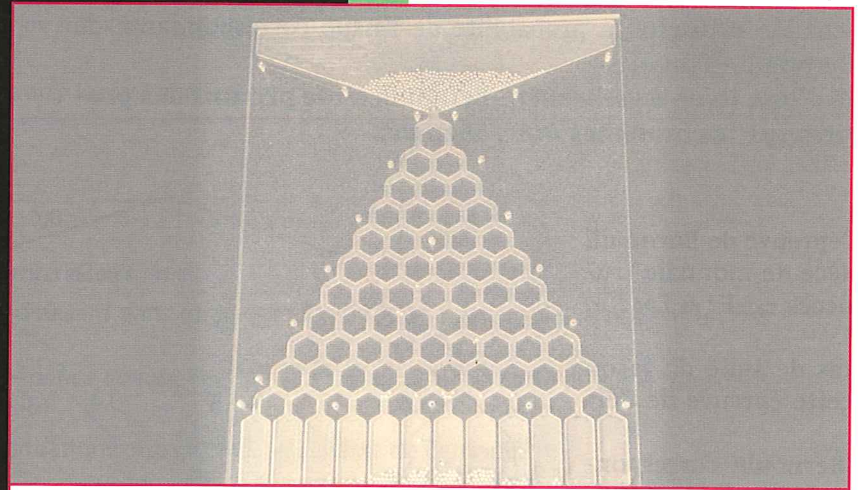
7 Probabilités

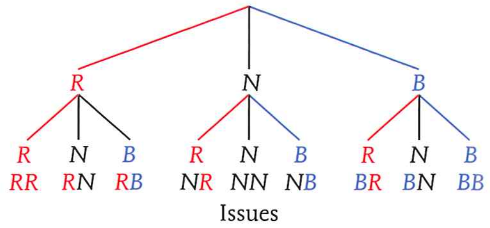


Les probabilités qu'une bille aboutisse dans chacune des colonnes du bas sont celles correspondant à une loi binomiale.

1 Schéma de Bernoulli

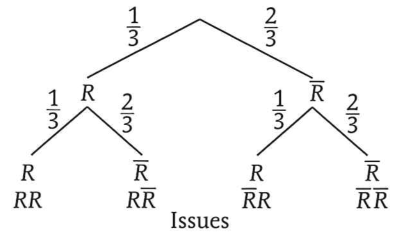
Activité — Rouge ou pas rouge ?

Une urne contient trois boules : une rouge, une noire et une bleue. On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis on tire une autre boule au hasard. On admet que tous les tirages d'une boule sont équiprobables.



1. Montrer, en utilisant l'arbre ci-contre, que la probabilité d'obtenir deux boules rouges (RR) est $\frac{1}{9}$ et que la probabilité d'obtenir une boule rouge, puis une boule qui ne l'est pas est $\frac{2}{9}$.

2. On s'intéresse maintenant, pour chaque tirage, à l'obtention ou non de la boule rouge et on représente la situation à l'aide de l'arbre ci-contre, appelé « arbre pondéré ».



a) Que signifie R ? $\overline{R}$?

b) À quelles probabilités correspondent les nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ écrits sur les branches de l'arbre pondéré ?

c) Déterminer la règle permettant, à partir de l'arbre pondéré, de calculer les probabilités obtenues à la question **1.** et, plus généralement, les probabilités des quatre issues de ce dernier arbre.

Cours

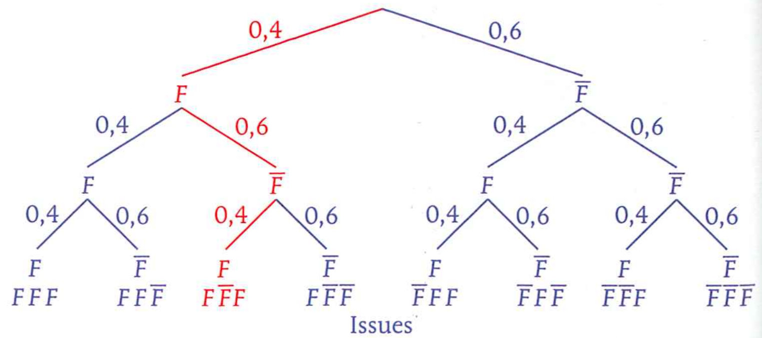
• Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire comportant deux issues : l'une appelée succès (notée S), de probabilité $P(S) = p$, l'autre échec (notée $\overline{S}$ ou E), de probabilité $P(\overline{S}) = q = 1 - p$.

• Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition n fois d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, de façon que le résultat d'une épreuve n'ait pas d'influence sur les résultats des suivantes ; on dit alors que ces épreuves successives sont **indépendantes**.

• On représente un schéma de Bernoulli par un **arbre pondéré** :
on écrit sur chaque **branche** la probabilité de l'issue correspondante de l'épreuve de Bernoulli (p ou q) ;
la **probabilité d'une issue** du schéma de Bernoulli est **le produit des probabilités écrites sur les branches qui y mènent.**

BON À SAVOIR
Une probabilité (par exemple ici p et q) appartient toujours à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Exemple :
On considère l'épreuve de Bernoulli « lancer une pièce de monnaie truquée », où le succès est F : « Face », avec $P(F) = 0{,}4$.
On répète 3 fois de suite de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.
Le schéma de Bernoulli correspondant est représenté par l'arbre pondéré ci-contre.



Par exemple, la probabilité de l'issue $F\overline{F}F$ est $P(F\overline{F}F) = 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}096$.

Exercice résolu 1 — Comment vérifier qu'une situation correspond à un schéma de Bernoulli ?

Victor lance un dé non truqué 10 fois de suite ; il s'intéresse aux apparitions de la face numérotée 6.
Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

SOLUTION

• On considère l'épreuve de Bernoulli « lancer un dé non truqué », dont le succès S est « obtenir la face n° 6 ». La probabilité de S est $p = \frac{1}{6}$.

• Cette épreuve est répétée 10 fois. Le résultat d'un lancer n'a aucune influence sur les autres, donc les 10 épreuves sont indépendantes.
La situation correspond donc à un schéma de Bernoulli.

MÉTHODE 1

Pour vérifier qu'une situation correspond à un schéma de Bernoulli :
1. On détermine l'épreuve de Bernoulli, le succès S et la probabilité p de S.
2. On détermine le nombre n de fois où l'épreuve est répétée et on vérifie l'indépendance des n épreuves successives.

Exercice résolu 2 — Comment simuler un schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur et afficher les nombres de succès et d'échecs ?

Victor lance un dé non truqué 10 fois de suite ; il s'intéresse aux apparitions de la face numérotée 6.

1. Simuler le schéma de Bernoulli correspondant (voir **exercice résolu** 1) à l'aide d'un tableur.

2. Afficher les nombres de succès S et d'échecs E.

SOLUTION

1. • Le succès S est « obtenir la face n° 6 », de probabilité $p = \frac{1}{6}$, et le nombre n de répétitions indépendantes de l'épreuve est $n = 10$.

• On entre dans la cellule A1 la formule `=SI(ALEA()<1/6;"S";"E")` et on fait glisser jusqu'à la cellule A10.

2. On entre dans les cellules B1 et B2 les titres « Nombre de succès : » et « Nombre d'échecs : », puis dans les cellules C1 et C2 les formules `=NB.SI(A1:A10;"S")` et `=NB.SI(A1:A10;"E")`.

On obtient par exemple le résultat ci-contre.

	A	B	C
1	S	Nombre de succès :	2
2	E	Nombre d'échecs :	8
3	E		
4	E		
5	E		
6	E		
7	E		
8	E		
9	S		
10	E		

MÉTHODE 2

Pour simuler un schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur et afficher les nombres de succès et d'échecs :
1. On détermine l'épreuve de Bernoulli, le succès S, la probabilité p de S, le nombre n de répétitions indépendantes de l'épreuve. (L'échec est noté E.)
2. On entre dans la cellule A1 la formule `=SI(ALEA()<p;"S";"E")` et on fait glisser jusqu'à la cellule An.
3. On entre dans les cellules B1 et B2 les titres « Nombre de succès : » et « Nombre d'échecs : », puis dans les cellules C1 et C2 les formules `=NB.SI(A1:An;"S")` et `=NB.SI(A1:An;"E")`.
Pour simuler un schéma de Bernoulli à l'aide d'un algorithme, voir Exercices 3 à 5 p. 148.

Application

Application (VOIR EXERCICES RÉSOLUS 1 ET 2)

Tina tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Elle gagne si elle obtient un des 4 as du jeu.
Elle répète cette expérience 80 fois, en remettant chaque fois la carte qu'elle a tirée dans le jeu.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Simuler ce schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur.
3. Afficher les nombres de succès S et d'échecs E.

→ VOIR EXERCICES 1 ET 2, 6 À 8, PP. 148 ET 149

2 Loi binomiale : définition et probabilité

Activité Probabilité d'avoir des succès

Un sac contient 1 carton sur lequel est écrite la lettre *S*, signifiant succès, et 3 cartons sur lesquels est écrite la lettre *E*, signifiant échec.
On prend au hasard trois fois successivement un carton avec remise, c'est-à-dire en remettant chaque fois dans le sac le carton tiré, avant de prendre le suivant.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

3. a) À l'aide de l'arbre, déterminer toutes les issues pour lesquelles on obtient 2 succès.

b) Montrer que chacune de ces issues a pour probabilité $0{,}25^2 \times 0{,}75$.

c) En déduire que la probabilité d'obtenir exactement 2 succès est : $3 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75$.

Cours

1 Définition de la loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

On note X la « variable aléatoire » qui correspond au nombre de succès obtenus dans ce schéma : cette variable aléatoire a pour valeurs les nombres possibles de succès 0 ; 1 ; … ; n.
On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $B(n\,;p)$: pour $0 \leqslant k \leqslant n$, l'événement $\{X = k\}$ est réalisé quand le nombre de succès obtenus dans le schéma de Bernoulli est égal à k.
La probabilité de l'événement $\{X = k\}$ est notée $\boldsymbol{P(X = k)}$.

2 Notations $P(X < k)$, $P(X > k)$, $P(X \leqslant k)$ et $P(X \geqslant k)$

Soit k un nombre entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ et soit X la variable aléatoire précédente, qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Dans le schéma de Bernoulli, l'événement $\{X < k\}$ est réalisé quand le nombre de succès obtenu est strictement inférieur à k ; la probabilité de l'événement $\{X < k\}$ est notée $\boldsymbol{P(X < k)}$, pour $k \neq 0$.
On définit de façon analogue $P(X > k)$ pour $k \neq n$, $P(X \leqslant k)$ et $P(X \geqslant k)$.

Dans ces conditions :

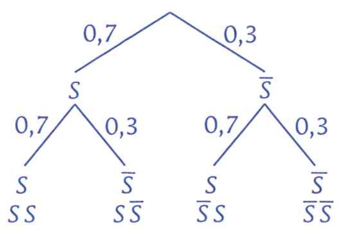
• $P(X \leqslant k) = P(X = 0) + \ldots + P(X = k)$; $P(X < k) = P(X = 0) + \ldots + P(X = k - 1)$.
• $P(X \geqslant k) = P(X = k) + \ldots + P(X = n)$; $P(X > k) = P(X = k + 1) + \ldots + P(X = n)$.
On peut constater que $P(X \leqslant k) + P(X > k) = 1$ et $P(X \geqslant k) + P(X < k) = 1$ (événements contraires).

RAPPEL
Vous ne savez plus ce que sont des événements contraires ?
→ *Voir Lexique page 208.*

Exemple :

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,7 (succès S et échec $\overline{S}$).
• $P(X = 0) = P(\overline{S}\,\overline{S}) = 0{,}3^2 = 0{,}09$;
$P(X = 1) = P(S\overline{S}) + P(\overline{S}S) = 2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$.
• $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}51$;
$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 0{,}49$.

Issues



Exercice résolu 3 Comment vérifier qu'une situation correspond à une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale ?

Victor lance un dé non truqué 10 fois de suite ; il s'intéresse au nombre d'obtentions de la face numérotée 6.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

SOLUTION

• On a vérifié dans l'**exercice résolu 1** de la page 139 que la situation correspond à un schéma de Bernoulli, de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$.

• La situation s'attache au nombre de succès (obtenir la face n° 6) dans ce schéma de Bernoulli.

• Ainsi, la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de succès suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$.

MÉTHODE 3

Pour vérifier qu'une situation correspond à une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale :
1. On vérifie que la situation correspond à un schéma de Bernoulli, en précisant ses paramètres n et p.
2. On constate que la situation s'attache au nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli.
3. On conclut en précisant que la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p (ceux du schéma de Bernoulli).

Exercice résolu 4 Comment calculer, à l'aide d'un tableur, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où *X* est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B\left(20\,;\frac{2}{7}\right)$.
Calculer, à l'aide d'un tableur, $P(X = 10)$ et $P(X \leqslant 10)$.

SOLUTION

• $n = 20$; $p = \frac{2}{7}$.

• On entre la formule `=LOI.BINOMIALE(10;20;2/7;FAUX)` dans une cellule du tableur.
On lit que $P(X = 10) = 0{,}023\,154\,624\ldots$.

• On entre la formule `=LOI.BINOMIALE(10;20;2/7;VRAI)` dans une autre cellule du tableur.
On lit que $P(X \leqslant 10) = 0{,}988\,285\,413\ldots$.

MÉTHODE 4

Pour calculer, à l'aide d'un tableur, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où *X* est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :
1. On repère les paramètres n et p de la loi binomiale.
2. On entre la formule `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)` dans une cellule du tableur, pour obtenir $P(X = k)$.
3. On entre la formule `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)` dans une autre cellule, pour obtenir $P(X \leqslant k)$.
Pour calculer ces probabilités à la calculatrice, voir Exercice résolu 8 p. 149.

Applications

Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

Une urne contient 100 jetons, dont 53 sont gagnants.
Ian tire 12 fois de suite un jeton au hasard, en remettant le jeton obtenu dans l'urne avant de tirer le suivant.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 12 et 0,53.
Calculer, à l'aide d'un tableur :
a) la valeur décimale arrondie à 0,01 près de $P(X = 8)$;
b) la valeur décimale arrondie à 0,01 près de $P(X \leqslant 8)$.

→ VOIR EXERCICES 10 ET 11, 13 À 15, PP. 149 ET 150

3 Loi binomiale : graphique ; espérance

Activité Tournoi de ping-pong

Régulièrement, Loïc et Karine jouent successivement trois parties de ping-pong l'un contre l'autre. On admet que les résultats des parties sont indépendants les uns des autres et que la probabilité que Loïc gagne une partie contre Karine est $p = \frac{2}{3}$.

1. Justifier que la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de victoires de Loïc pour trois parties successives, suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.

2. En moyenne, combien de parties Loïc peut-il espérer gagner lorsqu'il joue trois parties successives contre Karine ? Comparer le résultat avec le nombre np.

Cours

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1 Représentation graphique de la loi binomiale $B(n\,;p)$

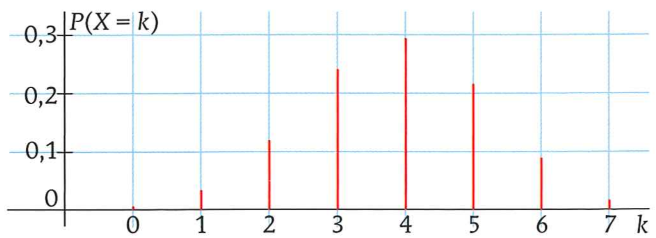
On représente graphiquement la loi binomiale par un diagramme en bâtons ; les valeurs possibles k de la variable aléatoire X sont placées en abscisses et les probabilités $P(X = k)$ sont placées en ordonnées.

Exemple :

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,55$.
Le tableau suivant donne les valeurs décimales arrondies à 0,001 près de $P(X = k)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,004	0,032	0,117	0,239	0,292	0,214	0,087	0,015

Représentation graphique de la loi binomiale $B(7\,;0,55)$.



2 Espérance de la variable aléatoire X

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la moyenne des nombres de succès obtenus est proche de np.

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre $\mathbf{E(X) = np}$.

Exemple :

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,1.
L'espérance de X est $E(X) = 100 \times 0,1 = 10$.
(Si on répétait un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli de paramètres 100 et 0,1, la moyenne des nombres de succès obtenus serait proche de 10.)

Exercice résolu 5 Comment représenter graphiquement, à l'aide d'un tableur, une loi binomiale par un diagramme en bâtons ?

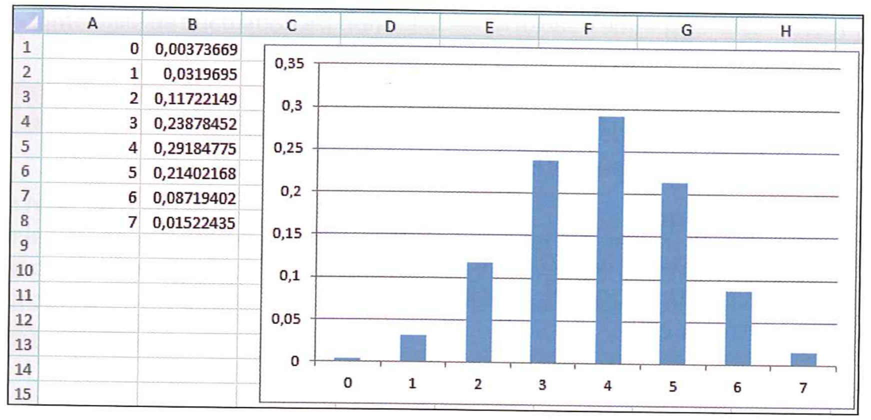
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 7 et 0,55.
Représenter graphiquement cette loi, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

SOLUTION

- $n = 7\,; p = 0,55$.
- On entre les valeurs 0, 1, … , 7 de la cellule A1 à la cellule A8.
- On entre dans la cellule B1 la formule =LOI.BINOMIALE(A1;7;0,55;FAUX) et on fait glisser jusqu'à la cellule B8. (On obtient les valeurs des probabilités $P(X = 0)$, …, $P(X = 7)$.)
- On sélectionne la plage B1:B8, puis on clique dans la barre d'outils sur Insertion, on choisit Colonne, puis le premier Histogramme 2D.

Mise en forme : on clique droit sur l'axe des abscisses, puis on clique sur Sélectionner des données, sur Modifier (dans le cadre Étiquettes de l'axe horizontal), on sélectionne la plage A1:A8 et on clique sur OK.

On obtient :



MÉTHODE 5

Pour représenter graphiquement, à l'aide d'un tableur, une loi binomiale par un diagramme en bâtons :

1. On repère les paramètres n et p de la loi binomiale.
2. On entre les nombres 0, 1, … , n de la cellule A1 à la cellule A($n + 1$).
3. On entre dans la cellule B1 la formule =LOI.BINOMIALE(A1;n;p;FAUX) et on fait glisser jusqu'à la cellule B($n + 1$), pour obtenir les valeurs des probabilités $P(X = k)$.
4. On sélectionne la plage B1:B($n + 1$), puis on clique dans la barre d'outils sur Insertion, on choisit Colonne, puis le premier Histogramme 2D et on met en forme avec les options obtenues en cliquant droit sur les zones des axes.

Applications

Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 5)

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 8 et 0,47.
Représenter graphiquement cette loi, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 5)

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{6}$.
Représenter graphiquement cette loi, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

→ VOIR EXERCICES 18 ET 19, P. 150

4 Échantillonnage

Activité — Proportion dans une population, fréquence dans un échantillon

Dans la population active d'un pays, la proportion de chômeurs est 45 %.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 10 individus de cette population.

1. Montrer que la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de chômeurs de l'échantillon suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,45.

2. Le tableau suivant donne les valeurs de $P(X = k)$ et de $P(X \leqslant k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 10$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$P(X=k)$	0,002533	0,020724	0,076303	0,166478	0,238367	0,234033	0,159568	0,074603	0,02289	0,004162	0,000341
3	$P(X<=k)$	0,002533	0,023257	0,09956	0,266038	0,504405	0,738437	0,898005	0,972608	0,995498	0,999659	1

a) Donner, par lecture du tableau, le plus petit nombre entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$.
b) Donner, par lecture du tableau, le plus petit nombre entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
c) Calculer, à l'aide de la ligne 2 du tableau, la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$; constater que cette probabilité est supérieure ou égale à 0,95.

3. La variable aléatoire indiquant la fréquence des chômeurs de l'échantillon est $F = \dfrac{X}{10}$.
Déduire du résultat de la question **2. c)** la probabilité $P\left(\dfrac{a}{10} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{10}\right)$ que la fréquence des chômeurs de l'échantillon soit comprise entre 20 % et 80 %.

> **BON À SAVOIR**
> Prélever « au hasard et avec remise » un échantillon dans une population signifie qu'après chaque prélèvement au hasard d'un individu dans la population, on le remet dans celle-ci avant le prélèvement suivant.
> Ainsi, les prélèvements sont indépendants les uns des autres.

Cours

On considère une population dont une proportion d'individus possèdent une certaine particularité $\mathcal{P}$. On note f la fréquence des individus d'un échantillon de taille n, prélevé au hasard et avec remise, qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$.

1 Intervalle de fluctuation d'une fréquence

Lorsque la proportion a pour valeur p, la variable aléatoire X, qui a pour valeurs les nombres possibles d'individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$, suit la loi binomiale de paramètres n et p.

> Pour cette valeur p, on appelle **intervalle de fluctuation** à 95 % de la fréquence f pour un échantillon de taille n, l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$, où a est le plus petit nombre entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et b le plus petit nombre entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

La fréquence f appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$ dans au moins 95 % des cas.

2 Règle de décision pour accepter ou non une hypothèse sur une proportion

Dans certaines situations, il y a doute sur la valeur p donnée de la proportion et il s'agit de décider si l'hypothèse « la proportion a pour valeur p » est acceptable ou non. Pour cela, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de n individus de la population.
f étant la fréquence des individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$ et, pour la valeur p, $\left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$ l'intervalle de fluctuation à 95 % correspondant :

> Lorsque $f \in \left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$ $\left(\text{respectivement } f \notin \left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]\right)$, on accepte (respectivement on rejette), au risque 5 %, l'hypothèse « la proportion a pour valeur p ».

Exercice résolu 6 — Comment déterminer, à l'aide d'un tableur, un intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence ?

Une publicité affirme que 80 % des personnes utilisant un certain produit ont des cheveux qui repoussent au cours du premier mois d'utilisation.
Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des utilisateurs dont des cheveux ont repoussé au cours du premier mois, pour un échantillon de taille 50.

SOLUTION

- Les paramètres de la loi binomiale sont $n = 50$ et $p = 80\ \% = 0{,}8$.
- On entre les valeurs 0, 1, …, 50 de la cellule A1 à la cellule A51.
- On entre la formule $\boxed{\text{=LOI.BINOMIALE(A1;50;0,8;VRAI)}}$ dans la cellule B1 et on fait glisser jusqu'à la cellule B51.
- $P(X \leqslant 33) \approx 0{,}0144$ et $P(X \leqslant 34) \approx 0{,}0308$,
donc le plus petit nombre entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est 34.
$P(X \leqslant 44) \approx 0{,}9520$ et $P(X \leqslant 45) \approx 0{,}9815$,
donc le plus petit nombre entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est 45.
Ainsi, $a = 34$ et $b = 45$.
- L'intervalle de fluctuation est donc $\left[\dfrac{34}{50} ; \dfrac{45}{50}\right] = [0{,}68 ; 0{,}90]$.

34	33	0,0144
35	34	0,0308
36	35	0,0607
37	36	0,1106
38	37	0,1861
39	38	0,2893
40	39	0,4164
41	40	0,5563
42	41	0,6927
43	42	0,8096
44	43	0,8966
45	44	0,9520
46	45	0,9815

> **MÉTHODE 6**
> **Pour déterminer, à l'aide d'un tableur, un intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence :**
> **1.** On repère les paramètres n et p de la loi binomiale concernée.
> **2.** On entre les nombres 0, 1, …, n de la cellule A1 à la cellule A(n+1).
> **3.** On entre la formule $\boxed{\text{=LOI.BINOMIALE(A1;}n\text{;}p\text{;VRAI)}}$ dans la cellule B1 et on fait glisser jusqu'à la cellule B(n+1).
> **4.** On lit dans la colonne B le plus petit nombre entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit nombre entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
> **5.** On conclut que l'intervalle de fluctuation est $\left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$.

Exercice résolu 7 — Comment exploiter un intervalle de fluctuation pour accepter ou non une hypothèse sur une proportion ?

On reprend l'énoncé de l'**exercice résolu 6**.
Sur les 50 utilisateurs d'un échantillon pris au hasard et avec remise, 35 déclarent que des cheveux ont repoussé au cours du premier mois d'utilisation. À partir de l'échantillon, peut-on accepter, au risque 5 %, l'affirmation de la publicité ?

SOLUTION

- La fréquence des utilisateurs de l'échantillon dont des cheveux ont repoussé au cours du premier mois est $f = \dfrac{35}{50} = 0{,}70$.
- L'intervalle de fluctuation est $\left[\dfrac{34}{50} ; \dfrac{45}{50}\right] = [0{,}68 ; 0{,}90]$.
- $0{,}70 \in [0{,}68 ; 0{,}90]$, donc on accepte, au risque 5 %, l'hypothèse « 80 % des utilisateurs du produit ont des cheveux qui repoussent au cours du premier mois », c'est-à-dire l'affirmation de la publicité.

> **MÉTHODE 7**
> **Pour exploiter un intervalle de fluctuation $\left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$ pour accepter ou non une hypothèse sur une proportion p :**
> **1.** On calcule, sur l'échantillon, la fréquence f correspondant à la particularité dont la proportion hypothétique dans la population est p.
> **2. a)** On accepte, au risque 5 %, l'hypothèse « la proportion a pour valeur p » lorsque $f \in \left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$.
> **b)** On rejette, au risque 5 %, l'hypothèse « la proportion a pour valeur p » lorsque $f \notin \left[\dfrac{a}{n} ; \dfrac{b}{n}\right]$.

Application

Application (VOIR EXERCICES RÉSOLUS 6 ET 7)

Un hypermarché affirme que 95 % des clients attendent moins de 5 minutes à la caisse.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des personnes qui ont attendu moins de 5 minutes à la caisse, pour un échantillon de taille 150.

2. On prélève un échantillon de 150 clients sortant de cet hypermarché.
122 des personnes de l'échantillon pris au hasard et avec remise, déclarent avoir attendu moins de 5 minutes.
À partir de cet échantillon, peut-on accepter, au risque 5 %, l'affirmation de l'hypermarché ?

→ VOIR EXERCICES 22 ET 23, P. 150

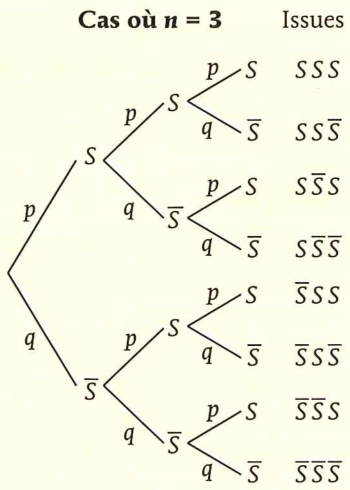
L'essentiel

Ce que je dois savoir

1 Schéma de Bernoulli

- Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui comporte deux issues, appelées succès (S) et échec ($\overline{S}$ ou E), de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.
- Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est l'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, dans des conditions **d'indépendance** (le résultat d'une épreuve n'a aucune influence sur les résultats des autres épreuves).

On représente un schéma de Bernoulli par un **arbre pondéré**.
La probabilité d'une issue est le produit des probabilités écrites sur les branches qui y mènent.



$P(S\overline{S}S) = pqp = p^2q = p^2(1 - p)$.

2 Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On note X la variable aléatoire qui a pour valeurs les nombres possibles de succès $0 ; 1 ; ... ; n$.

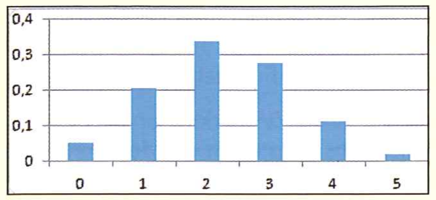
- Cette variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de **paramètres n et p**, notée $B(n ; p)$.

La probabilité que la valeur de X soit k (c'est-à-dire d'obtenir k succès) est notée $\boldsymbol{P(X = k)}$.
(On obtient les valeurs des probabilités $P(X = k)$ au tableur ou à la calculatrice.)

- On peut **représenter graphiquement la loi binomiale $B(n ; p)$** par un diagramme en bâtons :

on place en abscisse les valeurs k de la variable aléatoire X et en ordonnée les probabilités $P(X = k)$.

Exemple
La loi binomiale $B(5 ; 0{,}45)$ est représentée par le diagramme en bâtons ci-contre (obtenu au tableur).



- L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre $\boldsymbol{E(X) = np}$.

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant à la variable aléatoire X, la moyenne des nombres de succès obtenus est proche de $E(X)$.

L'essentiel

3 Échantillonnage

On considère une population dont une proportion p d'individus possèdent une certaine particularité $\mathcal{P}$.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de n individus de la population.
La variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles d'individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On désigne par f la fréquence des individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$.
On appelle **intervalle de fluctuation** à 95 % de la fréquence f, pour un échantillon de taille n, l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$, où a est le plus petit nombre entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et b le plus petit nombre entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
La fréquence f des individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$ appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ dans au moins 95 % des cas.

Ce que je dois savoir faire

SAVOIR-FAIRE	MÉTHODE	EXERCICES
• Vérifier qu'une situation correspond à un schéma de Bernoulli	**1** page 139	1 et 2, 8
• Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré		1 et 2, 9
• Simuler un schéma de Bernoulli, à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme	**2** page 139	3 à 8
• Vérifier qu'une situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale	**3** page 141	10 et 11, 15
• Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale	**4** page 141 **8** page 149	12 à 14
• Représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons	**5** page 143	16 à 19
• Calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.		20 et 21
• Déterminer, à l'aide d'un tableur, un intervalle de fluctuation, à 95 %, d'une fréquence et l'exploiter pour accepter ou non une hypothèse sur une proportion	**6** page 145 **7** page 145	22 et 23

Exercices

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Schéma de Bernoulli

1 C Un QCM est composé de quatre questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, cinq réponses sont proposées, dont une seule est exacte.
On répond au hasard à chaque question et on s'intéresse aux réponses exactes obtenues à la fin du QCM.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

2. a) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité d'obtenir quatre réponses exactes.

c) Calculer la probabilité que seule la réponse à la troisième question soit exacte.

CONSEIL
Voir exercice résolu 1 page 139.

2 On ouvre un livre à une page au hasard et on note si la première lettre écrite dans le texte est une voyelle.
On réalise trois fois cette opération, de façon indépendante, en refermant chaque fois le livre.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

2. a) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité d'obtenir trois fois une voyelle.

c) Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre une voyelle, une consonne puis une voyelle.

3 C ALGO L'algorithme suivant traduit une démarche pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$.

Début de l'algorithme
Pour i allant de 1 à 4 :
  prendre au hasard un nombre entier k égal à 0 ou à 1 ;
  si $k = 1$, afficher S ;
    sinon afficher E ;
  fin si.
Fin pour.
Fin de l'algorithme

1. a) Donner un exemple de situation courante correspondant à ce schéma, utilisant une pièce de monnaie.

b) Réaliser l'expérience aléatoire avec une pièce.

2. Que modifier dans l'algorithme précédent pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$?

4 ALGO L'algorithme suivant traduit une démarche pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$.

Début de l'algorithme
Pour i allant de 1 à 3 :
  prendre au hasard un nombre entier k compris entre 1 et 6 ;
  si $k = 6$, afficher S ;
    sinon afficher E ;
  fin si.
Fin pour.
Fin de l'algorithme

1. a) Donner un exemple de situation courante, utilisant un dé à jouer, correspondant à ce schéma.

b) Réaliser l'expérience avec un dé.

2. Que modifier dans l'algorithme précédent pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{1}{7}$?

5 ALGO L'algorithme suivant traduit une démarche pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et 0,37.

Début de l'algorithme
Pour i allant de 1 à 6 :
  prendre au hasard un nombre réel k dans l'intervalle [0 ; 1[;
  si $k < 0{,}37$, afficher S ;
    sinon afficher E ;
  fin si.
Fin pour.
Fin de l'algorithme

Mise en œuvre

1. Recopier le tableau suivant à compléter dans la question **2.**.

Rang	1	2	3	4	5	6
Nombre k						
Résultat						

2. a) Compléter la deuxième ligne du tableau par les valeurs décimales arrondies à 10^{-3} près de six nombres dans l'intervalle [0 ; 1[, obtenus successivement et au hasard à l'aide de la calculatrice. (*Voir rabats de couverture.*)

b) Compléter la troisième ligne du tableau en écrivant dans chaque case :
S si le nombre correspondant est strictement inférieur à 0,37,
E si le nombre est supérieur ou égal à 0,37.

6 C **1.** Simuler à l'aide d'un tableur le schéma de Bernoulli de paramètres 4 et 0,2 (il s'agit du schéma de l'**exercice 1**).

2. Afficher le nombre de succès S et le nombre d'échecs E.

3. Réaliser d'autres simulations de ce schéma (sur PC, taper F9, sur Mac, taper Cmd =).

CONSEIL
Voir exercice résolu 2, exemple, page 139.

7 **1.** Simuler à l'aide d'un tableur le schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $\frac{3}{13}$ (il s'agit du schéma de l'**exercice 2**).

2. Afficher le nombre de succès S et le nombre d'échecs E.

3. Réaliser d'autres simulations de ce schéma (sur PC, taper F9, sur Mac, taper Cmd =).

8 Un colloque international réunit 500 personnes, dont 80 ne parlent qu'une langue.
On prélève, au hasard et avec remise, les fiches de 20 participants et on note pour chacun s'il est unilingue.

1. Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

2. a) Simuler ce schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur.

b) Afficher le nombre de succès S et le nombre d'échecs E.

c) Réaliser d'autres simulations de ce schéma (sur PC, taper F9, sur Mac, taper Cmd =).

Loi binomiale : définition et probabilité

9 C On considère le schéma de Bernoulli de paramètres 4 et 0,6.

1. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

2. À l'aide de cet arbre, calculer les cinq probabilités $P(X = k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 4$, où X est la variable aléatoire qui a pour valeurs les nombres possibles de succès.

CONSEIL
Voir cours paragraphe 2 page 140.

10 C Pour chacun de ses tirs, un tireur à l'arc a huit chances sur dix d'atteindre la cible. Il effectue quinze tirs successifs, dont les résultats sont indépendants les uns des autres. On s'intéresse au nombre de fois où le tireur atteint la cible.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

CONSEIL
Voir exercice résolu 3 page 141.

11 Une urne contient dix boules, numérotées de 0 à 9. Camille prend 20 fois une boule au hasard et avec remise.
On s'intéresse au nombre de fois où Camille obtient une boule portant un numéro impair.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

12 **Exercice résolu 8**

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20\,;\frac{2}{7}\right)$.

Calculer, avec une calculatrice, la probabilité $P(X = 10)$ de l'événement $\{X = 10\}$ et la probabilité $P(X \leqslant 10)$ de l'événement $\{X \leqslant 10\}$.

MÉTHODE 8

Pour calculer, à l'aide d'une calculatrice, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :

1. On repère les paramètres n et p de la loi binomiale.
2. *Modèle CASIO GRAPH 35+ :*

MENU STAT EXE
pour obtenir $P(X = k)$, DIST BINM Bpd VAR
pour obtenir $P(X \leqslant k)$, DIST BINM Bcd VAR
x : k EXE
Numtrial : n EXE
p : p EXE
Sélectionner Execute
EXE

Modèle TI 82 Stats.fr :

distrib DISTRIB
pour obtenir $P(X = k)$, 10: binomFdp(entrer
pour obtenir $P(X \leqslant k)$, A: binomFRép(entrer
puis, sur la ligne binomFdp(
ou, sur la ligne binomFRép(
n , p , k) entrer

SOLUTION

On fait fonctionner le programme en remplaçant n par 20, p par $\frac{2}{7}$ et k par 10. On obtient
$P(X = 10) = 0{,}023\ 154\ \ldots$ et $P(X \leqslant 10) = 0{,}988\ 285\ \ldots$.

13 C Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 15 et 0,8 (il s'agit de la loi de l'**exercice 10**).
Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

a) la probabilité $P(X = 7)$ de l'événement $\{X = 7\}$;

b) la probabilité $P(X \leqslant 7)$ de l'événement $\{X \leqslant 7\}$.

CONSEIL
Voir exercices résolus 4 p. 141 et 8 ci-dessus.

14 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,5 (il s'agit de la loi de l'**exercice 11**).
Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

a) la probabilité $P(X = 10)$ de l'événement $\{X = 10\}$;

b) la probabilité $P(X \leqslant 10)$ de l'événement $\{X \leqslant 10\}$.

15 Fernand est tireur à un jeu de boules. La probabilité qu'il touche la boule visée lorsqu'il tire est 0,7.
Il s'entraine à tirer neuf fois de suite, les tirs successifs étant indépendants, et on s'intéresse au nombre de boules touchées lors de ces neuf tirs.
On note X la variable aléatoire correspondant à cette situation.

1. Vérifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres n et p.

2. Le tableau suivant donne les valeurs décimales arrondies à 10^{-5} près des probabilités $P(X = k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 9$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,000 02	0,000 41	0,003 86	0,021 00

k	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,073 51	0,171 53	0,266 83	0,266 83

k	8	9
$P(X = k)$	0,155 65	0,040 35

a) Calculer les probabilités $P(X < 2)$ de l'événement $\{X < 2\}$ et $P(X > 6)$ de l'événement $\{X > 6\}$.

b) Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « Moins de trois boules sont touchées » ;
B : « Au moins cinq boules sont touchées ».

CONSEIL
Voir cours paragraphe 2 page 140.

Loi binomiale : graphique ; espérance

16 C Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,68. Le tableau suivant donne les valeurs décimales arrondies à 10^{-3} près des probabilités $P(X = k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 4$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,010	0,089	0,284	0,402	0,214

Représenter graphiquement sur papier la loi binomiale $B(4 ; 0{,}68)$ par un diagramme en bâtons.

CONSEIL
Voir cours paragraphe 1 page 142.

17 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 9 et 0,7. Les valeurs décimales arrondies à 10^{-5} près des probabilités $P(X = k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant 9$ sont données dans l'**exercice 15**.
Représenter graphiquement la loi binomiale $B(9 ; 0{,}7)$ par un diagramme en bâtons.

18 C Représenter graphiquement la loi binomiale $B(15 ; 0{,}8)$, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

CONSEIL
Voir exercice résolu 5 page 143.

19 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 11 et 0,4.
Représenter graphiquement cette loi, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

20 C Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,53.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

CONSEIL
Utiliser l'égalité du cours paragraphe 2 page 142.

21 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 54 et 0,66.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Échantillonnage

22 C Un grossiste affirme que 98 % des boîtes de conserve affichées « 500 g » de petits pois qu'il vend ont un contenu d'au moins 500 grammes.

1. À partir de cette affirmation, déterminer à l'aide d'un tableur l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des boîtes de conserve de petits pois qui ont un contenu d'au moins 500 grammes, pour un échantillon de 60 boîtes prélevé au hasard et avec remise chez ce grossiste.

CONSEIL
Voir exercice résolu 6 page 145.

2. Parmi les 60 boîtes d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise, 55 ont un contenu d'au moins 500 grammes.
Peut-on accepter, au risque 5 %, l'affirmation du grossiste ?

CONSEIL
Voir exercice résolu 7 page 145.

23 Le maire d'une grande ville déclare que 60 % des habitants sont favorables à son action.

1. À partir de cette affirmation, déterminer à l'aide d'un tableur l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des habitants qui sont favorables à l'action du maire, pour un échantillon de 150 habitants prélevé au hasard et avec remise.

2. 80 habitants de la ville, sur les 150 d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise, ont déclaré être favorables au maire.
Peut-on accepter, au risque 5 %, la déclaration du maire ?

Je fais le point

SAVEZ-VOUS vérifier qu'une situation correspond à un schéma de Bernoulli ?

ÉNONCÉ 1

Une urne contient quinze boules rouges et cinq boules vertes.
On prend une boule au hasard et on gagne si on obtient une boule rouge. On effectue ainsi cinq tirages, en remettant chaque fois la boule obtenue dans l'urne avant le tirage suivant.
Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

→ *voir solution page 196*

ÉNONCÉ 2

Dans une salle sont rassemblées seize personnes, dont douze sont des femmes.
On tire au sort huit fois successivement une personne, avec remise. On s'intéresse au nombre de fois où la personne est une femme.
Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

→ *voir exercice résolu 1 page 139*

SAVEZ-VOUS simuler un schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur et afficher les nombres de succès et d'échecs ?

ÉNONCÉ 1

1. Simuler le schéma de Bernoulli de paramètres 5 et 0,75 à l'aide d'un tableur.

2. Afficher le nombre de succès S et le nombre d'échecs E.

→ *voir solution page 196*

ÉNONCÉ 2

1. Simuler le schéma de Bernoulli de paramètres 8 et 0,25 à l'aide d'un tableur.

2. Afficher le nombre de succès S et le nombre d'échecs E.

→ *voir exercice résolu 2 page 139*

SAVEZ-VOUS vérifier qu'une situation correspond à une variable aléatoire *X* qui suit une loi binomiale ?

ÉNONCÉ 1

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie non truquée et on note le nombre de PILE obtenu.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

→ *voir solution page 196*

ÉNONCÉ 2

Un dé est truqué de telle façon que la probabilité d'obtenir la face 1 est 0,55. On lance ce dé 10 fois de suite et on note le nombre de faces 1 obtenues.
Vérifier que cette situation correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

→ *voir exercice résolu 3 page 141*

SAVEZ-VOUS calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, les probabilités $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$, où *X* est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

ÉNONCÉ 1

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,5.
Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

a) la probabilité $P(X = 3)$ de l'événement $\{X = 3\}$;

b) la probabilité $P(X \leqslant 3)$ de l'événement $\{X \leqslant 3\}$.

→ *voir solution page 196*

ÉNONCÉ 2

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,55.
Calculer, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice :

a) la probabilité $P(X = 6)$ de l'événement $\{X = 6\}$;

b) la probabilité $P(X \leqslant 6)$ de l'événement $\{X \leqslant 6\}$.

→ *voir exercice résolu 4 page 141 et exercice résolu 8 page 149*

SAVEZ-VOUS représenter graphiquement, à l'aide d'un tableur, une loi binomiale par un diagramme en bâtons ?

ÉNONCÉ 1

Représenter graphiquement la loi binomiale $B(12 ; 0{,}14)$, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

→ *voir solution page 196*

ÉNONCÉ 2

Représenter graphiquement la loi binomiale $B(9 ; 0{,}54)$, à l'aide d'un tableur, par un diagramme en bâtons.

→ *voir exercice résolu 5 page 143*

SAVEZ-VOUS calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

ÉNONCÉ 1

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,2.

→ *voir solution page 196*

Je fais le point

ÉNONCÉ 2

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 125 et 0,6.

→ *voir exercice 20 page 150*

SAVEZ-VOUS déterminer, à l'aide d'un tableur, un intervalle de fluctuation, à 95 %, d'une fréquence et l'exploiter pour accepter ou non une hypothèse sur une proportion ?

ÉNONCÉ 1

Un centre de renseignements téléphoniques a fixé comme objectif que 90 % des clients doivent avoir un temps d'attente en ligne inférieur à 15 secondes.

1. Déterminer, à l'aide d'un tableur, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des personnes attendant moins de 15 secondes en ligne, pour un échantillon de 100 clients de ce centre prélevé au hasard et avec remise.

2. Sur les 100 personnes d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise, 80 déclarent avoir attendu moins de 15 secondes.

À partir de ce résultat, le centre de renseignements peut-il accepter, au risque 5 %, l'hypothèse que son objectif est atteint ?

→ *voir solution page 197*

ÉNONCÉ 2

Dans une région, on estime à 68 % la proportion des personnes qui sont locataires de leur logement.

1. Déterminer, à l'aide d'un tableur, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des personnes qui sont locataires de leur logement, pour un échantillon de 200 personnes de cette région prélevé au hasard et avec remise.

2. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 200 personnes de cette région ; 100 personnes de cet échantillon sont locataires de leur logement.

À partir de ce résultat, peut-on accepter, au risque 5 %, l'hypothèse que 68 % des gens de la région sont locataires de leur logement ?

→ *voir exercice résolu 6 et exercice résolu 7 page 145*

ACTIVITÉS GUIDÉES

24 AG1 **Situations de répétitions d'une épreuve de Bernoulli ne correspondant pas à un schéma de Bernoulli**

1. Une urne contient dix boules : neuf noires et une blanche. On tire une boule au hasard, on ne la remet pas dans l'urne, puis on tire une seconde boule au hasard (le tirage est dit « sans remise »).
On s'intéresse au nombre de boules de couleur noire obtenues.
Expliquer pourquoi les deux épreuves ne sont pas indépendantes. La situation décrite correspond-elle à un schéma de Bernoulli ?

2. Le basketteur José effectue des séries de 5 lancers francs :
la probabilité qu'il réussisse le panier au premier lancer est 0,8 ;
ensuite, cette probabilité est 0,8 s'il a réussi le lancer précédent, mais 0,5 s'il a échoué.
On s'intéresse aux lancers réussis.
Les épreuves sont-elles indépendantes ? La situation décrite correspond-elle à un schéma de Bernoulli ?

25 AG2 **Variable aléatoire, définie à partir d'un schéma de Bernoulli, qui ne suit pas une loi binomiale**

Une urne contient quatre boules rouges et une blanche.
On tire 3 fois successivement une boule au hasard avec remise et on note à chaque tirage si la couleur de la boule obtenue est blanche ou non.

1. a) Vérifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli.

b) Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

c) Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : « ne pas obtenir de boule blanche » ;
B : « obtenir la boule blanche au 1er tirage » ;
C : « obtenir la boule blanche au 2^{e} tirage sans l'avoir obtenue au 1er » ;
D : « obtenir la boule blanche au 3^{e} tirage sans l'avoir obtenue aux tirages précédents ».

2. On note X la variable aléatoire qui a pour valeurs les rangs possibles (1, 2 ou 3) du tirage où l'on obtient pour la première fois la boule blanche.
Par exemple, $X = 2$ signifie que l'on a obtenu la boule blanche pour la première fois au 2^{e} tirage.
Par convention, $X = 0$ signifie que l'on n'obtient pas la boule blanche.
Expliquer pourquoi la variable aléatoire X ne suit pas une loi binomiale.

26 AG3 **Situations assimilées à un schéma de Bernoulli alors que le tirage se fait sans remise**

Une urne contient 1 000 boules dont 100 sont rouges.
On tire successivement et au hasard deux boules sans remise (c'est-à-dire sans remettre la première dans l'urne avant le tirage de la deuxième).

1. Calculer la probabilité p d'obtenir une boule rouge au premier tirage.

2. On suppose que la première boule tirée est rouge.

a) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage est $\frac{99}{999}$.

b) Vérifier que ce résultat est à peu près égal à p.

3. On suppose que la première boule tirée n'est pas rouge.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage.

b) Vérifier que ce résultat est à peu près égal à p.

Conclusion :
lorsque l'effectif total est grand vis-à-vis du nombre de tirages, on considère que la probabilité de succès est constante ; on assimile ainsi les tirages sans remise à des tirages avec remise, donc la situation à un schéma de Bernoulli.

27 AG4 **Simulation : espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale**

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 15 et 0,2.
L'objectif est de constater, à l'aide d'une simulation, que si on répète un grand nombre de fois (ici 10 000) le schéma de Bernoulli de paramètres 15 et 0,2, la moyenne des nombres de succès obtenus est proche de l'espérance $E(X)$ de X.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

2. a) Simuler sur tableur, de la cellule A1 à la cellule O1, le schéma de Bernoulli de paramètres 15 et 0,2, puis saisir dans la cellule P1 la formule donnant le nombre de succès de ce schéma. (Voir **exercice résolu 2**, page 139.)

b) Sélectionner la plage A1:P1 et recopier jusqu'à la ligne 10000.

c) Entrer dans la cellule P10001 la formule `=MOYENNE(P1:P10000)`.

d) La moyenne des nombres de succès obtenus est-elle proche de l'espérance $E(X)$ de X ?

3. Réaliser d'autres simulations (sur PC, taper `F9`, sur Mac, taper `Cmd` `=`).

28 ALGO AG5 **Fréquence f des individus d'un échantillon qui possèdent une particularité $\mathcal{P}$ et intervalle de fluctuation correspondant**

Il s'agit de mettre en œuvre sur tableur un algorithme pour observer que la fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation correspondant dans au moins 95 % des cas.
On considère une population dont 65 % des individus possèdent une certaine particularité $\mathcal{P}$.
On prélève au hasard et avec remise dans la population un échantillon de 50 individus.
On rappelle que la variable aléatoire X, qui a pour valeurs les nombres possibles d'individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$, suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,65.

On pourra vérifier que [0,52 ; 0,78] est l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$.
On veut, à partir de l'algorithme suivant, simuler le prélèvement de 500 échantillons de 50 individus et vérifier que la fréquence des individus de l'échantillon qui possèdent la particularité $\mathcal{P}$ appartient à cet intervalle de fluctuation pour au moins 95 % des échantillons.

```
Début de l'algorithme
  • Saisir les valeurs k, de 0 à 50, prises par la
    variable aléatoire X.
  • Pour i allant de 1 à 500 :
      simuler le prélèvement d'un échantillon
      de 50 individus ;
      calculer la fréquence f des individus de cet
      échantillon qui possèdent la particularité 𝒫 ;
        si f appartient à [0,52 ; 0,78], afficher 1 ;
        sinon afficher 0 ;
        fin si.
  Fin pour.
  • Calculer la proportion des échantillons pour les-
    quels la fréquence f appartient à [0,52 ; 0,78] ;
    afficher cette proportion.
Fin de l'algorithme
```

Mise en œuvre sur tableur

1. a) Simuler sur tableur, de la cellule A1 à la cellule AX1, le prélèvement d'un échantillon de 50 individus. (Voir **exercice résolu 2**, page 139.)

b) Pour calculer la fréquence f des succès de cet échantillon, saisir dans la cellule AY1 la formule `=NB.SI(A1:AX1;"S")/50`.

c) Pour afficher 1 si la fréquence f appartient à [0,52 ; 0,78] et afficher 0 sinon, saisir dans la cellule AZ1 la formule `=SI(ET(0,52<=AY1;AY1<=0,78);1;0)`.

2. Pour obtenir la simulation de 499 autres échantillons, sélectionner la plage A1:AZ1 et faire glisser la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule AZ500.

3. a) Pour obtenir la proportion des échantillons pour lesquels la fréquence f des succès appartient à [0,52 ; 0,78], saisir dans la cellule BA2 la formule `=NB.SI(AZ1:AZ500;1)/500`.

b) Cette proportion est-elle effectivement supérieure ou égale à 95 % ?

4. Effectuer d'autres essais (sur PC, taper `F9`, sur Mac, taper `Cmd` `=`).

29 ALGO AG6 **Mise en œuvre sur tableur d'un algorithme pour déterminer un intervalle de fluctuation**

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 13 et 0,37.
On veut, à partir de l'algorithme suivant, obtenir l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{13} ; \frac{b}{13}\right]$ correspondant à un échantillon de taille 13.

Début de l'algorithme

- Saisir les valeurs k prises par la variable aléatoire X.
- Calculer et afficher les probabilités $P(X \leqslant k)$.
- Pour k allant de 0 à 13 :
  - si $P(X \leqslant k) > 0{,}025$, afficher k ;
  - sinon afficher " " ;
  - fin si.

  Fin pour.
- Déterminer la valeur minimum a des nombres k tels que $P(X \leqslant k) > 0{,}025$; afficher a.
- Pour k allant de 0 à 13 :
  - si $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}975$, afficher k ;
  - sinon afficher " " ;
  - fin si.

  Fin pour.
- Déterminer la valeur minimum b des nombres k tels que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}975$; afficher b.
- Calculer $\frac{a}{13}$ et $\frac{b}{13}$; afficher $\left[\frac{a}{13} ; \frac{b}{13}\right]$.

Fin de l'algorithme

Mise en œuvre sur tableur

1. Reproduire avec un tableur la feuille de calcul suivante. (Voir **méthode 6** (début) page 145.)

	A	B
1	k	$P(X<=k)$
2	0	0,00246279
3	1	0,02126598
4	2	0,08752487
5	3	0,23020933
6	4	0,43970637
7	5	0,66117466
8	6	0,83459957
9	7	0,9364523
10	8	0,981316
11	9	0,99595406
12	10	0,99939285
13	11	0,99994365
14	12	0,99999756
15	13	1

2. a) Pour déterminer les valeurs de k telles que $P(X \leqslant k) > 0{,}025$, saisir dans la cellule C2 la formule `=SI(B2>0,025;A2;"")` et la recopier vers le bas jusqu'à la cellule C15.

b) Pour déterminer la valeur minimum a des nombres k tels que $P(X \leqslant k) > 0{,}025$, saisir dans la cellule C16 la formule `=MIN(C2:C15)`.

3. a) Déterminer et afficher dans la colonne D les valeurs de k telles que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}975$.

b) Déterminer et afficher dans la cellule D16 la valeur minimum b des nombres k tels que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}975$.

4. a) Calculer et afficher dans la cellule C17 le nombre $\frac{a}{13}$.

b) Calculer et afficher dans la cellule D17 le nombre $\frac{b}{13}$.

c) Conclure en donnant l'intervalle de fluctuation.

30 AG7 Influence de la taille d'un échantillon sur l'acceptation ou non d'une hypothèse sur une proportion

Un commerçant pense que 75 % de ses clients règlent leurs achats par carte.

Il veut vérifier cette hypothèse en prélevant au hasard un échantillon de n clients d'une semaine. On admet que le nombre de clients de la semaine est suffisamment élevé pour que le prélèvement soit assimilé à un prélèvement de n clients avec remise. (Voir **AG3**, p. 152)

1. On suppose que $n = 25$.

a) Déterminer, à l'aide d'un tableur, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des clients qui règlent leurs achats par carte.

b) Le commerçant constate que 60 % des clients de l'échantillon règlent leurs achats par carte.

Peut-il accepter son hypothèse, au risque 5 % ?

2. Répondre aux questions **1. a)** et **1. b)** précédentes dans le cas où $n = 100$.

3. La taille de l'échantillon a-t-elle une influence sur l'acceptation ou non d'une hypothèse sur une proportion ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Si A et B sont des événements contraires, alors $P(A) + P(B) = 1$.

La condition « A et B sont des événements contraires » est une **condition suffisante** (il suffit de la vérifier) pour que $P(A) + P(B) = 1$.

(*Voir Lexique p. 209.*)

31 AG8 Utilisation de l'événement contraire

Les probabilités seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

Une urne contient 50 boules, dont seulement 4 sont blanches.

On prend successivement, au hasard et avec remise, 20 boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire qui a pour valeurs les nombres possibles de boules blanches obtenues à la fin des 20 tirages.

1. Vérifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

2. a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer la probabilité $P(X \leqslant 5)$ de l'événement I : « obtenir 5 boules blanches ou moins ».

b) Définir par une phrase l'événement contraire de I.

c) En déduire la probabilité $P(X > 5)$ d'obtenir plus de 5 boules blanches.

3. a) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ de l'événement Z : « n'obtenir aucune boule blanche ».

b) Justifier que l'événement contraire de Z est $\overline{Z}$: « obtenir au moins une boule blanche ».

c) En déduire la probabilité $P(X \geqslant 1)$ de l'événement $\overline{Z}$.

*, **, *** : niveau de difficulté des problèmes. C : exercice corrigé, page 180

32 ALGO AG9 Simulation d'un schéma de Bernoulli

1. L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche pour simuler le schéma de Bernoulli de paramètres 7 et 0,725.

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 7
    DEBUT_POUR
    k PREND_LA_VALEUR random(k)
    SI (k< 0.725) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "S ; "
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "E ; "
        FIN_SINON
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

a) Recopier l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »).

b) Utiliser cet algorithme pour simuler trois fois successivement le schéma de Bernoulli de paramètres 7 et 0,725 (utiliser « Tester Algorithme », puis « Lancer Algorithme »).

2. Que modifier dans l'algorithme précédent pour simuler un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et 0,45 ?

PROBLÈMES

33 *

Une urne contient 20 boules dont 7 sont jaunes. On tire 8 fois successivement une boule de l'urne, au hasard et avec remise.

1. Vérifier que la variable aléatoire X, qui a pour valeurs les nombres possibles de boules jaunes obtenues, suit une loi binomiale.

2. a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) Interpréter le résultat.

34 ** QCM

Une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres 7 et 0,05.

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte. Indiquer laquelle (les réponses proposées peuvent être des valeurs approchées).

1. La probabilité $P(X = 4)$ est :
a) 0,2 ; **b)** 0,02 ; **c)** 0,000 2.

2. La probabilité $P(X \leqslant 2)$ est :
a) 0,996 ; **b)** 0,041 ; **c)** 0,959.

3. La probabilité $P(X < 2)$ est :
a) 0,996 2 ; **b)** 0,955 6 ; **c)** 0,040 6.

4. L'espérance de X est :
a) 0,35 ; **b)** 3,5 ; **c)** 7.

35 **

On considère un troupeau d'animaux dont on sait que 10 % sont atteints d'une maladie M.

On prélève au hasard et avec remise trois animaux de ce troupeau.

On note X la variable aléatoire qui a pour valeurs les nombres possibles d'animaux qui sont atteints de la maladie M parmi les trois prélevés.

1. a) Vérifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. a) Calculer, à l'aide de l'arbre pondéré, les probabilités $P(X = k)$ pour les valeurs entières k de 0 à 3.

b) Calculer la probabilité qu'au moins un des trois animaux soit atteint par la maladie M.

36 ***

Les probabilités seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-6} près.

Bernard est un adepte du ball-trap (tir au fusil sur des disques de terre projetés en l'air).

Il tire successivement sur dix disques (les résultats des dix tirs sont indépendants les uns des autres).

Pour chaque tir, la probabilité que Bernard atteigne le disque est égale à 0,6.

1. On note X la variable aléatoire qui a pour valeurs les nombres possibles de disques atteints par Bernard lors des dix tirs.

a) Vérifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

b) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ que Bernard n'atteigne aucun des dix disques.

c) En déduire la probabilité que Bernard atteigne au moins un des dix disques (voir **AG8**, question **3.** p. 154).

d) Le fils de Bernard dit que son père atteint toujours au moins un disque sur les dix. A-t-il tort ?

2. Calculer la probabilité que ce soit seulement au dixième tir que Bernard atteigne le disque pour la première fois.

37 ***

« 90 % de nos clients sont satisfaits ! » lit-on sur un prospectus d'une agence de voyages.

1. Dans cette question, on admet que l'affirmation de l'agence est exacte.

On prélève au hasard et avec remise 100 clients de l'agence.

a) Vérifier que la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de clients satisfaits suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

b) À l'aide d'un tableur, calculer la probabilité que, parmi les 100, le nombre de clients satisfaits soit inférieur ou égal à 90.

c) En déduire la probabilité que, parmi les 100, le nombre de clients satisfaits soit strictement supérieur à 90 (voir **AG8**, question **2.** page 154).

2. a) À partir de l'affirmation initiale de l'agence, déterminer à l'aide du tableur l'intervalle de fluctuation à

95 % de la fréquence des clients satisfaits, pour un échantillon de taille 100.

b) 84 % des clients d'un échantillon de taille 100, prélevé au hasard et avec remise, se déclarent satisfaits des prestations de l'agence.
L'annonce publicitaire de l'agence peut-elle être acceptée, au risque 5 % ?

c) Une erreur a été commise dans les résultats de l'enquête ; seulement 83 % des clients de l'échantillon se sont déclarés satisfaits des prestations de l'agence.
L'annonce publicitaire de l'agence peut-elle être acceptée, au risque 5 % ?

38 ** Une entreprise de montage d'ordinateurs tolère que 2 % des écrans qui lui sont livrés arrivent détériorés.
Lors de chaque livraison, elle prélève et contrôle un lot de 150 écrans (le nombre d'écrans est suffisamment élevé pour que l'on puisse considérer que ce prélèvement a été fait au hasard et avec remise).
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 150 écrans, associe le nombre d'écrans détériorés.

1. Vérifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

2. À partir des 2 % tolérés, déterminer à l'aide du tableur l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des écrans détériorés, pour un échantillon de taille 150.

3. Lors d'une livraison, on constate que sur les 150 écrans du lot prélevé, 5 sont détériorés.
L'entreprise est-elle en droit, au risque 5 %, de se plaindre auprès de la société de livraison ?

39 *** Dans une ville, la commission « parité hommes-femmes », renouvelée tous les trois ans, est composée de 20 citoyens tirés au sort dans la population. La population est suffisamment élevée pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un prélèvement avec remise.
On admet qu'il y a dans cette ville autant d'hommes que de femmes.

1. Vérifier que la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de femmes de la commission, suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,5.

2. Déterminer, à l'aide d'un tableur, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des femmes dans la commission.

3. Lors du dernier renouvellement, 6 femmes et 14 hommes ont été tirés au sort.
Une association féministe s'est indignée qu'il n'y ait que 6 femmes, dénonçant des tricheries dans le tirage au sort.
Cette dénonciation est-elle légitime, au risque 5 % ?

40 *** Arno déclare à Léa : « cette pièce de monnaie n'est pas équilibrée : je l'ai lancée 500 fois et j'ai obtenu 273 fois pile, ce qui correspond à une fréquence de 0,546 ».
Léa, élève en 1re STMG, se dit :
« Je suppose que la pièce est équilibrée.
La situation correspond à un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X qui a pour valeurs les nombres possibles de pile obtenus suit la loi binomiale de paramètres 500 et 0,5. »
Elle obtient, à l'aide du tableur, le tableau dont voici des extraits.

	A	B
1	k	$P(X<=k)$
2	0	3,0549E-151
3	1	1,5305E-148
4	2	3,8263E-146

226	224	0,011233102
227	225	0,01416308
228	226	0,017728319
229	227	0,022031735
230	228	0,027184509
231	229	0,033304835
232	230	0,040516175
233	231	0,048945014
234	232	0,058718108
235	233	0,069959263

269	267	0,941281892
270	268	0,951054986
271	269	0,959483825
272	270	0,966695165
273	271	0,972815491
274	272	0,977968265
275	273	0,982271681
276	274	0,98583692
277	275	0,988766898
278	276	0,991155466

On admet que le raisonnement et le tableau de Léa sont exacts (il n'est pas interdit de les vérifier).

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des piles pour un échantillon de taille 500.

2. Laquelle de ces deux phrases Léa va-t-elle dire à Arno ?

a) « tu as raison, la pièce n'est pas équilibrée, au risque 5 % » ;

b) « tu as tort, la pièce est équilibrée, au risque 5 % ».

Tableur sur papier

Énoncé

Alou doit déterminer un intervalle de fluctuation.
Le tableau suivant est une copie de son travail, non terminé.
Les notations utilisées sont celles du cours.

	A	B	C	D	E
1	k	$P(X<=k)$	détermination de a	détermination de b	
2	0	4,1943E-05			a=
3	1	0,000734003			b=
4	2	0,005924454			$[a/n;b/n]$=
5	3	0,029281485	3		
6	4	0,099352576	4		
7	5	0,246501868	5		
8	6	0,467225805	6		
9	7	0,703715738	7		
10	8	0,881083187	8		
11	9	0,969766912	9		
12	10	0,996372029	10	10	
13	11	1	11	11	

QCM

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer laquelle.

1. La taille de l'échantillon associé à l'intervalle de fluctuation que doit déterminer Alou est :
a) 13 ; **b)** 11 ; **c)** 1 ; **d)** 20.

2. Parmi les nombres suivants, celui qui est le plus proche de $P(X \leqslant 0)$ est :
a) 0,419 ; **b)** 0,000 41 ; **c)** 0,000 04 ; **d)** – 4,194 305.

3. La formule saisie par Alou dans la cellule B2 est :
a) =LOI.BINOMIALE(0;11;0,6;VRAI) ; **b)** =LOI.BINOMIALE(A1;11;0,6;VRAI) ;
c) =LOI.BINOMIALE(A2;11;0,6;VRAI) ; **d)** =LOI.BINOMIALE(*k*;11;0,6;VRAI).

4. La formule saisie par Alou dans la cellule C2 est :
a) =SI(B2>0,975;A2;"") ; **b)** =SI(B2>0,025;A2;"") ;
c) =SI(B2<0,025;A2;"") ; **d)** =SI(B2>0,025;"A2";"").

5. La valeur de a est :
a) 2 ; **b)** 3 ; **c)** 5 ; **d)** 10.

6. La valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de $\frac{b}{n}$ est :
a) 0,91 ; **b)** 0,90 ; **c)** 0,27 ; **d)** 1.

7. L'intervalle de fluctuation (extrémités arrondies à 10^{-2} près) qu'Alou doit déterminer est :
a) [0,90 ; 0,91] ; **b)** [0,27 ; 0,91] ; **c)** [0,27 ; 0,90] ; **d)** [0,3 ; 1].