - 1850)

À la même époque

En littérature

La représentation d'Hernani, le 25 février 1830, oppose avec violence les tenants du classicisme à la jeune génération. Les principes du drame romantique s'imposent.

Victor Hugo
(1802 - 1885)

Sur le Web
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Gauss.html
http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=gauss

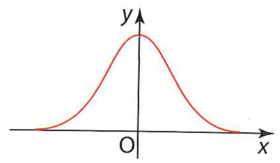
Accompagnement personnalisé

Soutien

66 X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. On sait que $p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right) \approx 0{,}433$.

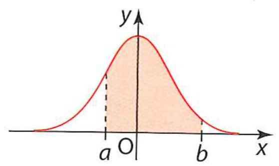
On se propose de calculer $p\left(X > \frac{3}{2}\right)$.

1. Vérifiez que la courbe représentative de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ a l'allure ci-contre.



➜ ***Remarque*** : *Dans ce genre de problème, il est conseillé de dessiner l'allure de la courbe représentative de la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(0;\,1)$, même lorsque cela n'est pas explicitement demandé.*

➜ *Il convient de savoir que :*
- *la courbe est symétrique par rapport à la droite des ordonnées ;*
- *$P(X \in [a\,;\,b])$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe, la droite des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$;*
- *l'aire du domaine « illimité » compris entre la courbe et la droite des abscisses est égale à 1.*



2. a) Expliquez pourquoi :

$$P\left(X > \frac{3}{2}\right) + P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

➜ ***Indication.*** *Utilisez la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et n'oubliez pas de préciser que les événements $\left\{X > \frac{3}{2}\right\}$ et $\left\{0 \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right\}$ sont disjoints.*

b) Déduisez-en la valeur de $p\left(X > \frac{3}{2}\right)$.

67 X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. En utilisant le fait que la courbe représentative de la densité de probabilité de cette loi est symétrique par rapport à la droite des ordonnées, calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $(X \geqslant 0)$. **b)** $(X \leqslant 0)$.

➜ ***Indication.*** *N'oubliez pas que $p(-\infty \leqslant X \leqslant +\infty) = 1$.*

2. Quelle relation y a-t-il entre les deux nombres : $p(0 \leqslant X \leqslant 3)$ et $p(-3 \leqslant X \leqslant 0)$?

➜ ***Indication.*** *Utilisez l'allure de la courbe représentative de la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.*

Approfondissement

68 X suit une loi normale de moyenne 5. On sait que $p(X \geqslant 7) = \frac{3}{2}$.

On se propose de calculer la probabilité de l'événement $\{3 < X < 7\}$.

➜ *Il est conseillé dans un exercice de ce type de dessiner l'allure de la courbe représentative de la densité de probabilité d'une loi normale de moyenne 5 ; et surtout de ne pas oublier que la droite d'équation $x = 5$ est un axe de symétrie de la courbe.*

Calculez la probabilité de l'événement $3 \leqslant X \leqslant 7$ en utilisant :
- d'une part cette symétrie ;
- d'autre par le fait que la probabilité de l'événement $\{-\infty \leqslant X \leqslant +\infty\}$ est égale à 1.

69 X suit une loi normale de moyenne –3. On sait que $p(-3 \leqslant X \leqslant 0) = \alpha$.

Calculez en fonction de α la probabilité de chacun des événements suivants :

1. $(X \geqslant 0)$.
2. $(-6 \leqslant X \leqslant -3)$.
3. $(X \leqslant -6)$.
4. $(X \leqslant 0)$.

70 X suit une loi normale de moyenne 1. On sait que $p(X \leqslant -1) = \alpha$.

Calculez en fonction de α la probabilité de chacun des événements suivants :

1. $(-1 \leqslant X \leqslant 1)$.
2. $(X \geqslant 3)$.
3. $(1 \leqslant X \leqslant 3)$.
4. $(X \geqslant -1)$.

71 Dans une population, la glycémie, c'est-à-dire le nombre de grammes de sucres par litre de sang, vérifie les résultats suivants :
- 15 % des individus présentent une glycémie inférieure à 0,82 g/L,
- 20 % des individus présentent une glycémie supérieure à 0,95 g/L.

On suppose que la glycémie de cette population suit une loi normale.

Déterminez l'espérance mathématique et l'écart-type de cette loi.

Le jour du BAC

72 Exercice commenté

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.

Une usine de produits chimiques utilise une machine automatique pour remplir des sachets d'engrais en poudre. Le poids, en grammes, d'engrais par sachet peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 4$. Le poids de produit affiché sur les sachets est de 500 g.

1. La machine est réglée pour obtenir $\mu = 505$.
Quelle est la probabilité que le poids d'engrais dans le sachet soit inférieur au poids affiché de 500 g ?

2. Sur quelle valeur de μ faut-il régler la machine pour qu'au plus 5 % des flacons aient un poids inférieur au poids affiché de 500 g ?

▶ Analyser l'énoncé
Il s'agit d'un problème sur les lois normales.

▶ Analyser l'énoncé
Ici la machine est réglée pour une valeur de μ supérieure au poids affiché sur les sachets pour minimiser la probabilité que le poids réel soit inférieur au poids affiché.

▶ Analyser l'énoncé
On reconnaît un problème où μ est inconnu.

Conseils

1. Le problème se ramène au calcul d'une probabilité du type $p(X < a)$. Les calculatrices permettent ce calcul en se ramenant à des événements de la forme :
$$\{\alpha < X < \beta\}.$$

Remarque
X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. Les calculatrices n'indiquent pas directement la valeur de $p(X \leqslant a)$ (voir objectif 3).

2. Ici μ est inconnue.
En posant $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ on obtient une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. Il suffit alors d'utiliser la calculatrice.

Remarque
Pour la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$, si on connaît la valeur p_0 de $p(X \leqslant x_0)$ la calculatrice indique la valeur de x_0 (voir objectif 3).

→ Voir les corrigés p. 361

QCM

73 Pour chaque question, indiquez la ou les réponses exactes en justifiant votre réponse.
X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ avec $\mu = 100$ et $\sigma = 10$.

1. Lesquelles de ces affirmations sont vraies ?
a) $p(90 \leqslant X \leqslant 110) \approx 0{,}68$;
b) $E(X) = \mu$;
c) $V(X) = 10$.

2. $p(X \in [115\,;125]) = \ldots$?
a) $\dfrac{1}{2}$;
b) $\dfrac{3}{5}$;
c) $p(X \in [75\,;85])$.

3. $p(X > 120) = \ldots$?
a) $\dfrac{1}{2} + p(0 \leqslant X \leqslant 120)$;
b) $\dfrac{1}{2} - p(0 \leqslant X \leqslant 120)$;
c) $p(X \leqslant 80)$.

VRAI OU FAUX

74 Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants, on constate que la résistance nominale en ohms d'un composant tiré au hasard est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 1 000 et d'écart-type 10.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 980 et 1 020 est supérieure à 95 %.
b) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 991 et 1 009 est supérieure à 90 %.
c) La probabilité que la résistance du composant tiré soit supérieure à 983,6 est supérieure à 97 %.
d) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 990 et 1 010 est de 84 %.
e) La probabilité que la résistance du composant tiré soit entre 983,6 et 1 019,6 est de 92,5 %.

EXERCICES

75 On jette un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.
Dans cet exercice les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculez la probabilité de l'événement E : « on gagne 15 parties ».

3. Calculez la probabilité de l'événement F : « on gagne 15, ou 16, ou 17 parties ».

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $m = \dfrac{50}{3}$ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{10}{3}$.
On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifiez le choix des valeurs de m et de σ.

2. Justifiez que $P(Y \geqslant 17{,}5)$ est une approximation de la probabilité de l'événement : « le nombre de parties gagnées est au moins égale à 18 ».

3. Donnez une valeur numérique de $P(Y \geqslant 17{,}5)$ arrondie à 10^{-2}.

4. Déduisez-en une valeur approchée de la probabilité de l'événement : « le nombre de parties gagnées est compris entre 15 et 17 ».

76 Conformité d'une pièce

Une entreprise fabrique des pièces. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre 79,8 mm et 80,2 mm.

1. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe sa longueur en mm.
On admet que la variable L suit une loi normale d'espérance 80 et d'écart-type 0,094 8.
On prélève une pièce au hasard dans la production.
Déterminez la probabilité que cette pièce soit conforme.

2. L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela on projette de changer le processus de fabrication des pièces.
On définit alors une nouvelle variable L_1 qui à chaque pièce à construire selon le nouveau processus associera sa longueur en mm.
La variable aléatoire L_1 suit une loi normale d'espérance $m = 80$ et d'écart-type σ_1.
Déterminez σ_1 pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, la probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à 0,99.