Chapitre 2 : Polynômes du second degré

I. Fonction polynôme de degré 2

1) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une

expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Vocabulaire : L'image de 0 par une fonction est appelée « ordonnée à l'origine ».

Pour une fonction du second degré on a :

f(0) = a x 0² + bx0 + c = c

Dans une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, le nombre *c* est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

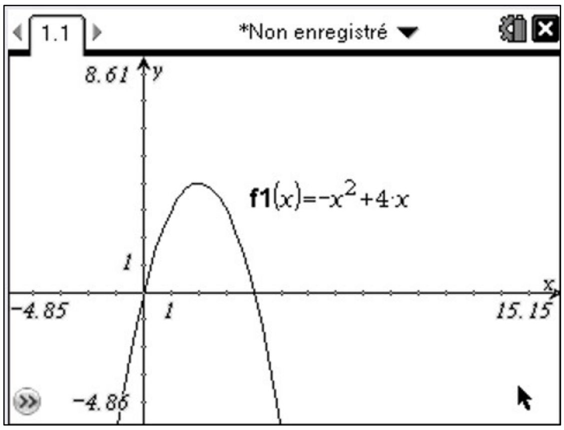
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = 3 ; b= -7 et c = 3.
- $g(x) = x^2 + 5x - 4$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = 1 ; b= 5 et c = -4.
- $h(x) = -x^2 + x$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = -1 ; b= 1 et c = 0.
- $k(x) = 4 - 2x^2$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = -2 ; b= 0 et c = 4.

  En effet, en remettant dans l'ordre habituel les termes, on peut écrire $k(x) = -2x^2 + 4$

2) Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

Exemple : représentation graphique de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -x^2 + 4x$



La parabole est ici « tournée vers le bas ».

Astuce !

Smiley content

a > 0 ☺

Smiley pas content

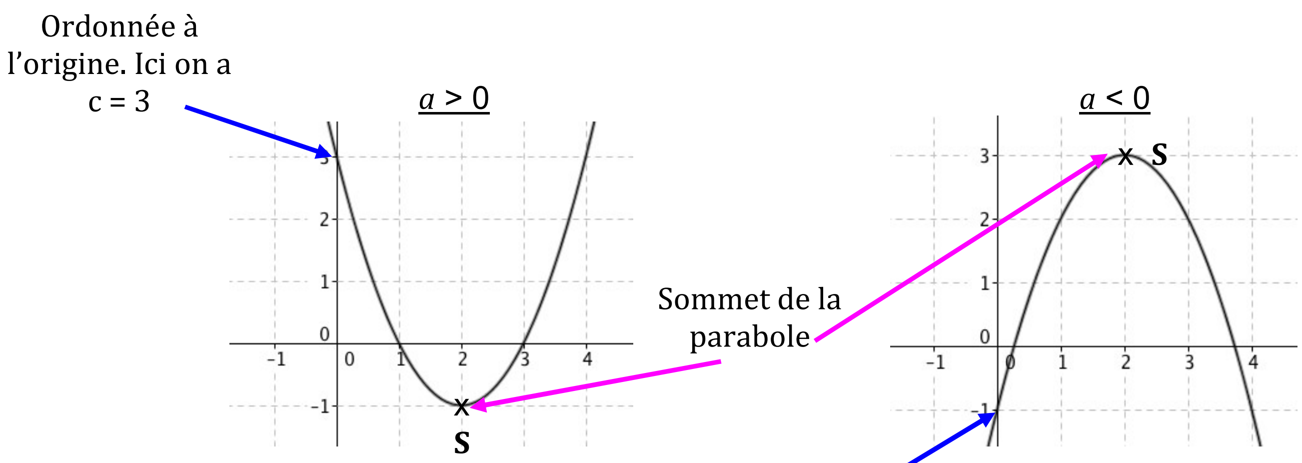
a < 0 ☹

Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut : « *cuvette* ».
  f est d'abord décroissante, puis croissante

- Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas : « *colline* ».
  f est d'abord croissante, puis décroissante



*** smiley content ***
La fonction admet un minimum

*** smiley pas content ***
La fonction admet un maximum

Ordonnée à l'origine. Ici on a c = -1

3) Coordonnées du sommet - tableau de variation

a) coordonnées du sommet

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a $\neq$ 0.

Le sommet de la parabole représentative de f dans un repère orthogonal a pour coordonnées :

$S(x_S ; y_S)$ avec $x_S = -\dfrac{b}{2a}$

$y_S = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Remarque : les coordonnées du sommet sont souvent notées $S(\alpha;\beta)$

Exemple : $f(x) = -2x^2 + 7x + 4$

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec :

a = – 2 b = 7 c = 4

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$ avec :

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7}{2\text{x}(-2)} = \dfrac{7}{4}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{7}{4}\right)$

$$\beta = -2\text{x}\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7\text{x}\left(\frac{7}{4}\right) + 4$$
$$= -2\text{x}\left(\frac{49}{16}\right) + \frac{49}{4} + \frac{4}{1}$$
$$= -\frac{49}{8} + \frac{98}{8} + \frac{32}{8}$$
$$= \frac{-49 + 98 + 32}{8} = \frac{81}{8}$$

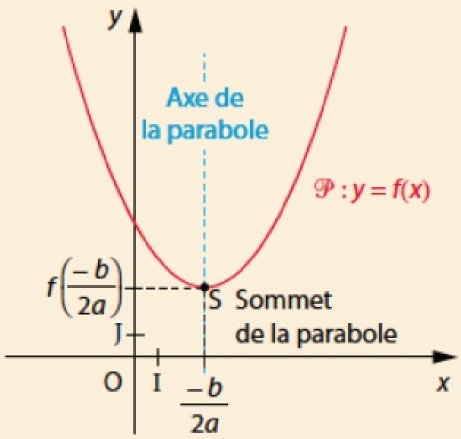
Le sommet de la parabole a pour coordonnées

$$S\left(\frac{7}{4};\frac{81}{8}\right)$$

b) tableau de variations

Si $a > 0$

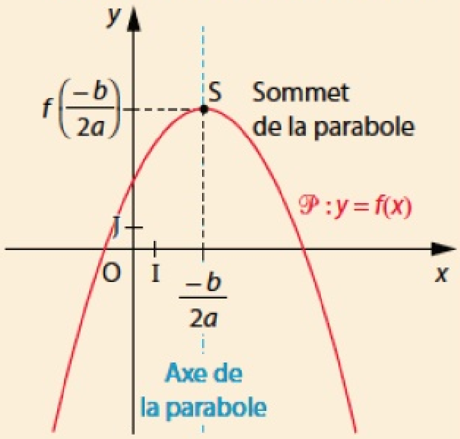
$\mathscr{P}$ est « orientée vers le haut »



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$+\infty$ ↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗ $+\infty$

Si $a < 0$

$\mathscr{P}$ est « orientée vers le bas »



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$ ↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘ $-\infty$