17 À l'occasion d'une journée « portes ouvertes », un club de ski proposait une initiation au ski de fond ou bien une initiation à la marche à raquettes : il était impossible de participer aux deux initiations. Le bilan fait apparaître ~~que 35 % des visiteurs se sont initiés au ski de fond~~ ~~et 50 % se sont initiés à la marche à raquettes~~.
Calculer ~~la proportion des visiteurs qui se sont initiés au ski de fond ou à la marche à raquettes~~.

union

Populations disjointes

Soit E la population des visiteurs
Soit F la sous-population des personnes pratiquant le ski de fond
Soit R la sous-population des visiteurs pratiquant la raquette.

$F \cap R = \emptyset$ donc $P_{F\cap R} = 0$

$P_F = 35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$

$P_R = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Déterminons

$P_{F\cup R} = P_F + P_R - P_{F\cap R}$
$= 0{,}35 + 0{,}50 - 0$
$= 0.85$

19 A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,14, 0,09 et 0,16.
Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour vérifier que deux sous-populations A et B ne sont pas disjointes, il suffit de vérifier que $p_{A\cup B} \neq p_A + p_B$.
En effet, la proposition « Si A et B sont disjointes, alors $p_{A\cup B} = p_A + p_B$ » équivaut à sa **contraposée**
« Si $p_{A\cup B} \neq p_A + p_B$, alors A et B ne sont pas disjointes ».
→ *Voir Lexique p. 209.*

16 C Au cours de l'assemblée générale du foyer socio-éducatif d'un lycée, les membres sont appelés à voter à bulletins secrets le rapport moral et le rapport financier présentés par le bureau.
Le dépouillement a permis d'établir que :
- 64,8 % des membres ont voté en faveur du rapport moral ;
- 79,3 % ont voté en faveur du rapport financier ;
- de plus, 62,8 % ont voté en faveur des deux rapports.

Calculer la proportion des membres ayant voté en faveur du rapport moral ou en faveur du rapport financier.

CONSEIL
Voir exercice résolu 3 page 31.

E : population des membres du foyer socio éducatif

A : sous-population des membres ayant voté en faveur du rapport moral.

p_A : proportion de A dans E $p_A = 64,8\%$

B : sous-population des membres ayant voté en faveur du rapport financier.

p_B : proportion de B dans E $p_B = 79,3\%$

$A \cap B$: sous-population des membres ayant voté pour les 2 rapports $p_{A\cap B} = 62,8\%$

$A \cup B$: sous-population des membres ayant voté pour au moins un des deux rapports $p_{A\cup B} = ?$

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} = 64,8\% + 79,3\% - 62,8\% = 81,3\%$

La proportion de membres ayant voté pour le rapport moral ou le rapport financier est de 81,3%

18 C A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,42, 0,23 et 0,65.
Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

CONSEIL
Calculer $p_{A\cap B}$ à partir de l'égalité $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$, puis en déduire $n_{A\cap B}$.

$p_A = 0,42$ $p_B = 0,23$ $p_{A\cup B} = 0,65$

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$

$0,65 = \underbrace{0,42 + 0,23} - p_{A\cap B}$

$0,65 = 0,65 - p_{A\cup B}$ donc $p_{A\cap B} = 0$ on en déduit que $A \cap B = \emptyset$: A et B sont disjointes

19 A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,14, 0,09 et 0,16.
Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour vérifier que deux sous-populations A et B ne sont pas disjointes, il suffit de vérifier que $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$.
En effet, la proposition « Si A et B sont disjointes, alors $p_{A \cup B} = p_A + p_B$ » équivaut à sa **contraposée** « Si $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$, alors A et B ne sont pas disjointes ».
→ *Voir Lexique p. 209.*

$$p_{A\cup B} = \underbrace{p_A + p_B} - p_{A\cap B}$$

si $p_{A\cup B} = p_A + p_B$ cela veut dire que $p_{A\cap B} = 0$ et donc que $A \cap B = \emptyset$: A et B sont disjointes

D'une part :

$p_A + p_B = 0{,}14 + 0{,}09$
$= 0{,}23$

D'autre part :

$p_{A\cup B} = 0{,}16$

$p_{A\cup B} \neq p_A + p_B$ donc A et B ne sont pas disjointes

$p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}$
$= 0{,}23 - 0{,}16 = 0{,}07$

20 Dans un congrès international, 87 % des participants comprennent l'anglais ou le français. En particulier, 82 % des participants comprennent l'anglais et 72 % des participants comprennent le français.
Calculer la proportion des participants qui comprennent l'anglais et le français.

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$
$0{,}87 = 0{,}82 + 0{,}72 - p_{A\cap B}$
$0{,}87 = 1{,}54 \quad - p_{A\cap B}$
$+ p_{A\cap B} = 1{,}54 - 0{,}87 = 0{,}67$

$p_{A\cap B} = 0{,}67$

E : population des participants
A : sous-population des participants comprenant l'anglais $p_A = 0{,}82$
B : sous-population des participants comprenant le français $p_B = 0{,}72$
$A \cap B$: sous population des participants qui comprennent l'anglais et le français $p_{A\cap B} = ?$
$A \cup B$: sous-population des participants qui comprennent l'anglais ou le français. $p_{A\cup B} = 0{,}87$

Remarque : on a aussi $\boxed{p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}}$

21 Un examen est composé d'une épreuve pratique et d'une épreuve théorique. Pour réussir l'examen, il faut réussir chacune des deux épreuves.

Cette année, la proportion de candidats ayant réussi l'épreuve pratique est égale à 0,9, la proportion de candidats ayant réussi l'épreuve théorique est égale à 0,8 et la proportion de candidats ayant réussi au moins une épreuve est égale à 0,95. Calculer la proportion de candidats ayant réussi l'examen.

CONSEIL

Noter A la population des candidats ayant réussi l'épreuve pratique, noter B la population des candidats ayant réussi l'épreuve théorique, puis définir $A \cap B$ et $A \cup B$.

E : population des candidats à l'examen

A : sous-population des candidats qui réussissent l'épreuve pratique

$p_A = 0,9$

B : sous-population des candidats qui réussissent l'épreuve théorique

$p_B = 0,8$

$A \cup B$: sous-population des candidats ayant réussi au moins une épreuve $p_{A \cup B} = 0,95$

$A \cap B$: sous-population des candidats ayant réussi l'examen (les 2 épreuves) $p_{A \cap B} = ?$

D'après les exercices précédents, on a mis en évidence que :

$$p_{A \cap B} = p_A + p_B - p_{A \cup B}$$
$$= 0,9 + 0,8 - 0,95$$
$$\simeq 0,75$$