Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A Vrai ou faux ? — Reconnaître une variation absolue ou relative

Voir AP page 31

La conclusion donnée est-elle vraie ou fausse ?

a. En 2010, 60 600 ingénieurs ont été recrutés en France, contre 48 400 en 2009.
Donc la progression est d'environ 25 % .

b. Lu en 2011 dans un article : « La Grèce s'engage à supprimer 150 000 fonctionnaires d'ici 2014, soit 20 % du total. » Donc le nombre de fonctionnaires sera de 600 000 en 2014.

c. Le chiffre d'affaires des 500 plus grosses entreprises chinoises a augmenté de 31,6 % en 2010, par rapport à l'année précédente, pour atteindre $4\,005 \times 10^9$ euros.
Donc le chiffre d'affaires en 2009 était de 2 739 millions d'euros.

B QCM — Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

Voir AP page 31

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1 La consommation annuelle de fromage d'Hélène était de 15,3 kg en 1980, puis de 16,7 kg en 1990, pour passer à 18,1 kg en 2000. On suppose que l'évolution reste la même. Sa consommation peut être modélisée par une suite :

a. arithmétique. **b.** géométrique. **c.** ni l'une, ni l'autre.

2 Sa consommation annuelle de sucre était de 10 kg en 1990, puis 8 kg en 2000, pour atteindre 6,4 kg en 2010. Si l'évolution reste la même, on peut la modéliser par une suite :

a. arithmétique. **b.** géométrique. **c.** ni l'une, ni l'autre.

3 L'INED estime que la population de l'Asie, de 4,2 milliards en 2010, va augmenter de 11 habitants pour mille par an d'ici 2040. Cette population, en million, peut être modélisée par une suite :

a. arithmétique de raison 11. **b.** géométrique de raison 1,011 . **c.** arithmétique de raison 46,2 .

C QCM — Établir une relation de récurrence

Voir AP page 32

Indiquer la seule bonne réponse.

Nath possède un compte épargne initial de 1 000 €. Chaque mois, il prélève 120 € et sa grand-mère verse 10 % du montant de son compte après son prélèvement.
On note u_n le montant de son compte, en euro, le n-ième mois après le dépôt.

a. $u_{n+1} = u_n - 120 + 0{,}1$. **b.** $u_{n+1} = u_n - 120 + 0{,}1\,u_n$. **c.** $u_{n+1} = (u_n - 120) \times 1{,}1$.

D QCM — Interpréter un algorithme

Indiquer la seule bonne réponse pour cet algorithme en langage naturel.

```
Entrer un entier A
Initialisation
  Mettre B à 0 ; mettre C à 1
Traitement
  Tant que C < A
    Ajouter 1 à B ; ajouter C à C
  FinTantQue
Sortie
  Afficher B et C
```

a. Cet algorithme affiche, pour C, la somme des B+1 entiers naturels inférieurs à A.

b. Cet algorithme affiche, pour C, la première puissance de 2 supérieure ou égale à A.

c. Cet algorithme affiche, pour C, la somme des B entiers inférieurs à A.

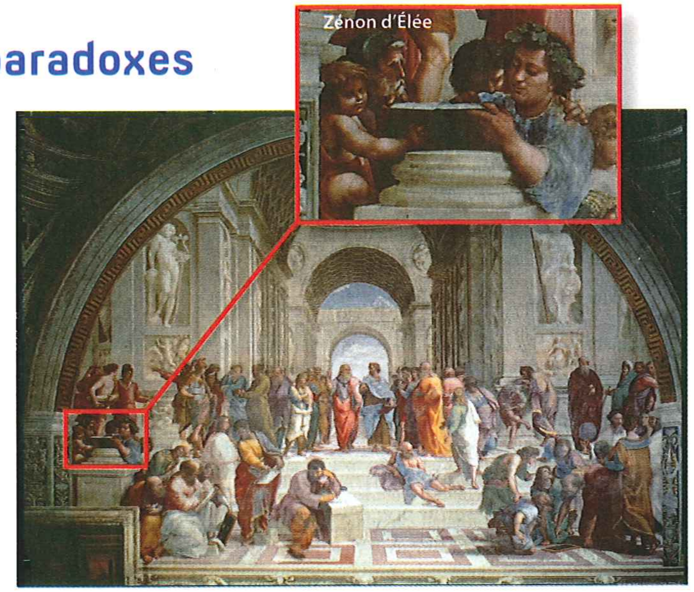
CHAPITRE 1 Suites

D'hier à aujourd'hui

Suites numériques et paradoxes

Comment concevoir qu'en ajoutant une infinité de termes d'une suite, on puisse aboutir à une somme finie ?

Dans l'Antiquité, les Grecs avaient une vision géométrique des nombres : un nombre était représenté par un segment, ce dernier étant constitué d'une succession de points. Mais quelle que soit la distance entre deux points A et B quelconques, il existe un troisième point C entre A et B, puis un autre point entre A et C, etc. Peut-on continuer ainsi indéfiniment ?



L'École d'Athènes (1512), de Raphaël, rassemble les figures majeures de la pensée antique. Parmi Pythagore, Platon, Socrate, Aristote ou encore Ptolémée, on trouve Zénon d'Élée.

Zénon d'Élée (480-420 av. J.-C.), philosophe, élève de Parménide, pose justement cette question et vient déstabiliser la vision de ses contemporains, à travers ses huit fameux **paradoxes**, issus de son unique ouvrage, *L'epicheiremate*. Ses paradoxes sont devenus familiers tant ils ont été commentés par Aristote, dans la *Physique*, et repris par Platon, dans le *Parménide*. Le paradoxe d'Achille et la tortue est l'un des plus connus. Zénon imagine une course entre une tortue et le héros grec Achille. Ce dernier laisse une longueur d'avance au reptile, bien plus lent. Pourtant, selon Zénon, Achille n'arriverait jamais à le rattraper : il doit d'abord atteindre le point de départ de la tortue ; pendant ce temps, la tortue a atteint un nouveau point mais, une fois ce point atteint par Achille, la tortue a encore avancé, et ainsi de suite. Se déplaçant plus rapidement que la tortue, il s'en rapproche toujours un peu plus, mais sans jamais l'atteindre.

Voir exercice 77 page 35

Aujourd'hui, les paradoxes de Zénon sont encore d'actualité pour appréhender les lois de la physique quantique : il n'y a pas d'*infiniment* petit en physique quantique, mais des particules élémentaires, insécables.

En économie, on trouve aussi quelques paradoxes. Keynes montre qu'un investissement de l'État se répercute sur l'ensemble de la population, pour peu que le taux d'épargne de cette population soit faible. Cet investissement engendre une suite de revenus supplémentaires de plus en plus petits, mais dont la somme totale est importante. Et dans le même temps, la suite des montants épargnés engendre une épargne totale égale à l'investissement.

Voir exercice 88 page 39

Dans notre quotidien, placements, évolutions de populations, crédits, etc., sont autant de situations impliquant des suites.

Une suite de petites volontés fait un gros résultat.
Charles Baudelaire (1821-1867)

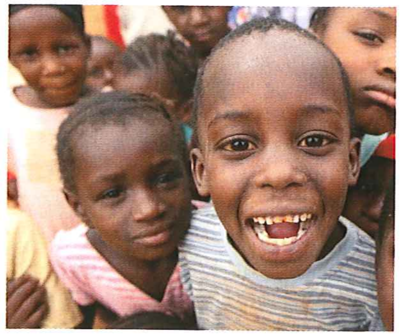
Découvrir

Activité 1 Estimer une population TICE

On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
2	Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2
3	CM							

Source : TEF (Tableaux de l'économie française), 2011 et INED (Institut national d'études démographiques).



1 Calculer les coefficients multiplicateurs de la population tous les dix ans à partir de 1950. Sur tableur, quelle formule faut-il écrire en C3 ?

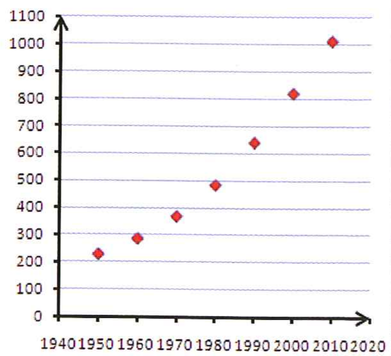
2 Un statisticien propose de modéliser la population africaine tous les dix ans par une suite géométrique de raison $q = 1{,}28$.
Comment justifier sa démarche ?

3 Pour tout entier n, on note P_n la population africaine estimée par ce modèle, en million, l'année $1950 + 10n$. Ainsi, $P_0 = 227{,}3$.

a. On prend $q = 1{,}28$. Établir une relation entre P_{n+1} et P_n.
En déduire P_n en fonction de n.
Estimer la population africaine en 2010 par ce modèle.
Le résultat correspond-il à la population estimée par l'INED pour 2010 ?

b. Estimer la population en 2010 en utilisant $q = 1{,}29$.
Comparer avec le résultat précédent.

c. Toujours en utilisant le modèle où $q = 1{,}28$ et la calculatrice, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 2 milliards d'habitants.



Activité 2 Calculer une somme et déterminer un seuil TICE

Une usine fabrique de la peinture spéciale pour carrosserie.
Elle stocke sa production au fur et à mesure pour honorer une commande de 15 000 L de peinture.
À la fin du premier jour, la production est de 1 000 L. Ensuite, elle diminue chaque jour de 2 %.
On construit la feuille de calcul suivante pour étudier la production journalière :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	production	1000								
3	production stockée	1000								

1 Parmi les formules suivantes, à entrer en C2 et à recopier vers la droite, indiquer lesquelles permettent de calculer en ligne 2 la production journalière de l'entreprise :

a. =1000-B2*2/100 **b.** =B2-B2*2/100 **c.** =B2*1.02 **d.** =1000*0.98^B1 **e.** =B2+1000

2 Parmi les formules suivantes, à entrer en C3 et à recopier vers la droite, indiquer laquelle permet de calculer en ligne 3 la production stockée par l'entreprise :

a. =B2+C2 **b.** =B3+C2 **c.** =B2*0.98 **d.** =B3+1000

3 Calculer la quantité de peinture stockée au bout de deux jours de production, puis au bout de trois jours de production, puis au bout de quatre jours de production. *Arrondir à l'unité près.*

4 Établir la feuille de calcul et déterminer le nombre de jours de production nécessaires pour honorer la commande.
L'usine peut-elle honorer une commande de 60 000 L ? Peut-on honorer une commande aussi grande que l'on veut ?

Découvrir

Activité 3 Visualiser à long terme TICE

Jérôme investit dans une action en bourse pour 1 000 €.
Après une semaine, il regarde la valeur de son action et utilise un tableur pour prévoir sa valeur à long terme. Jérôme fait l'hypothèse que son action va croître selon une suite géométrique de raison q.

	A	B	C	D
1				
2	Semaine	Valeur		
3	0	1000	Taux t	q
4	1	1020		
5	2			
6	3			
7	4			
8	5			
9	6			
10	7			

1 Après une semaine, la valeur de l'action est de 1 020 €.

a. Calculer le taux d'évolution de cette action.
Indiquer la formule à écrire en D4 pour obtenir la raison q.

b. En déduire l'expression de la valeur de l'action en fonction du nombre n de semaines.

c. Indiquer la formule à écrire en B5, en utilisant la raison en D4, pour obtenir, par recopie vers le bas, toutes les valeurs de l'action sur un grand nombre de semaines.

2 **a.** Établir la feuille de calcul ci-dessus et construire le nuage de points représentant la suite des valeurs de l'action. Sa valeur peut-elle atteindre 2 000 €, d'après l'hypothèse de l'énoncé ? Peut-elle atteindre une valeur aussi grande que l'on veut ?
On peut aussi utiliser la calculatrice comme indiqué ci-contre.

```
1.02→Q
                1.02
Y1■1000*Q^X
900/1000→Q
                  .9
```

b. Après une semaine, la valeur est descendue à 900 €. Placer cette valeur en B4.
Que devient la valeur de cette action après 10 semaines ? après 20 semaines ?
Que dire de la valeur de cette action à long terme ?

c. Faire d'autres essais avec $q > 1$ ou $0 < q < 1$. Que devient cette valeur si $q = 1$?

Activité 4 Modéliser par une suite récurrente

Voir AP page 31

On dispose d'un capital initial de 10 000 €. Trois situations sont alors proposées :
- **Situation ①** : le capital est placé à intérêts composés annuels de 4 % et on retire 500 € chaque année, après versement des intérêts.
- **Situation ②** : le capital est placé à intérêts composés annuels de 5 % et on retire 400 € chaque année.
- **Situation ③** : on dépense 4 % du capital par an et on ajoute 500 € à la fin de l'année.

	A	B
1	Année n	Capital u_n
2	0	10000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

Pour chaque situation, choisir une **formule tableur**, une **formule de récurrence** et une **représentation graphique** modélisant la suite (u_n) des capitaux.

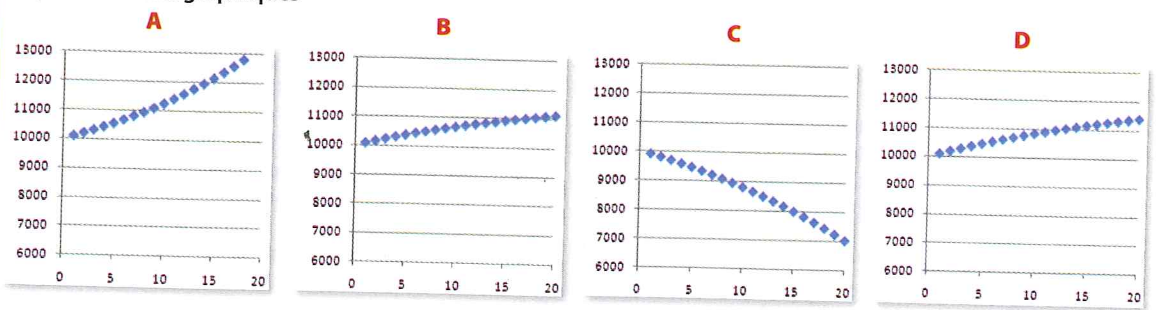
Formules à entrer en B3

1 =B2*0.96+500
2 =B2*1.04-500
3 =B2*0.04+400
4 =B2*1.05-400
5 =B2*0.95+500
6 =B2*1.05+400

Formules de récurrence

a. $u_{n+1} = 1{,}04\,u_n - 500$
b. $u_{n+1} = 1{,}05\,u_n + 400$
c. $u_{n+1} = 0{,}96\,u_n + 500$
d. $u_{n+1} = 1{,}05\,u_n - 400$
e. $u_{n+1} = 0{,}96\,u_n - 400$
f. $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 500$

Représentations graphiques



1 Suites arithmétique ou géométrique

a Suite arithmétique

Définition Une suite est **arithmétique** lorsque, à partir d'un **terme initial**, l'on passe d'un terme de la suite au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre a, appelé la **raison**.
Pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + a$, avec u_0 donné.

Formule explicite du terme général en fonction de n :

$$u_n = u_0 + n \times a \text{, pour tout entier } n.$$

Si le **terme initial** est u_1, alors on a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times a.$$

PROPRIÉTÉ

Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs est constante :

$$u_{n+1} - u_n = a.$$

Les points représentant une suite arithmétique sont alignés. On parle de **croissance linéaire** ou affine.

b Suite géométrique

Définition Une suite est **géométrique** lorsque, à partir du **terme initial**, l'on passe d'un terme de la suite au suivant en **multipliant** toujours le même nombre q, appelé la **raison**.
Pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times q$, avec u_0 donné.

Formule explicite du terme général en fonction de n :

$$u_n = u_0 \times q^n \text{, pour tout entier } n.$$

Si le **terme initial** est u_1, alors on a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

PROPRIÉTÉ

Une suite (u_n) de termes non nuls est **géométrique** si, et seulement si, la **variation relative** entre deux termes consécutifs est constante :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{q \times u_n}{u_n} - 1 = q - 1.$$

On parle de **croissance exponentielle**.

Voir chapitre 3 page 72

c Somme des termes d'une suite (q^n)

Théorème La somme des termes consécutifs de la suite géométrique (q^n) de **raison** $q \neq 1$ est :

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

DÉMONSTRATION

Soit $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$.
Alors, en multipliant la somme par q, tous les termes sont multipliés **par q**.
Or, pour tout entier n, on peut écrire : $q \times q^n = q^{n+1}$.

Donc $q \times S = q \times 1 + q \times q + q \times q^2 + q \times q^3 + \ldots + q \times q^n$
$= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$

Ainsi, par soustraction, il reste : $S - q \times S = 1 - q^{n+1}$.
En mettant S en facteur, on obtient : $S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$.

Si $q \neq 1$, alors la somme s'écrit : $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Note Quels que soient le réel k et l'entier naturel n, on a :
$$k \times k^n = k^{n+1}.$$

Propriété Pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^n \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Et dans le cas général, on peut garder en mémoire :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

EXEMPLE

Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise. De 50 000 € au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 20 %. Le capital injecté u_n au n-ième mois suit une suite géométrique, car $u_{n+1} = u_n - 0{,}20\,u_n = 0{,}8\,u_n$, de **premier terme $u_1 = 50\,000$**.

Donc la suite (u_n) des capitaux injectés mois après mois est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$. On utilise la propriété ci-contre.

La somme des 12 capitaux injectés durant une année est :

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{12} = u_1 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = 50\,000 \times \frac{1-0{,}8^{12}}{1-0{,}8} \approx 232\,820.$$

```
50000*(1-0.8^12)
/(1-0.8)
          232820.1308
```


Modéliser à l'aide d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice corrigé

Énoncé

Une ville organise la récupération du verre usagé à partir du 1er janvier 2010.
En 2010, la ville a récupéré 300 tonnes de verre et en 2011, elle en a récupéré 330 tonnes.
Pour tout entier n, on note u_n la quantité de verre récupéré, en tonne, au cours de l'année $2010 + n$.

1 Si la croissance de la suite (u_n) est linéaire :
a. Préciser la nature de la suite (u_n).
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
b. Selon ce modèle, déterminer l'année où la collecte annuelle de la ville dépassera les 700 tonnes.

2 Si la croissance de la suite (u_n) est exponentielle :
a. Préciser la nature de la suite (u_n) et sa raison.
Exprimer u_n en fonction de n.
b. Selon ce modèle, à l'aide de la calculatrice, déterminer l'année où la collecte de la ville dépassera les 700 tonnes.
c. Calculer la quantité totale prévue de 2010 à 2020 compris. *Arrondir à 10 tonnes près.*

Points méthode

1 a. Lorsqu'une suite (u_n) est arithmétique de **raison a**, alors :
$$u_n = u_0 + n \times a.$$
b. (u_n) est arithmétique.
On résout algébriquement l'inéquation :
$$u_n \geqslant 700.$$

2 a. Lorsqu'une suite (u_n) est géométrique de **raison q**, alors :
$$u_n = u_0 \times q^n.$$
b. (u_n) est géométrique.
On détermine la solution en tabulant la suite (u_n) à la calculatrice, par pas de 1.
c. On cherche la **quantité totale** récupérée sur 11 années.
On calcule donc la **somme** de **11 termes** d'une suite géométrique $(q \neq 1)$ par la formule :
$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Note Pour une prévision, on arrondit souvent le résultat.

Solution

1 a. Si la croissance est **linéaire**, alors la **variation absolue** de la quantité de verre récupérée entre deux années est **constante**, soit $u_1 - u_0 = 330 - 300 = 30$.
Donc, chaque année, la ville récupère 30 tonnes de verre en plus.
La suite (u_n) est donc **arithmétique** de raison $a = 30$ avec $u_0 = 300$.
Ainsi, pour tout entier n, $u_n = 300 + 30 \times n$.
b. On résout l'inéquation : $u_n \geqslant 700 \Leftrightarrow 300 + 30n \geqslant 700 \Leftrightarrow 30n \geqslant 400 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{40}{3}$.
Or $\dfrac{40}{3} \approx 13{,}3$ et n est un entier. Donc, selon ce modèle, la ville collectera plus de 700 tonnes au bout de 14 années, soit à partir de 2024.

2 a. Si la croissance est **exponentielle**, la **variation relative** de la quantité de verre récupéré entre deux années est **constante**, soit $\dfrac{330-300}{300} = 0{,}1$
c'est-à-dire une augmentation de 10 % par an.
Selon ce modèle, la ville récupère chaque année 10 % de verre en plus.
La quantité de verre récupéré est ainsi multipliée par $q = 1 + \dfrac{10}{100} = 1{,}1$.
Donc la suite (u_n) est **géométrique** de raison $q = 1{,}1$ avec $u_0 = 300$.
Ainsi, pour tout entier n, $u_n = 300 \times 1{,}1^n$.
b. On tabule la suite (u_n) par pas de 1.
On obtient $u_8 \approx 643 < 700$ et $u_9 \approx 707 > 700$.
La ville collectera plus de 700 tonnes au bout de 9 années, soit à partir de 2019.

X	Y1	
3	399.3	
4	439.23	
5	483.15	
6	531.47	
7	584.62	
8	643.08	
9	707.38	

Y1=300*1.1^X

c. Les quantités en 2010 et 2020 étant comprises, on calcule la **somme** :
$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 300 + 300 \times 1{,}1 + \ldots + 300 \times 1{,}1^{10}.$$
En factorisant par 300 : $S = 300 \times (1 + 1{,}1 + \ldots + 1{,}1^{10})$.
Donc $S = 300 \times \dfrac{1 - 1{,}1^{11}}{1 - 1{,}1} \approx 5\,559{,}35 \approx 5\,560$, arrondie à 10 tonnes près.

Exercices d'application

Voir exercices 21 à 26

1 Une production, initialement de 3 000 tonnes, augmente chaque année de 2 %.
1 Calculer la production annuelle au bout de 10 ans d'augmentation.
2 Calculer la quantité totale produite durant les 10 années d'augmentation.

2 La consommation annuelle moyenne de sucre était de 8 kg par personne en 2010.
On estime que cette consommation diminue chaque année de 3 %.
Calculer la consommation totale de sucre par personne de 2010 à 2015 compris.

2 Sens de variation et limite

a Sens de variation d'une suite

Définition ▸ Une suite (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \text{ c'est-à-dire } u_{n+1} - u_n \text{ est positif.}$$

▸ Une suite (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} \leqslant u_n \text{ c'est-à-dire } u_{n+1} - u_n \text{ est négatif.}$$

Note Soit (u_n) une **suite arithmétique** de raison a.
- Si la raison a est strictement positive, la suite arithmétique est croissante.
- Si la raison a est strictement négative, la suite arithmétique est décroissante.

b Sens de variation d'une suite géométrique

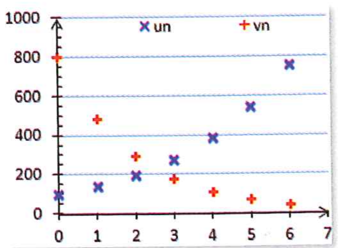
Théorème Soit (u_n) une suite géométrique, à termes strictement positifs, de raison q strictement positive.

▸ Si la raison q **est strictement supérieure à 1**, la suite géométrique est croissante.

▸ Si la raison q **est comprise entre 0 et 1**, la suite géométrique est décroissante.

▸ Si la raison q **est égale à 1**, la suite géométrique est constante et égale à son premier terme.

	A	B	C
1		Suites géométriques	
2	Raison	$q > 1$	$0 < q < 1$
3		1,4	0,6
4	n	u_n	v_n
5	0	100	800
6	1	=B5*B$3	480
7	2	196	288
8	3	274,4	172,8
9	4	384,16	103,68
10	5	537,824	62,208
11	6	752,9536	37,3248



DÉMONSTRATION

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de termes strictement positifs. Alors, par définition :

$$u_{n+1} - u_n = q \times u_n - u_n = u_n(q-1) \text{, pour tout entier } n.$$

Comme tous les termes sont strictement positifs, alors $u_n > 0$.

Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de $q - 1$:
- si $q > 1$, alors $q - 1 > 0$; donc $u_{n+1} > u_n$, pour tout entier n.
- si $0 < q < 1$, alors $q - 1 < 0$; donc $u_{n+1} < u_n$, pour tout entier n.
- si $q = 1$, alors $q - 1 = 0$; donc $u_{n+1} = u_n$, pour tout entier n.

EXEMPLE

En page 14, la suite des capitaux injectés par l'investisseur est une suite géométrique de raison 0,8. Donc cette suite de capitaux est décroissante.

c Limite d'une suite (q^n)

Théorème admis ▸ Si la raison q **est strictement supérieure à 1**, la suite géométrique (q^n) a pour **limite** $+\infty$.

▸ Si la raison q **est comprise strictement entre 0 et 1**, la suite géométrique (q^n) a pour limite 0.

▸ Si la raison q est égale à 1, la suite géométrique (q^n) est constante et égale à 1, et sa limite est 1.

Notations
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

On dit aussi que la suite (q^n) **converge** vers 0.

EXEMPLE

Dans l'exemple page 14, l'investisseur injecte au fil des mois un capital donné par : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 50\,000 \times 0{,}8^{n-1} = \dfrac{50\,000}{0{,}8} \times 0{,}8^n = 62\,500 \times 0{,}8^n$.

Ainsi, à long terme, l'investisseur va injecter des capitaux de plus en plus petits et, à la limite, nuls.

Voir exercices 40 et 41

Étudier une suite géométrique et déterminer un seuil

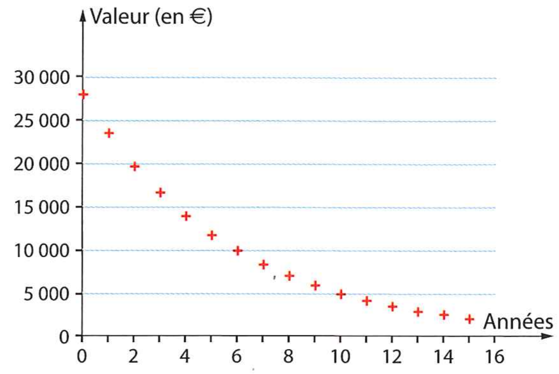
Exercice corrigé

Énoncé

Anne a acheté une voiture d'une valeur de 28 000 €. Chaque année, sa voiture perd 16 % de sa valeur. Pour tout entier n, on note u_n la valeur, en euro, de la voiture après n années de baisse.

1 a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Déterminer le sens de variation de cette suite et sa limite.

2 a. Justifier que la voiture a perdu environ 50 % de sa valeur au bout de quatre ans.
b. À partir de combien d'années la valeur de revente de cette voiture deviendra-t-elle inférieure à 5 000 € ? Déterminer le nombre d'années à la calculatrice et vérifier sur le graphique ci-contre.



Points méthode

❶ Une suite telle que, à tout rang n, on passe d'un terme au suivant en **diminuant** du même taux t % est une **suite géométrique** de raison :

$$q = 1 - \frac{t}{100}.$$

Comme q est strictement compris **entre 0 et 1**, la suite est **décroissante**, et lorsque n devient très grand, le terme de la suite devient très **proche de zéro**.

❷ Comme la suite géométrique est décroissante et que sa limite est nulle, alors, pour toute valeur A plus petite que la valeur initiale, il existe un **« seuil » p** tel que le terme u_p devient inférieur à la valeur A.

On peut déterminer ce seuil par un algorithme. Voir page 20

Solution

1 a. La valeur de la voiture à l'achat est $u_0 = 28\,000$.
Chaque année, la valeur de la voiture diminue de 16 %.
Donc $u_{n+1} = u_n - 0{,}16\,u_n = u_n \times (1 - 0{,}16) = u_n \times 0{,}84$.
Donc, **par définition**, la suite (u_n) est de nature géométrique, de raison $q = 0{,}84$.

b. L'expression du terme u_n en fonction de n est alors :
pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n = 28\,000 \times 0{,}84^n$.

c. Comme $0{,}84 \in\,]0\,;1[$, la suite géométrique (u_n) est décroissante et sa limite est **zéro**.

2 a. Au bout de 4 ans, la valeur de la voiture d'Anne est :
$u_4 = 28\,000 \times 0{,}84^4 \approx 13\,940$, inférieure à 14 000 €.

b. À l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), on calcule les valeurs :
$u_9 \approx 5\,830 > 5\,000$ et $u_{10} \approx 4\,897 < 5\,000$
et comme la suite est décroissante, pour tout entier n supérieur à 10, on obtient :

$$u_n \leqslant u_{10} < 5\,000.$$

Donc la cote devient inférieure à 5 000 € au bout de10 ans.

X	Y1
4	13940
5	11710
6	9836.3
7	8262.5
8	6940.5
9	5830
10	4897.2

Y1=28000*0.84^X

Exercices d'application

Voir exercices 43 à 48

3 Un capital de 12 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 2,7 %. Voir AP page 31

On note C_n le capital acquis au bout de n années de placement. Ainsi, $C_0 = 12\,000$.

a. Déterminer la nature de la suite (C_n).
Exprimer C_n en fonction de n.
Calculer le capital acquis au bout de 10 ans.

b. Déterminer la variation et la limite de cette suite.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'années de placement nécessaire pour le doublement du capital.

4 Dans une entreprise de 2 000 salariés, la part des femmes est de 30 %. Les dirigeants décident d'augmenter de 5 % le nombre des femmes salariées, chaque année, tout en gardant le nombre total de salariés. On note F_n le nombre de femmes salariées après n années.

a. Le nombre d'hommes salariés va-t-il diminuer de 5 % par an ? Justifier la réponse. Exprimer F_n en fonction de n.

b. Déterminer le nombre d'années nécessaire pour que la part des femmes salariées soit supérieure à celle des hommes.

3 Suite arithmético-géométrique

Définition Une suite **arithmético-géométrique** (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par une formule de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n + a \text{, où } a \text{ et } q \text{ sont deux réels,}$$

le **premier terme** u_0 étant donné.

Cas particuliers

- Si $q = 1$, alors $u_{n+1} = u_n + a$ et la suite (u_n) est arithmétique de raison a.
- Si $a = 0$, alors $u_{n+1} = q \times u_n$ et la suite (u_n) est géométrique de raison q.

EXEMPLE

Un commercial négocie son contrat salarial.
Son salaire de base est de 1 500 € net. Il négocie une augmentation de 12 % par an, mais ses frais restent à sa charge, soit 140 € par mois.
Son salaire est stable toute l'année.
En notant u_n le salaire mensuel net l'année n, on a $u_0 = 1\,500$.
Chaque année, le **salaire mensuel net** est égal à son **salaire précédent augmenté de 12 %**, auquel on **soustrait 140 €** de frais.
D'où, **pour tout entier** n : $u_{n+1} = u_n + 0{,}12\,u_n - 140 = 1{,}12\,u_n - 140$.
La suite des salaires nets est bien **arithmético-géométrique**.
Pour obtenir le salaire u_4 après 4 années d'augmentation, on calcule les termes de proche en proche. Ainsi, $u_4 \approx 1\,691{,}17$ €.

	A	B
1	Suite arithmético-géométrique	
2	q =	1,12
3	a =	-140
4	n	u_n
5	0	1500
6	1	=B5*$B$2+$B$3
7	2	1584,8
8	3	1634,976
9	4	1691,17312
10	5	1754,113894

On peut aussi utiliser les fonctionnalités des calculatrices en mode **SUITE** :

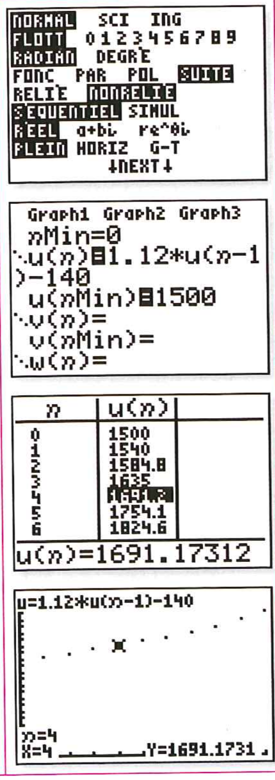
Sur TI™

Choisir mode **SUITE**.
- Par f(x), entrer la formule de récurrence donnant le terme **u(n)** en fonction du précédent **u(n–1)** et du terme initial.

u(n–1) s'obtient par : 2nde u_n 7 (x,t,θ,n – 1)

- On obtient tous les termes de la suite dans le tableau de valeurs : 2nde table graphe

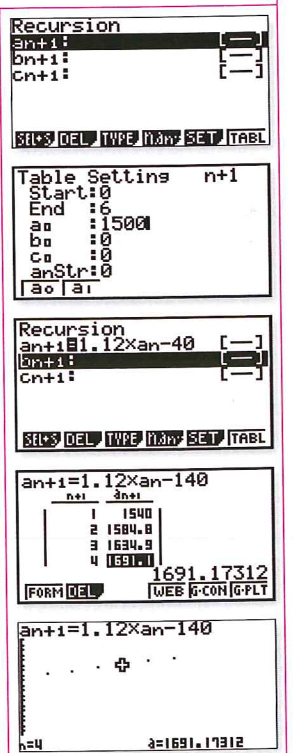
Le terme u_4 est en $n = 4$.
- La représentation s'obtient par graphe, après avoir défini la fenêtre, en mode **Nonrelié**.



Sur Casio

Choisir MENU RECUR.
- Sélectionner **an+1**.
- Dans **SET** via F5, définir le nombre de termes calculés et représentables (ici 6) et le terme initial.
- Entrer la formule de récurrence en utilisant **an** via F2 et valider par EXE.
- On obtient les termes de la suite par **TABL** via F6.

Descendre pour lire le terme u_4, en $n+1 = 4$.
- La représentation des termes calculés s'obtient par **G-PLT** via F6, après avoir défini la fenêtre.



Pour étudier une suite **arithmético-géométrique** et connaître la formule explicite d'une telle suite, on utilise, en général, une suite **auxiliaire**.

Voir exercice corrigé 61 page 30

Étudier une suite arithmético-géométrique

Exercice corrigé

Énoncé

Corinne achète un meuble d'une valeur de 2 500 € avec une carte de crédit, au taux mensuel de 1,4 %.
Elle rembourse ce crédit par un virement mensuel de 112 € en fin de mois. On note u_n le montant restant dû au début du n-ième mois. Ainsi, $u_0 = 2\,500$.

1 a. Calculer le montant u_1 restant dû au début du premier mois, juste après le premier versement. Calculer u_2.
b. Établir la relation exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.

2 On pose $v_n = u_n - 8\,000$, pour tout entier naturel n.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
b. Déterminer le mois p où le crédit est entièrement remboursé.
Quel est alors le dernier versement pour épurer la dette ?

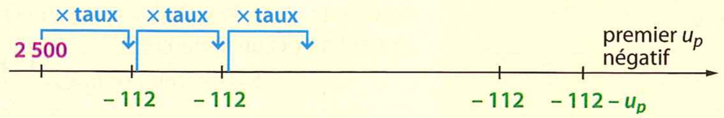
Points méthode

❶ Le calcul des premiers termes permet de comprendre comment se calcule **un terme à partir du terme précédent**, et ainsi d'établir la relation de récurrence.
« **Traduire** » chaque phrase de l'énoncé présentant le procédé récurrent par une opération.

❷ L'étude d'une suite arithmético-géométrique se fait à l'aide d'une **suite auxiliaire**.
Pour la suite :
$$u_{n+1} = q \times u_n + a,$$
si on prouve que, pour tout entier n, on a :
$$v_{n+1} = q \times v_n,$$
alors la suite (v_n) est géométrique.
On calcule alors v_0 pour exprimer v_n en fonction de n, puis obtenir u_n en fonction de n.

Solution

1 a. Un mois après l'achat, les intérêts sont de $2\,500 \times 0{,}014 = 35$, puis Corinne rembourse 112 €. Donc le capital restant dû au début du 1[er] mois est :
$u_1 = 2\,500 + 35 - 112 = 2\,423$.
$u_2 = 2\,423 + 2\,423 \times 0{,}014 - 112 \approx 2\,423 + 33{,}92 - 112 = 2\,544{,}92$



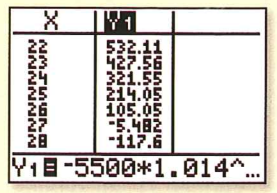
b. Chaque mois, le **capital restant dû** est égal au **capital dû précédent augmenté des intérêts (1,4 % du capital dû)**, auquel on **soustrait** le virement de **112 €**.

	A	B	C	D
1	Mois	Taux mensuel	1,4	
2	n	Capital dû + intérêts	Versement	Restant dû
3	0	2500	0	=B3-C3
4	=A3+1	=D3+D3*$C$1/100	112	=B4-C4

D'où : $u_{n+1} = u_n + 1{,}014\,u_n - 112 = 1{,}014\,u_n - 112$.

2 a. On pose la suite auxiliaire $v_n = u_n - 8\,000$, pour tout entier n.
Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000 = 1{,}014\,u_n - 112 - 8\,000 = 1{,}014\,u_n - 8\,112$.
On met 1,014 en facteur en remarquant que $\dfrac{8\,112}{1{,}014} = 8\,000$.
D'où $v_{n+1} = 1{,}014 \times (u_n - 8\,000) = 1{,}014 \times v_n$.
Donc, par définition, la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 1{,}014$ et de 1[er] terme $v_0 = u_0 - 8\,000 = 2\,500 - 8\,000 = -5\,500$.
D'où, $v_n = v_0 \times q^n = -5\,500 \times 1{,}014^n$ et $u_n = v_n + 8\,000 = -5\,500 \times 1{,}014^n + 8\,000$.

b. Au début du 26[e] mois, le capital dû est encore positif, les intérêts vont s'appliquer.
Au début du 27[e] mois, le capital dû serait négatif, donc le 27[e] virement de Corinne sera :
$$112 - 5{,}48 = 106{,}52 \text{ €}.$$
Le crédit est totalement remboursé le 27[e] mois.



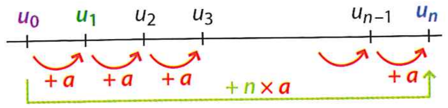
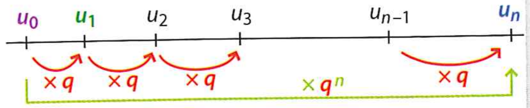
Exercices d'application

Voir exercices 55 à 60

5 Reprendre l'exercice corrigé ci-dessus, avec le même taux mensuel, pour un achat de 3 000 € et un remboursement mensuel de 98 € en posant $v_n = u_n - 7\,000$.

6 Reprendre l'exercice corrigé ci-dessus, avec un taux mensuel de 1,6 %, pour un prêt de 4 300 € et un versement mensuel de 68 € en posant $v_n = u_n - 4\,250$.

Faire le point

Capacités	Mise en œuvre
Reconnaître une suite **arithmétique** et l'exploiter.	Une suite est **arithmétique** lorsque, à partir du **terme initial**, l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre a : $u_{n+1} = u_n + a$ avec le terme initial u_0 donné. a est la raison. Le **terme général en fonction de** n s'écrit : $u_n = u_0 + n \times a$ ou $u_n = u_1 + (n-1) \times a$. 
Reconnaître une suite **géométrique** et l'exploiter.	Une suite est **géométrique** lorsque, à partir du **terme initial**, l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q : $u_{n+1} = u_n \times q$, avec le terme initial u_0 donné. q est la raison. Le **terme général en fonction de** n s'écrit : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. 
Connaître et appliquer la formule donnant la **somme** : $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ avec $q \neq 1$.	On a : $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Cette somme s'applique lorsque l'on cherche la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. On met alors le **premier terme** en facteur. On peut garder en mémoire : $S = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$.
Déterminer la **limite d'une suite (u_n) géométrique** de raison q strictement positive.	On applique le théorème (admis) sur la limite de q^n : • si $q > 1$, alors q^n tend vers $+\infty$; • si $0 < q < 1$, alors q^n tend vers 0. Il suffit ensuite de multiplier par le terme initial u_0.

Dans le cas d'une suite (q^n), avec $0 < q < 1$, déterminer un **seuil p** à partir duquel le terme q^p est inférieur ou égal à un réel A donné, proche de 0.	Une suite (q^n) telle que la raison q est strictement comprise entre 0 et 1 est décroissante et ses valeurs sont dans l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. Voir exos 43 à 48 Pour tout réel $A \in \,]\,0\,;1\,[$, il existe un rang p à partir duquel $q^p \leqslant A$ et ainsi, pour tout entier n supérieur à p, on a : $q^n \leqslant q^p \leqslant A$. On peut obtenir le « seuil » p à l'aide de l'algorithme ci-dessous :
	Entrer Q et A
	Mettre N à 0 et U à 1
	Tant que U > A
	  Ajouter 1 à N
	  Stocker Q×U dans U
	FinTantQue
	Afficher l'entier seuil N
	TI™ : PROGRAM:SEUIL
	:Prompt Q,A
	:0→N:1→U
	:While U>A
	:N+1→N
	:Q*U→U
	:End
	:Disp "SEUIL",N
	Casio : ======SEUIL
	"Q,A":?→Q:?→A↵
	0→N:1→U↵
	While U>A↵
	N+1→N:Q×U→U↵
	WhileEnd↵
	"SEUIL":N◢

Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite **arithmético-géométrique**.	Toute situation qui, à **chaque période**, combine une **évolution constante en variation relative** et une **évolution constante en variation absolue** peut se traduire par une **suite arithmético-géométrique**. Le procédé expliqué dans la description de la situation doit être traduit en opérations. On peut alors établir une relation de récurrence entre un terme u_{n+1} et son précédent u_n, **pour tout entier** n, de la forme $u_{n+1} = q \times u_n + a$. Une telle suite s'étudie à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique de raison q, afin d'établir la formule explicite en fonction de n.

Faire le point

QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

7 Les nombres entiers pairs sont les premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) :
a. de raison 1. **b.** de raison 2 et $u_0 = 2$. **c.** de raison 2 et $u_0 = 0$.

8 Myriam a 3 500 € au début du mois de janvier et dépense chaque mois 250 €.
a. Fin septembre, il lui reste 1 250 €. **b.** Son avoir en début de mois n est $u_n = 3\,500 - 250\,n$. **c.** À la fin de l'année, il lui reste 250 €.

9 En 2009, la population mondiale estimée est de $6{,}99 \times 10^9$. L'INED prévoit une progression de la population mondiale de 11,35 ‰ par an. On note p_n la population mondiale estimée en $2009 + n$ en millions.
a. estimation en 2050 : ≈ 11 229. **b.** $p_8 \approx 16\,520$. **c.** $p_{11} \approx 7\,913$.

10 Lucas est étudiant. Il a un compte d'un montant de 6 000 € au départ. Il dépense chaque mois 30 % du montant de son compte et ses parents lui ajoutent chaque mois 50 % du montant de ses dépenses. On note u_n le montant de son compte au bout de n mois de dépenses. Alors, pour tout entier n :
a. $u_n = 6\,000 \times 1{,}2^n$. **b.** $u_n = 6\,000 \times 0{,}85^n$. **c.** $u_n = 6\,000 \times 0{,}35^n$.

11 La somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{64}$ vaut :
a. $2 - \frac{1}{128}$. **b.** $2 - \frac{1}{64}$. **c.** 1,984.

12 Karine fabrique des bougies. En janvier, elle fabrique 540 bougies et décide d'augmenter sa production de 10 % tous les mois jusqu'au mois de juin inclus, mois au cours duquel elle vend ses bougies sur un marché d'été. Fin juin, elle a alors en stock :
a. 4 166 bougies. **b.** 3 564 bougies. **c.** 5 123 bougies.

13 Océane vend un article par correspondance au prix unitaire de 10 €. Elle en vend 1 000. Elle souhaite augmenter chaque mois la quantité vendue de 26 % et, pour cela, elle diminue son prix de 21 %. La valeur de ses ventes au bout de n mois est V_n = prix unitaire × quantité vendue.
a. La suite (V_n) est croissante. **b.** La suite (V_n) est décroissante. **c.** La suite (V_n) est constante.

14 Alexis achète une moto à 10 600 €. Il apprend que sa valeur baisse chaque année de 10 %.
a. La valeur est nulle dans 10 ans. **b.** Six ans après l'achat, elle vaut 5 880 €, à 10 € près. **c.** À long terme, sa valeur est nulle.

15 Au cours d'un jeu, à chaque partie, la probabilité de gagner est de 0,8. La probabilité de gagner toutes les parties jouées est inférieure à 0,01 après :
a. 21 parties. **b.** 80 parties. **c.** 20 parties.

16 Angélique désire économiser, en vue d'un achat de 30 000 €. Elle possède 6 000 € au départ, qu'elle place sur un compte rémunéré à 5 % par an. Et elle ajoute chaque année 4 000 €. On note u_n le montant de son compte rémunéré au bout de n années. Alors :
a. $u_n = 6\,000 \times 1{,}05^n + n \times 4\,000$. **b.** $u_{n+1} = 300 \times u_n + 4\,000$. **c.** $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n + 4\,000$.

Exercices

→Les exercices portant un numéro jaune sont corrigés à la fin du manuel.

1 Suites arithmétique ou géométrique

17 QCM

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

1 La suite (u_n) est arithmétique de raison a telle que $u_1 = 12$ et $u_3 = 48$. Alors a vaut :
a. 18. **b.** 12. **c.** 2. **d.** −2.

2 La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n + 5$ est :
a. géométrique de raison 2.
b. géométrique de raison 5.
c. arithmétique de raison 2.
d. arithmétique de raison 5.

3 Une consommation passe de 15,3 kg à 16,7 kg.
Elle se modélise par une suite géométrique de raison :
a. 1,0915. **b.** 1,4. **c.** 9,15.

18 QCM

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

En 2007, en France, les dépenses de santé se montaient à 164 milliards d'euros, pour atteindre 176 milliards d'euros en 2009.
On note u_n les dépenses de l'année $2007 + n$.

1 Si l'augmentation annuelle est constante, ces dépenses annuelles se modélisent par :
a. $u_{n+1} = u_n + n \times 6$.
b. $u_{n+1} = u_n + 12$.
c. $u_{n+1} = u_n + 6$.

2 Si les dépenses augmentent encore de 3,6 % par an après 2009, elles se modélisent par :
a. $u_{n+1} = 0{,}036\, u_n$.
b. $u_n = 1{,}036^{n-2} \times 176$.
c. $u_{n+1} = u_n + 5{,}28$.

19 QCM

Voir AP page 31

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

On place 20 000 € à intérêts composés au taux annuel de 1,8 % sur un compte épargne. Pour tout entier n, on note u_n le capital obtenu au bout de n années de placement. Ainsi, $u_0 = 20\,000$.

1 La suite (u_n) est géométrique de raison :
a. 1,8. **b.** 360. **c.** 1,018.

2 Le capital obtenu au bout de 8 années de placement, arrondi au centime d'euro près, est :
a. 22 660,24 €. **b.** 23 068,12 €. **c.** 22 880 €.

3 Le capital dépassera 24 000 € au bout de :
a. 10 ans. **b.** 11 ans. **c.** 12 ans.

4 Le montant total des intérêts perçus en huit années de placement est environ de :
a. 3 068,12 €. **b.** 407,88 €. **c.** 2 880 €.

20 Nature d'une suite

Parmi les suites dont on donne la définition sur $\mathbb{N}$, indiquer celles qui sont arithmétiques et celles qui sont géométriques. Préciser la raison.

a. $u_n = 3 + 2n$. **b.** $v_n = \dfrac{3}{2^n}$.

c. $a_{n+1} = a_n + 0{,}1\, a_n$, avec $a_0 = 12$.

d. $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}$, avec $b_0 = 15\,000$.

e. $c_{n+1} = c_n - 100$, avec $c_0 = 100\,000$.

21 Calcul du *n*-ième terme ALGO

La croissance annuelle du PIB de la Chine est de 9 %. En 2009, le PIB de la Chine était de 5 000 milliards de dollars.
Si ce taux de croissance se maintient, quel sera le PIB de la Chine en 2015 ?

1 Répondre à cette question en modélisant le PIB de la Chine par une suite.

2 On propose l'algorithme ci-dessous, que l'on a traduit en programme sur la calculatrice :

```
Entrer « U0 » et stocker dans U
Entrer N
Pour K allant de 1 à N, faire
   stocker U + 0,09 × U dans U
FinPour
Afficher U
```

TI™

```
PROGRAM:CALCUN
:Input "U0",U
:Prompt N
:For(K,1,N)
:U+0.09*U→U
:End
:Disp U
```

Casio

```
======CALCUN
"U0":?→U↵
"N":?→N↵
For 1→K To N↵
U+0.09×U→U↵
Next↵
"UN":U◢
```

Que faut-il entrer dans les variables U et N pour répondre à la question posée ?

3 Le PIB du Nigéria en 2008 s'élève à 200 milliards de dollars, avec une hypothèse d'un taux de croissance annuelle de 6 % dans les années à venir.
a. Comment transformer cet algorithme pour entrer le taux T en pourcentage, puis effectuer le calcul de ce PIB prévu en 2015 ?
b. Calculer ce PIB suivant cette hypothèse.

22 Calcul du terme initial

Une production croît régulièrement de 20 % par mois pour atteindre 224 tonnes au bout de 6 mois. Quelle était la production de départ, arrondie à la tonne près ?

Exercices

23 Calcul de la valeur actuelle

On place un capital C_0 à **intérêts composés** au taux annuel de 4,5 % le 2 janvier 2012. Voir AP page 31
Combien faut-il placer le 2 janvier 2012 pour disposer de 4 000 € après cinq années de placement ?
Arrondir au centime d'euro près.

Pour info La valeur C_0 est appelée :
« **valeur actuelle** de 4 000 € au 2 janvier 2012 ».

24 Augmentation constante et stockage ALGO

Une chaîne de fabrication permet d'augmenter chaque semaine sa production de boîtes à bijoux de la même quantité.
La première semaine, on fabrique 50 boîtes.
Cette production augmente chaque semaine de 10 boîtes et on stocke la production au fur et à mesure en vue de la Saint-Valentin.

1 **a.** Modéliser cette production afin de calculer le nombre de boîtes fabriquées la 5e semaine.
b. À partir de quelle semaine la production dépasse-t-elle les 200 boîtes ?

2 Pour connaître la production totale S stockée en fonction du nombre N de semaines de production, on propose l'algorithme suivant :

```
Entrer N
Stocker 50 dans P
Stocker 50 dans S
Pour I allant de 2 à N, faire
   stocker P+10 dans P
   stocker S+P dans S
FinPour
Afficher S
```

Et sa traduction partielle en programme :

TI™

```
PROGRAM:STOCK
:Prompt N
:50→P
:50→S
[redacted]
:Disp "S",S
```

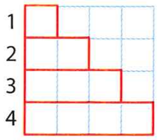
Casio

```
======STOCK
"N":?→N↵
50→P↵
50→S↵
[redacted]
"S":S◢
```

a. Compléter le programme selon le modèle de calculatrice utilisé en classe.
b. La Saint-Valentin a lieu cinq semaines après le début de la production. Calculer le nombre de boîtes stockées jusqu'à cette date.

25 Empilement

La « pyramide » ci-contre est telle que, à chaque niveau, on ajoute une pierre de plus qu'au niveau précédent.
Au niveau 1, il n'y a qu'une pierre.
En s'aidant du dessin, exprimer le nombre total de pierres jusqu'au niveau n en fonction de n.



26 Stockage d'une production

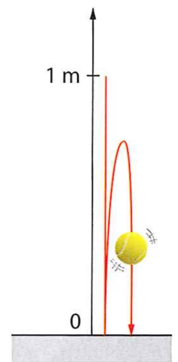
Une entreprise doit honorer, en 8 mois, une commande de 10 tonnes de sucre. Elle a déjà en stock la production précédente de 900 kg. Chaque mois, la production augmente de 12 % par rapport à la production précédente.

1 Quelle est la production du 8e mois ?
Arrondir à une tonne près.

2 L'entreprise pourra-t-elle honorer sa commande en 8 mois ? Justifier par un calcul.

27 Somme de rebonds

On dispose d'une balle en mousse de 6 cm de diamètre, qu'on laisse tomber d'une hauteur de 1 m.
On estime qu'à chaque rebond, la hauteur maximale atteinte par la balle diminue de 20 %.



1 Quelle hauteur atteint la balle après le 1er rebond ? après le 2e ?

2 On admet que la balle ne rebondit plus lorsque la hauteur du dernier rebond devient inférieure à 6 cm.
a. Justifier que la balle rebondit en tout 13 fois.
b. Calculer la distance totale parcourue par la balle jusqu'au 10e rebond. *Arrondir au cm près.*

28 Calculs techniques

Calculer la somme S.
Donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

a. $S = 1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^{20}$
b. $S = 1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \ldots + 0{,}98^{12}$
c. $S = 1{,}03 + 1{,}03^2 + \ldots + 1{,}03^7$

29 Encore des sommes...

Même exercice. *Donner un arrondi à l'unité près.*

a. $S = 2 + 2 \times 0{,}8 + 2 \times 0{,}8^2 + \ldots + 2 \times 0{,}8^{45}$
b. $S = 100 + 100 \times 1{,}01 + 100 \times 1{,}01^2 + \ldots + 100 \times 1{,}01^{12}$

30 En fonction de *n*

Exprimer en fonction de l'entier n :

a. $S_1 = 1 + 1{,}5 + 1{,}5^2 + \ldots + 1{,}5^{n-1}$
b. $S_2 = 3 + 3 \times 0{,}9 + 3 \times 0{,}9^2 + \ldots + 3 \times 0{,}9^n$

31 Somme de salaires

En 2012, Alice a un salaire mensuel de 1 500 €. À chaque 1er janvier, à partir de 2013, son salaire mensuel augmente de 3 %. Pour tout entier n, on note S_n le salaire mensuel d'Alice, en €, l'année $2012+n$. Ainsi, $S_0 = 1\,500$.

1 Justifier que la suite (S_n) est géométrique. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

2 a. Calculer le salaire mensuel d'Alice en 2013 et en 2014.

b. Calculer le salaire annuel perçu par Alice en 2012, en 2013, puis en 2014.

3 a. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'entier p à partir duquel le salaire mensuel S_p d'Alice dépasse 2 000 €.

b. Calculer le salaire total perçu par Alice depuis le 1er janvier 2012 jusqu'au 1er janvier $2012+p$ exclu.
Arrondir à 10 € près.

32 La légende du jeu d'échec

Une légende dit que, pour le remercier des plaisirs que lui procurait le jeu d'échecs, l'empereur Shiram promit à son inventeur Sissa le cadeau suivant :
« Sur la première case du jeu, je déposerai un grain de riz, puis le double sur la deuxième case et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains. »
Un jeu d'échecs comporte 64 cases.

1 Déterminer le nombre de grains de riz que l'empereur s'engage à donner à Sissa. *Donner le résultat arrondi à 2 chiffres significatifs, puis en langage parlé.*

2 Dans un kilogramme de riz, il y a environ 3 000 grains de riz. Actuellement, la production mondiale annuelle est d'environ 6×10^8 tonnes de riz.
Commenter le résultat obtenu précédemment.

33 Comparaison de suites

En 1970, la consommation de vins courants en France était de 95 L en moyenne par habitant et par an, contre 8 L de vins AOC. Chaque année, depuis 1970, la consommation de vins courants a diminué de 4 %. En revanche, celle de vins AOC a augmenté de 4 %.

1 a. Modéliser ces consommations annuelles en $1970+n$ par deux suites (V_n) et (A_n).

b. Calculer les consommations annuelles moyennes par habitant pour ces deux types de vins en 1990.
Arrondir les résultats à 0,1 L près.

2 On s'intéresse au rapport entre les deux consommations. En 1970, ce rapport est : $R_0 = 958 = 11{,}875$, soit presque 12 fois plus de vins courants que de vins AOC.

a. Quelle est la nature de la suite (R_n) de ces rapports ?

b. Calculer la valeur de ce rapport en 2010.
Arrondir à 10^{-3} près.

3 À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année p à partir de laquelle la consommation de vins AOC dépassera celle de vins courants. Que devient alors le rapport R_p ?

34 Suite et calcul formel

Sur le logiciel TI-Nspire™ avec calcul formel, on a défini une suite par son terme général en fonction de n et obtenu les résultats ci-dessous :

$u(n):=100\cdot(1.05)^n$	*Terminé*
$\sum_{n=0}^{10}(u(n))$	1420.68
$\sum_{n=0}^{p}(u(n))$	$2100.\cdot(1.05)^p-2000.$

1 a. Donner la nature de la suite définie en ligne 1.

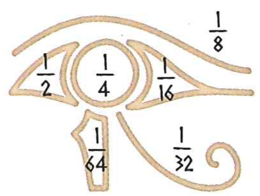
b. Expliquer ce qui est calculé en ligne 2.

c. Vérifier le résultat obtenu en ligne 3 et utiliser ce résultat pour retrouver celui en ligne 2.

2 En déduire le volume d'une production de 100 tonnes au départ, augmentant de 5 % par mois, stockée pendant 12 mois. *Arrondir à 10 tonnes près.*

35 L'œil d'Horus ou l'Oudjat

Au cours d'un combat, Seth, frère d'Isis et d'Osiris, découpa l'œil gauche de son neveu Horus en sept parties.
Mais Thot n'en retrouva que six morceaux qu'il assembla comme sur le schéma ci-contre.
Calculer la somme des six parties de l'Oudjat.
En déduire la partie manquante pour obtenir l'unité de l'œil d'Horus.



2 Sens de variation et limite

36 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse par un calcul de $u_{n+1} - u_n$.

1 La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante.

2 La suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 3n^2 - 2n + 1$ est monotone (c'est-à-dire toujours croissante ou toujours décroissante).

3 La suite (w_n) de terme général $w_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ est croissante.

37 QCM

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

1 La suite (u_n) géométrique de raison 1,5 et de terme initial 2 a pour limite :
a. 0 **b.** 2. **c.** $+\infty$.

2 La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}8^n$. Alors la limite de v_n, lorsque n tend vers $+\infty$, est :
a. 0. **b.** 0,8. **c.** $+\infty$.

3 Pour tout entier n, on pose :
$$S_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}2^n.$$
La suite (S_n) a pour limite :
a. 1. **b.** 1,25. **c.** $+\infty$.

38 Vrai ou faux ?

1 Toute suite croissante a pour limite $+\infty$.

2 Toute suite décroissante a pour limite 0.

39 Étude des variations d'une suite

Pour chaque suite (u_n) définie par son terme général, étudier son sens de variation.

1 a. $u_n = 0{,}1 \times 1{,}2^n$ **b.** $u_n = n^2 + 2n - 1$

2 a. $u_n = \dfrac{1}{2n+3}$ **b.** $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

40 Limite de q^n

1 Indiquer la limite de la suite de terme général q^n, suivant la valeur de q donnée.

a. $q = 2$ **b.** $q = \dfrac{1}{2}$ **c.** $q = 1 + \dfrac{10}{100}$

2 En utilisant la limite de q^n vue dans le cours, dire si, lorsque n est très grand, le nombre donné est très grand, très proche de zéro, ou très proche de 1.

$A = 12 \times 1{,}08^n$ $B = 1 - 0{,}98^n$ $C = \dfrac{1}{1{,}5^n}$

$D = \dfrac{1 - 0{,}4^n}{1 + 0{,}9^n}$ $E = 100 + 1{,}01^n$ $F = (1 - 0{,}9^n) \times 1^n$

41 Limite de suite géométrique

Soit une suite (u_n) géométrique de terme initial u_0 et de raison q. Dans chaque cas, déterminer la limite de u_n.

a. $u_0 = 1\,500$ et $q = 0{,}8$.
b. $u_0 = 5\,000$ et $q = 2{,}3$.
c. $u_0 = 3$ et $q = 1{,}12$.

42 Croissance ou décroissance ? TICE

Trois frères, Ugo, Vic et Walid, ont le même capital de base de 240 000 €.

- Ugo place ce capital à intérêts composés au taux annuel de 5 %, mais il doit payer une taxe de 2 % du capital et en retire chaque année 2 %.
- Vic investit son capital dans une entreprise, ce qui lui permet d'augmenter son capital de 20 % par an, mais il paye 30 % de taxes sur les intérêts acquis et utilise 14 % de son capital par an.
- Walid réalise un investissement industriel : son capital augmente ainsi de 15 % par an, mais il doit payer 10 % du capital en assurance et céder 40 % des intérêts acquis en taxes.

1 Pour chacun d'eux :

a. Modéliser leur capital, U_n, V_n et W_n, après n années de placement, l'exprimer en fonction de n et indiquer s'il croît ou s'il décroît.

b. Calculer leur capital acquis au bout de 5 ans.

c. Déterminer la limite de leur capital.

2 Les trois frères vérifient leurs calculs sur tableur. Donner les formules à écrire en ligne 3.

	A	B	C	D
1	n	Ugo	Vic	Walid
2	0			
3	1			

43 Loyer en augmentation

Maxime loue un studio pour un montant mensuel de 450 €. Son loyer, qui suit l'indice des loyers, augmente de 2 % par an, à la date anniversaire. Pour tout entier n, on note u_n le loyer mensuel au bout de n augmentations.

1 a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Exprimer u_n en fonction de n.

b. Quel est son sens de variation ? Quelle est sa limite ?

2 Si le taux d'augmentation se maintient, au bout de combien d'années le loyer mensuel dépasse-t-il 500 € ?
Voir AP page 31
On pourra utiliser : `Y1■450*1.02^X`

3 Maxime reste cinq années entières dans son studio. Calculer le montant total des loyers versés par Maxime.
Arrondir à 10 € près.

44 Déterminer un seuil ALGO

Soit la suite (u_n) géométrique de terme initial $u_0 = 100$ et de raison $q = 1{,}1$.

1 Exprimer u_n en fonction de n.

2 Déterminer le sens de variation et la limite de (u_n).

3 **a.** Expliquer pourquoi il existe un rang P tel que : pour tout entier n vérifiant $n \geqslant P$, on a $u_n > 500$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un tel rang P.

On pourra utiliser un algorithme comme celui présenté en page 20.

45 Marché en valeurs à long terme

En 2009, en France, il s'est vendu 7,5 millions de téléviseurs au prix unitaire moyen de 500 €.

Entre 2009 et 2010, le prix des téléviseurs a chuté de 15 % et le volume de ventes a augmenté de 13 %.

Définition Le marché en valeurs est le produit du prix unitaire moyen par le volume de ventes.

Marché en valeurs = prix unitaire × volume de ventes

1 Calculer le marché en valeurs des téléviseurs en 2009, puis en 2010.

2 On suppose que les taux d'évolution du prix unitaire moyen et du volume de ventes se maintiennent dans les années à venir.

a. Modéliser le prix unitaire, en euro, et le volume de ventes, en million, par deux suites (U_n) et (V_n), pour l'année $2009 + n$.

Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b. Montrer que le marché en valeurs W_n, en $2009 + n$, exprimé en million d'euros, suit une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c. Déterminer le sens de variation et la limite, à long terme, de la suite (W_n). Interpréter.

3 Comparer avec l'Allemagne, où le prix unitaire moyen diminue de 5 % et le volume des ventes augmente de 13 %.

46 Chiffre d'affaires

Un fabricant de jouets décide de faire une promotion sur l'un de ses jouets phare pour augmenter son chiffre d'affaires, qu'il renouvèle chaque mois.

Le mois précédant la promotion, il vend 2 400 de ces jouets à 15 € l'unité. Comme promotion, il décide de baisser le prix de 10 % en espérant augmenter ses ventes de 11 %.

1 Calculer son chiffre d'affaires sur ce jouet le mois précédant la promotion, puis après la première promotion.

2 On note C_n le chiffre d'affaires à la n-ième promotion.

a. Exprimer C_n en fonction de n. Commenter.

b. Calculer le chiffre d'affaires total sur ce jouet après quatre mois de promotion.

47 Dépréciation d'une machine

Une entreprise achète en début 2010 une machine-outil neuve pour 220 000 €. Le service comptable observe que, sur l'année 2010, la machine se déprécie d'environ 15 %.

On suppose que cette baisse annuelle de 15 % perdure à partir de 2010.

On note v_n la valeur estimée de la machine au bout de n années de fonctionnement à partir de 2010.

1 **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. En déduire v_n en fonction de n.

c. Calculer la valeur estimée de la machine en 2015. *Arrondir à l'euro près.*

2 Déterminer le sens de variation et la limite de (v_n). Interpréter les résultats.

3 À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la machine aura une valeur inférieure à 50 000 €.

48 Injection de médicament ALGO

On injecte à un malade une dose de 2 cm³ d'un médicament. On constate que, chaque heure, le volume de médicament contenu dans le corps du malade diminue de 8 %.

1 Calculer le volume de médicament restant au bout de 1 h, 2 h, puis 24 h. *Arrondir à 0,001 cm³ près.*

2 Pour tout entier n, on note v_n le volume de médicament présent dans le sang du malade au bout de n heures. Le volume est en cm³.

a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser la raison. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Déterminer le sens de variation et la limite de (v_n). Interpréter les résultats.

3 Pour rester efficace, le volume de médicament présent dans le sang du malade doit rester supérieur à un certain seuil S, dépendant du poids du malade.

En utilisant un algorithme, comme vu en page 20, déterminer le nombre d'heures nécessaires pour que le volume de médicament présent dans le sang devienne inférieur ou égal à :

a. 1 cm³. **b.** 0,5 cm³. **c.** 0,001 cm³.

3 Suite arithmético-géométrique

49 QCM

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

Un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On ajoute 100 € à la fin de chaque année. On considère la suite (u_n) des capitaux, en euro, obtenus au bout de n années.

1 Sur la feuille de calcul, en B3, on peut entrer la formule :

a. =0,3*B2+100

b. =1,03*B2+100

c. =1,03*(B2+100)

	A	B
1	n	u_n
2	0	1000
3	1	

2 Le terme u_2 vaut :

a. 1 060,90. **b.** 1 163,90. **c.** 1 263,90.

3 Le capital placé dépasse 1 500 € au bout de :

a. 4 ans. **b.** 5 ans. **c.** 6 ans.

50 Modélisation correcte ou non ?

Sinon, corriger.

a. La population d'une région rurale diminue de 1,7 % par an et, chaque année, 100 jeunes retraités viennent s'installer. La population annuelle u_n se modélise par :

$$u_{n+1} = u_n - 1{,}7\,u_n + 100.$$

b. Chaque mois, la production d'une usine augmente de 5 %, mais 2 % de cette production est défectueuse et il se perd 50 objets. La production mensuelle effective u_n se modélise par :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05\,u_n - 0{,}021\,u_n - 50.$$

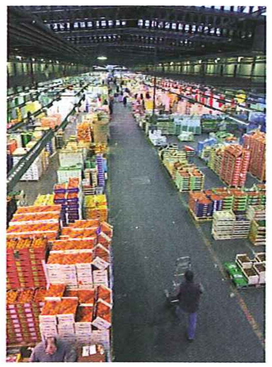
51 Trouver une formule de récurrence

Modéliser chaque situation à l'aide d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence et son terme initial u_0. Puis calculer les quatre termes suivants.

a. Une ville compte initialement 10 000 habitants. Chaque année, elle s'accroît naturellement de 5 %, mais 2 000 personnes la quittent et 300 personnes arrivent.

b. Un capital de 5 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Après dépôt des intérêts en fin d'année, on retire 500 €.

c. Un stock de nourriture de 60 tonnes au départ diminue chaque mois : 3 % sont perdus pour cause de pourriture, 15 % sont consommés et on achète 4,3 tonnes par mois.



52 Calcul de premiers termes avec tableur TICE

Un champ de 6 000 m², soit 0,6 hectares, est envahi par des mauvaises herbes. Au départ, elles couvrent 10 % de la superficie du champ.

Chaque mois, elles prolifèrent à raison de 50 % de la superficie qu'elles occupaient le mois précédent et colonisent 140 m² supplémentaires.

1 **a.** Justifier la formule entrée en cellule B3 sur la feuille de tableur ci-dessous :

	A	B	C
1	n	S_n	après traitement
2	0		
3	1	=B2+B2*0,5+140	

b. Modéliser par une relation de récurrence la surface S_n envahie par les mauvaises herbes le mois n.

Indiquer la valeur S_0 à placer en B2.

c. Calculer la superficie envahie le 4ᵉ mois.

2 Tous les mois, on applique un traitement sur la surface envahie par les mauvaises herbes.

Il permet d'en supprimer 30 %.

a. Indiquer la formule à entrer en cellule C3 pour connaître la surface envahie par les mauvaises herbes après le traitement et copier vers le bas.

b. Calculer la surface envahie par les mauvaises herbes après quatre mois de traitement. *Arrondir à 10 cm² près.*

53 Calcul de premiers termes

Arthur a reçu 200 000 € en héritage. Il décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 6 %. Mais il doit payer 27 % des intérêts acquis en impôts et il retire chaque année 9 000 €.

On note C_n le capital d'Arthur au bout de n années de placement et retrait. Ainsi, $C_0 = 200\,000$.

1 **a.** Vérifier que, après un an, le capital est de 199 760 €. Indiquer les opérations effectuées.

b. En utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$ ou $\boxed{\text{Rép}}$ des calculatrices, calculer les capitaux des quatre premières années de placement. *Arrondir à l'euro près.*

2 Au lieu de 9 000 €, quelle somme Arthur doit-il retirer pour conserver son capital d'une année sur l'autre ? Faire des essais à l'aide de la calculatrice.

54 Suite auxiliaire géométrique

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$. Dans chaque cas, montrer que la suite (v_n) est géométrique en obtenant une relation de la forme :

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

a. $u_0 = 10$ et pour tout entier n :
$u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $v_n = u_n - 1$.

b. $u_0 = 500$ et pour tout entier n :
$u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 100$ et $v_n = u_n - 2\,000$.

55 Étude d'une clientèle

Le service clientèle d'un supermarché a organisé une enquête. Il a modélisé la fréquentation du magasin :
- 8 000 personnes sont venues faire leurs achats dans ce supermarché au cours du 1er mois ;
- chaque mois suivant, 70 % de la clientèle du mois précédent reste fidèle au magasin, et 3 000 nouveaux clients apparaissent.

Remarque Dans ce modèle, le nombre de clients peut ne pas être entier.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de clients venus au cours du n-ième mois d'enquête.
Ainsi, $u_1 = 8\,000$.

1 a. Calculer u_2 et u_3, en écrivant avec soin les opérations, sans établir la relation de récurrence.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 3\,000.$$
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :
$$v_n = 10\,000 - u_n.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
Préciser la valeur v_1.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

b. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_n = 10\,000 - 2\,000 \times 0{,}7^{n-1}.$$

3 Selon ce modèle, calculer le nombre de clients le 12e mois de l'enquête. *Arrondir ce résultat à l'entier près.*

56 Retraits sur un compte rémunéré

Au 1er janvier 2000, Léo a placé 1 000 € sur son compte rémunéré à intérêts composés à 2 % par an.
À partir de 2001, Léo retire 100 € à chaque 1er janvier.
Pour tout entier n, on note u_n le solde au 2 janvier de l'année $2000 + n$, en euros. Ainsi, $u_0 = 1\,000$.

1 a. Calculer les soldes u_1 et u_2 de ce compte.

b. Établir la relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.

c. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant en arrondissant au centime d'euro près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1 000					

Aide calculatrice Voir cours page 18

Sur Casio	Sur TI™

Menu RECUR
Définir la suite :
`Recursion`
`an+1▤1.02×an-100`
Dans SET, définir le terme initial :
`Table Setting n+1`
`Start:0`
`End :5`
`a0 :1000`
	En mode SUITE
	Dans f(x), entrer :
	`Graph1 Graph2 Graph3`
	`nMin=0`
	`u(n)▤1.02*u(n-1)-100`
	`u(nMin)▤1000`
	Dans 2nde fenêtre (déf table), tabuler par pas de 1 à partir de 0.

d. La suite (u_n) paraît-elle croissante ? décroissante ? Interpréter.

2 Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 5\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3 a. Calculer la valeur du compte de Léo en 2010, en arrondissant à 0,01 euro près.

b. À partir du 1er janvier de quelle année le compte de Léo aura-t-il un solde négatif pour la première fois ?
On utilisera la calculatrice.

57 Autres retraits

Matéo a placé 5 000 € en janvier 2010 sur un compte rémunéré à 4,5 % et retire 360 € au 1er janvier à partir de 2011.

1 Exprimer le solde u_n au 2 janvier de l'année $2010 + n$, en euro, par une relation de récurrence.

2 Pour tout entier n, on pose $v_n = 8\,000 - u_n$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.
Calculer le solde de Matéo au 2 janvier 2020, à 1 € près.

58 Versements sur un compte rémunéré

Armel verse 2 000 € sur son compte à chaque 1er janvier à partir du 1er janvier 2012. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %. Les intérêts sont versés chaque année le 31 décembre. Pour tout entier n, on note u_n le montant présent sur le compte au 1er janvier de l'année $2012 + n$, en euro. Ainsi, $u_0 = 2\,000$.

1 a. Calculer u_1, u_2 et u_3. *Arrondir à 0,01 € près.*

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2 Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 50\,000$.

a. Calculer les trois premiers termes v_0, v_1 et v_2.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Montrer que pour tout entier n :
$$u_n = 52\,000 \times 1{,}04^n - 50\,000.$$

3 À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour qu'Armel dispose d'au moins 15 000 € sur son compte.

59 Déterminer un seuil ALGO

Un jardin est envahi par des chardons. Un dimanche, ceux-ci couvrent 300 m² de pelouse. Puis chaque semaine, la surface envahie par les chardons augmente :
- de 4 % par prolifération des racines,
- de 13 m² dus aux graines envolées.

Pour tout entier n, on note u_n l'aire de la pelouse, en mètre carré, envahie par les chardons au bout de n semaines.
Ainsi, $u_0 = 300$.

1 Justifier que, pour tout entier n : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 13$.

Dans la suite, on cherche à savoir au bout de combien de semaines les chardons auront envahi plus de 600 m².

2 1re méthode : à l'aide d'un algorithme
On veut utiliser l'algorithme incomplet suivant :

```
Stocker 0 dans N et 300 dans U
TantQue … … faire
   stocker … … … … dans N
   stocker … … … … dans U
FinTantQue
Afficher N
```

Le compléter, le programmer et résoudre le problème.

3 2e méthode : en utilisant une suite auxiliaire
On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 325$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Préciser le premier terme v_0 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier n : $u_n = 625 \times 1{,}04^n - 325$.

c. Résoudre le problème en tabulant la suite (u_n) à la calculatrice.

4 3e méthode : en utilisant un tableur

a. Quelle formule écrire en cellule B3 afin de calculer les termes de la suite (u_n) en utilisant la formule de récurrence ?

	A	B	C
1	n	u_n	u_n
2	0	300	
3	=A2+1		

b. Quelle formule écrire en C2, utilisant la formule établie en **3 b.** ?

c. Expliquer le test conditionnel écrit en D3.

	A	B	C	D
1	n	u_n	u_n	test conditionnel
2	0	300		=SI(B2>=600;"envahi";"pas encore")
3	=A2+1			=SI(B3>=600;"envahi";"pas encore")

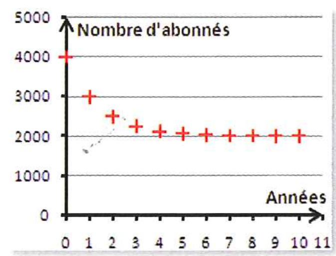
À partir de quelle valeur de n s'affichera le message « envahi » ?

60 Prévision et comportement à l'infini

Le service commercial d'un journal a constaté que, chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés, mais qu'environ 50 % des abonnements précédents ne sont pas renouvelés.
L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnements si cette situation perdure, sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1\,000$.

1 Expliquer pourquoi u_n est une approximation du nombre d'abonnés au bout de n années.

2 On a représenté ci-contre les premiers termes de la suite (u_n).
Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?



3 Pour tout entier n, on pose : $v_n = u_n - 2\,000$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser la valeur v_0.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
Justifier que, pour tout entier n :
$$u_n = 2\,000 + 2\,000 \times 0{,}5^n.$$

4 a. Montrer que pour tout entier n :
$$u_{n+1} - u_n = -1\,000 \times 0{,}5^n.$$

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
Interpréter le résultat.

5 Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
Donner une interprétation de cette limite.

Accompagnement personnalisé

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Montrer qu'une suite (u_n) est **géométrique**.	Il s'agit d'obtenir une relation de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$. Le coefficient multiplicateur q est la raison de la suite (u_n). Souvent, on exprime u_{n+1} en faisant apparaître u_n et on transforme l'écriture par une factorisation jusqu'à obtenir une telle relation. Penser à utiliser $k^{n+1} = k \times k^n$, pour tout réel k.
Étudier les **variations** d'une suite (u_n).	Il s'agit, pour tout entier n, de comparer u_{n+1} et u_n. Souvent, **on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$** : ▸ si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante**. ▸ si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante**. Penser à factoriser pour utiliser la règle des signes !
Exprimer le terme u_n **en fonction de n**.	▸ Si la suite (u_n) est **géométrique de raison q**, alors, pour tout entier n : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Dans ces formules, on remplace u_0, u_1 et q par leurs valeurs. ▸ Si u_n est la **somme** de termes consécutifs d'une suite géométrique de **raison $q \neq 1$**, on utilise la formule : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$. ▸ Si on connaît une **suite (v_n) auxiliaire, liée à (u_n)** par une relation de la forme $u_n = v_n - a$, où a est une constante connue, on étudie la suite (v_n) et on remplace v_n par son expression en fonction de n, pour obtenir u_n : $u_n = v_n + a$.
Déterminer **le plus petit entier n** tel que $u_n > A$.	Si on ne peut pas résoudre de façon exacte l'inéquation $u_n > A$, on utilise la calculatrice ou un tableur pour calculer les termes successifs $u_1, u_2, \ldots$ jusqu'à obtenir un **terme supérieur** à A. On peut également utiliser un algorithme (page 20) ou un test conditionnel (page 29).

Exercice guidé

61 L'entreprise Iron SA exploite un filon de minérai de fer depuis 1950. La première année d'extraction, l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer.
Cependant, depuis 1950, en raison des difficultés croissantes d'extraction et de l'appauvrissement du filon, les quantités de fer extraites diminuent de 1 % par an.
Pour tout entier n, on appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $1950 + n$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

1 Justifier que $T_1 = 19\,800$, puis calculer T_2 et T_3.

2 **a.** Quelle est la nature de la suite (T_n) ?
En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
b. Quelle est la quantité extraite en 2008 ?

3 Montrer que, pour tout entier n, la quantité totale extraite entre 1950 et l'année $1950 + n$ s'exprime en fonction de n par : $S_n = 2\,000\,000 \times (1 - 0{,}99^{n+1})$.

4 En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 tonnes de fer.
Déterminer à la calculatrice l'année où, théoriquement, le filon sera épuisé.

Aide

1 Diminuer une valeur V de t % revient à utiliser :
$$V - \frac{t}{100} \times V.$$
Le coefficient multiplicateur est $CM = 1 - \dfrac{t}{100}$.

2 **a.** Lorsqu'une suite est géométrique de raison q, définie à partir de $n = 0$, on peut écrire : $u_n = u_0 \times q^n$.
b. L'année 2008 correspond à $n = 2008 - 1950 = 58$.

3 On demande la quantité **totale**, donc on doit calculer une **somme**. La quantité totale est : $S_n = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.
Factoriser par T_0 et rechercher le **nombre de termes**, puis utiliser la formule :
$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

4 À partir de la formule établie en fonction de n, tabuler la somme S_n à la calculatrice :

```
\Y1■2000000*(1-0
.99^(X+1))
```


Accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

Savoir distinguer variation absolue et variation relative

62 En 2010, le nombre de voitures immatriculées à Pékin est de 7,8 millions, soit 750 000 de plus qu'en 2009. Les ventes de tout-terrains en Chine en 2010 ont progressé de 24 % pour atteindre 850 000 ventes.

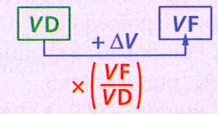
1 Calculer la variation relative du nombre de voitures immatriculées à Pékin entre 2009 et 2010.

2 Calculer le nombre de voitures immatriculées à Pékin en 2011 :
a. si la variation absolue se maintient ;
b. si la variation relative se maintient.

3 Calculer le nombre de ventes de tout-terrains en Chine en 2009.

Aide

Une grandeur passe d'une **valeur de départ *VD*** à une **valeur finale *VF***. Alors :



▸ sa **variation absolue** est la différence $\Delta V = \text{Valeur finale} - \text{Valeur de départ}$;
▸ sa **variation relative** est le quotient :
$$\frac{\text{variation absolue}}{\text{valeur de départ}} = \frac{\Delta V}{VD} = \frac{VF - VD}{VD};$$
▸ le **taux d'évolution** en % est :
$$t = \frac{VF - VD}{VD} \times 100 = CM \times 100 - 100.$$

Savoir si une suite numérique peut être arithmétique ou géométrique

63 Dans chaque situation, les consommations sont-elles les premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique ?

1 La consommation annuelle de poisson de Kévin est passée de 11,4 kg en 1985 à 12,7 kg en 1995, puis à 14 kg en 2005.

2 Marcel consommait annuellement 90 kg de pain en 1970, puis 54 kg en 1990 et 32,4 kg en 2010.

3 Julie a consommé 20 kg de chocolat en 2009.
Sa consommation a doublé en 2010, puis triplé en 2011.

Aide

• Si (u_n) est **arithmétique**, alors la **différence** entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est **constante**.
Si (u_n) est **géométrique**, alors le **quotient** entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est **constant**.
• Si on connaît les trois premiers termes u_0, u_1 et u_2, on calcule les différences successives ou les quotients successifs pour émettre une conjecture.

Savoir calculer des capitaux placés à intérêts simples ou composés

64 **Pour chaque situation, indiquer la bonne réponse.**

1 5 000 € sont placés à intérêts simples au taux annuel de 2,3 %. Le capital acquis après n années de placement est modélisé par une suite :
a. géométrique de raison 1,023.
b. arithmétique de raison 115.
c. ni l'une, ni l'autre.

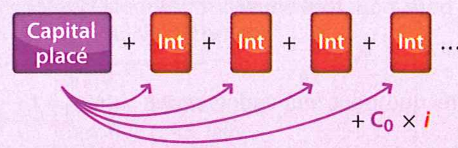
2 5 000 € sont placés à intérêts composés au taux annuel de 2,3 %. Le capital acquis après n années de placement est modélisé par une suite :
a. géométrique de raison 1,023.
b. arithmétique de raison 115.
c. ni l'une, ni l'autre.

3 Un prêteur propose un placement à intérêts composés au taux mensuel de 1,6 %.
Le taux annuel équivalent est :
a. 19,2 %. **b.** environ 21 %. **c.** 16 %.

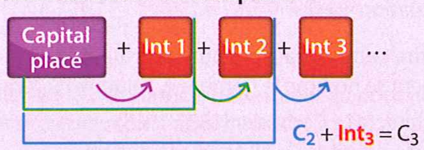
Aide

On note i le taux (décimal) annuel d'un placement.
Par exemple, pour 2,75 % : $i = 0{,}0275$.

▸ **Placement à intérêts simples**



▸ **Placements à intérêts composés**



Accompagnement personnalisé

Savoir traduire une situation par une relation de récurrence

65 Traduire chaque procédé suivant par une relation de récurrence :

a. Prendre 100 ; à chaque étape, augmenter le nombre obtenu précédemment de 20 % et soustraire 10.

b. Prendre 50 ; à chaque étape, ajouter 10, diminuer de 8 %, puis ajouter 5.

c. Prendre 2 000 ; à chaque étape, augmenter de 20 %, soustraire 30 % de l'augmentation, puis ajouter 5.

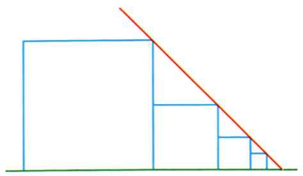
Aide

Ne pas aller trop vite pour établir une relation de récurrence !
Si on demande, dans une première question, de calculer les premiers termes, c'est pour faire comprendre les opérations du procédé permettant de passer d'un terme au suivant.

Pour aller plus loin

66 Modéliser

Dans la situation ci-contre, le plus grand carré est de côté 1. Chaque carré suivant a un côté qui mesure la moitié du précédent.



Modéliser la suite des côtés des carrés, puis la somme des côtés de n carrés et déterminer la limite de cette somme. Faire le lien avec la droite tracée.

67 Raisonner, rechercher

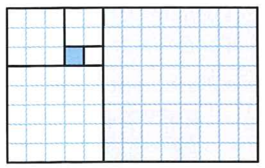
On considère la suite (F_n) dite « de **Fibonacci** », définie sur $\mathbb{N}$ par $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n .$$

1 Sur tableur
Quelle formule faut-il écrire en cellule B4, et recopier vers le bas, pour obtenir les termes de cette suite ?
Donner le 14ᵉ terme.

	A	B
1	n	F_n
2	0	1
3	1	1
4	2	2

2 a. Faire le lien entre la suite (F_n) et le dessin ci-contre.



b. On pose, pour tout entier naturel n : $\phi_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

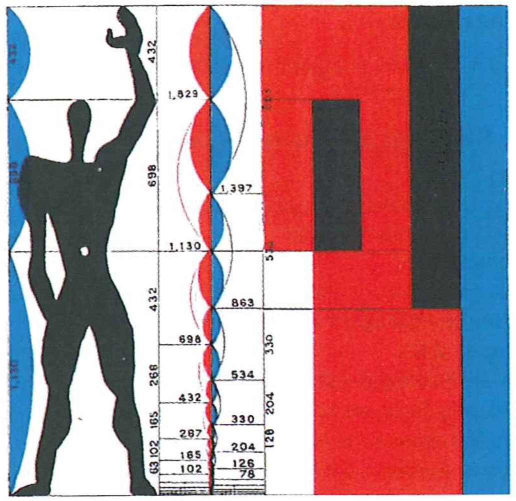
Montrer que, pour tout entier naturel n, $\phi_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\phi_n}$.

On admet que cette suite (ϕ_n) admet une limite ϕ, solution de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Résoudre cette équation pour déterminer ϕ.
Comment se nomme le nombre ϕ, solution de l'équation ?

3 L'architecte Le Corbusier (1887-1965) utilisait, entre autres, deux suites : la suite rouge de termes initiaux 6 et 9 et la bleue, de termes initiaux 18 et 30.

Rechercher ces suites sur le Modulor :



68 Démontrer

1 Théorème Pour tout réel $q \in]0, 1[$, on a $q^n \in]0 ; 1[$.

2 Théorème Soit (u_n) une suite **arithmético-géométrique** définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = q \times u_n + a \end{cases} \quad \text{avec } q \text{ strictement positif.}$$

- Si $u_1 > u_0$, alors la suite (u_n) est **croissante.**
- Si $u_1 < u_0$, alors la suite (u_n) est **décroissante.**

69 À la recherche d'une généralisation

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par u_0 et $u_{n+1} = q \times u_n + a$, avec $q \neq 1$, $q \neq 0$ et $a \neq 0$ connus.
Soit ℓ la solution de l'équation $x = qx + a$.
On pose $v_n = u_n - \ell$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Montrer que, si $0 < q < 1$, alors (u_n) a pour limite ℓ.

Réussir au Bac

70 Évolution comparée de deux populations

Les populations de deux villes A et B sont respectivement de 200 000 et 150 000 habitants.
Les projections pour les prochaines années prévoient les évolutions suivantes :
- **ville A :** diminution annuelle de 3 % ;
- **ville B :** augmentation annuelle de 5 %.

Pour tout entier n, on note respectivement a_n et b_n les populations des villes A et B au bout de n années.

1 Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques. Préciser leur raison.

2 Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

3 Tabuler les suites (a_n) et (b_n) à la calculatrice par pas de 1. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années la population de la ville B dépassera celle de la ville A.

```
\Y1■200000*0.97^
X
\Y2■150000*1.05^
X
```

71 Comparaison de deux modèles

Après le Grenelle de l'environnement, des décisions ont été prises pour limiter, dans les années à venir, les émissions de gaz à effet de serre (GES).
Le protocole de Kyoto prend pour base les valeurs de l'année 1990 pour chaque pays, soit 563,9 Mteq de CO_2 en France (Mteq : million de tonnes équivalents).
L'objectif est une baisse de 80 % des émissions de GES en 2050, par rapport à 1990.
Les émissions de GES sont passées de 547 Mteq de CO_2 en 2006 à 527 Mteq de CO_2 en 2008.

Question préliminaire
En 2011, en France, le ministère chargé de l'Écologie a fixé des objectifs par étapes : par rapport à 1990, baisse de 25 % en 2020, de 40 % en 2030, de 60 % en 2040, pour atteindre une baisse de 80 % en 2050.

a. Recopier et compléter le tableau suivant par les objectifs fixés pour les émissions de GES en Mteq de CO_2 :

1990	2008	2020	2030	2040	2050
563,9	527		a	b	c

b. Pour les années 2030, 2040, 2050, les nombres a, b et c sont-ils des termes d'une suite arithmétique ? géométrique ?

1 Premier modèle
On suppose que la baisse annuelle de 10 Mteq constatée entre 2006 et 2008 se maintient dans les années à venir.
On note u_n les émissions de GES, en France, en Mteq de CO_2, en 2008 + n.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_{42}.
L'objectif prévu en 2050 sera-t-il atteint ?

2 Second modèle
On suppose que la baisse, d'environ 2 % par an entre 2006 et 2008, se maintient dans les années à venir.
On note v_n les émissions de GES, en France, en Mteq de CO_2, en 2008 + n suivant ce modèle.

a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Exprimer v_n en fonction de n. Calculer v_{42}.
L'objectif prévu en 2050 sera-t-il atteint ?

c. Les objectifs de 2020 et 2030 seront-ils atteints ?

3 Critique d'un modèle

a. Pour le premier modèle : que se passera-t-il en 2061 ? Que penser d'un tel modèle ?

b. Pour le second modèle : quelle sera la limite de la suite (v_n) ? En quelle année l'objectif prévu pour 2050 sera-t-il atteint ? *On utilisera la calculatrice et on présentera avec soin le raisonnement employé.*

72 Capital placé à intérêts composés (ALGO)

Hélène dispose d'un capital de 15 000 € qu'elle place à intérêts composés au taux annuel de 2,25 %.

1 Quel est le montant du capital disponible au bout d'une année de placement ? de deux années ?

2 Pour tout entier n, on note C_n le capital obtenu au bout de n années de placement, en euro.

a. Justifier que, pour tout entier n :

$$C_n = 15\,000 \times 1{,}0225^n .$$

b. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (C_n). Interpréter les résultats.

3 Hélène a des projets d'achat. Pour tout achat d'un montant S, elle souhaite connaître le nombre d'années de placement nécessaire pour que son capital dépasse S.
Elle construit l'algorithme ci-dessous.
Est-il correct ? Sinon, le corriger.

```
Entrer S
Stocker 0 dans N et 15 000 dans C
Tant Que C < S, faire
   stocker N+1 dans N
   stocker C*2,25/100 dans C
FinTantQue
Afficher N
```

4 À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le capital aura doublé.

5 Est-il envisageable, à l'échelle d'une vie humaine, qu'Hélène dispose de 50 000 € ?

73 Sommes et calcul formel TICE

Zoé, étudiante australienne, s'installe en France pour ses études et souhaite louer un piano pour 150 € mensuels à partir du 1er janvier de la première année.

On lui propose deux types de contrat de location :

• **Contrat A :** augmentation de la location mensuelle de 6 € à chaque 1er janvier.

• **Contrat B :** augmentation de la location mensuelle de 4 % à chaque 1er janvier.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n le coût de la location mensuelle, selon le contrat A et b_n selon le contrat B, pour la n-ième année d'utilisation.

Les coûts sont en euro.

1 a. Établir la nature des suites (a_n) et (b_n), puis l'expression de a_n et celle de b_n en fonction de n.

b. Calculer le coût annuel de cette location la 5e année d'utilisation, suivant ces deux contrats.

2 Zoé envisage de louer ce piano pendant cinq ans, le temps de son séjour en France.

On note :

$$A_5 = a_1 + ... + a_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i \quad \text{et} \quad B_5 = b_1 + ... + b_5 = \sum_{i=1}^{5} b_i$$

a. Zoé a effectué les calculs suivants à l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici, TI-Nspire™) :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(150+6\cdot(i-1)\right)$	$3\cdot n^2+147\cdot n$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(150\cdot(1.04)^{i-1}\right)$	$3750.\cdot(1.04)^n-3750.$

En utilisant le résultat du logiciel, calculer A_5.

b. Démontrer que : $B_5 = 3\,750 \times (1{,}04^5 - 1)$.

c. Pour chaque contrat, calculer le montant total déboursé par Zoé pour les cinq années de location. *Arrondir à l'euro près.* Comparer ce résultat à 12 000 €, prix au comptant de ce piano.

74 Un jeu de fou

« Vous avez gagné à un jeu et je vous propose de vous donner 300 000 € chaque jour pendant un mois.

En contrepartie, je vous demande… peu de choses :

le 1er du mois, vous rendez un centime d'euro ;

le 2e du mois, vous rendez deux centimes ;

le 3e du mois, vous rendez 4 centimes ;

et ainsi, chaque jour, vous doublez la somme rendue le jour précédent.

Êtes-vous assez fou pour refuser ?

Même un mois de février ? »

75 Épargne en France

En 2000, l'épargne par habitant en France était de 2 160 € pour atteindre 3 197 € en 2010.

On note u_n le montant de l'épargne par habitant en euro constant en $2000 + n$.

On modélise l'épargne par une suite géométrique, de premier terme $u_0 = 2\,160$.

1 a. Justifier qu'en moyenne, la croissance annuelle de l'épargne est de 4 %.

b. Calculer l'épargne en 2002 par ce modèle.

Comparer avec la valeur réelle de 2 658 €.

c. Avant la première crise de 2003, la progression annuelle de l'épargne était en moyenne de 11 % sur les années 2001 et 2002.

Vérifier ce taux d'évolution.

Si ce taux d'évolution s'était maintenu, quel serait le montant de l'épargne en 2010 ?

2 On suppose que dans les années après 2010, le montant de l'épargne progresse de 4 % chaque année.

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année où l'épargne atteindra 4 000 €.

3 Durant ces 10 années, le revenu disponible brut des ménages (RDB) a augmenté de 3 % en moyenne par an. L'épargne est une part du RDB. Montrer que la part de l'épargne dans le RDB se modélise par une suite géométrique dont on précisera la raison et le sens de variation.

76 Importations et limite de stock

Une entreprise importe des papayes afin de fabriquer de l'extrait lyophilisé.

Elle fabrique 500 kg d'extrait au mois de janvier.

À la fin du mois, il se vend 4 % de la production mensuelle et le reste est stocké au fur et à mesure. Du fait d'une baisse de la demande, la production mensuelle diminue de 8 % par mois.

Pour tout entier n, on note u_n la quantité restante en fin de mois en kg et S_n le stock après n mois de diminution, c'est-à-dire : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1 a. Justifier que $u_1 = 441{,}6$. Calculer u_2.

b. Déterminer la formule de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

c. Montrer que $S_n = 6\,000 \times (1 - 0{,}92^{n+1})$.

2 Quelle est la limite de (u_n) ? Interpréter.

Quelle est la limite de (S_n) ? Interpréter.

3 a. La quantité stockée peut-elle atteindre 10 tonnes ?

b. Déterminer au bout de combien de mois la quantité stockée dépasse 4 tonnes.

Combien de kg d'extrait seront alors vendus ?

77 La course d'Achille et la tortue

Situation

Le fougueux Achille court à une vitesse de 14 m/s, au moins comme le kényan Noah Ngeny. Et la tortue « court » à 0,25 km/h, soit 0,07 m par seconde.

Achille, par générosité, laisse la tortue partir à 700 m devant lui.

Action

Ils partent en même temps. Pour Zénon, lorsqu'Achille arrive à l'endroit d'où est partie la tortue, la brave bête, pas impressionnée, a parcouru du chemin. Dès qu'Achille arrive à l'endroit où était la tortue, elle est plus loin ! Et ainsi de suite ! Achille n'en finit pas de parcourir du chemin pour rattraper la tortue, pendant, dixit Zénon, un temps infini, et ne peut la dépasser.

Modélisation

Soit u_n la distance parcourue, en mètre, par Achille à l'étape n pour atteindre l'endroit où était la tortue.

Ainsi, $u_1 = 700$.

a. Calculer la distance parcourue par la tortue pendant ce temps-là. En déduire u_2.

b. Exprimer, en fonction de u_n, la distance u_{n+1} parcourue par la tortue pendant qu'Achille parcourt la distance u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

c. Exprimer en fonction de n la somme des distances parcourues par Achille :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

d. Déterminer la limite de (S_n).

Conclusion

Interpréter le résultat.

Quelle est la « faille » dans le paradoxe de Zénon ?

Histoire Zénon d'Élée, né vers 495 avant J.-C., est un philosophe grec, maître dans l'art de la dialectique.
Il professait la doctrine de « l'unité absolue et continue » et donc niait l'existence de la divisibilité du mouvement.
Mais c'est Aristote qui, en les réfutant, a permis de connaître les paradoxes de Zénon. Ces paradoxes ont montré que, si on divise la distance, on divise aussi le temps de parcours. Au final, le rapport, c'est-à-dire la vitesse, se conserve.

78 Épargne et consommation des ménages

Un ménage épargne 20 % de son revenu annuel et consomme le reste. Son revenu pour l'année 2010 est de 40 000 €.

N'étant pas optimiste, ce ménage décide de réduire, chaque année, de 2,5 % la part de sa consommation dans son revenu annuel, bien que son revenu augmente de 3 % par an.

Pour tout entier n, on note Y_n le revenu et C_n le montant de sa consommation, en $2010 + n$.

1 Calculer le revenu et la consommation en 2011, puis en 2012.

2 Déterminer la nature de la suite (Y_n).

En déduire l'expression de Y_n en fonction de n.

3 a. Justifier que la consommation en 2010 + n peut s'écrire, pour tout entier n : $C_n = 0{,}8 \times 0{,}975^n \times Y_n$.

b. Exprimer alors C_n en fonction de n. En déduire le sens de variation de la consommation de ce ménage.

c. Déterminer la limite de C_n lorsque n devient grand.

On parle alors de « consommation à long terme ».

79 Suite de versements sur un compte ALGO

PARTIE A Situation théorique

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1000 \\ v_{n+1} = v_n \times 1{,}005 + 30 \end{cases}.$$

On donne l'algorithme suivant :

```
Entrées     : Deux nombres entiers S et N
Traitement  : Pour K allant de 1 à N
                Affecter à S la valeur S × 1,005
              FinPour
Afficher    : S
```

1 Calculer v_1 et donner la valeur de v_4 arrondie au millième près.

2 Faire fonctionner l'algorithme ci-dessus pour $S = 1\,000$ et $N = 4$. Donner, dans un tableau, les résultats obtenus au fur et à mesure pour S, suivant la valeur de K.

Que permet d'obtenir cet algorithme ?

3 Transformer l'algorithme proposé pour qu'il affiche en sortie finale la valeur v_4, pour $S = 1\,000$ et $N = 4$.

PARTIE B Situation pratique

On place 1 000 € sur un compte qui rapporte 0,5 % par mois à intérêts composés. Ainsi, chaque mois, les intérêts s'ajoutent au capital. Chaque mois, on verse 30 € de plus et on ne peut rien retirer pendant 5 ans.

1 a. Vérifier que, à la fin du premier mois, le capital acquis est de 1 035 €.

b. Calculer le capital acquis à la fin du 2e mois.

2 Donner l'algorithme qui permet d'afficher en sortie finale le capital sur ce livret à la fin de l'année de placement.

80 Variation d'un inventaire TICE

Dans une bibliothèque, l'inventaire en fin 2011 indique un effectif de 11 500 ouvrages. Chaque année, le nombre d'ouvrages égarés correspond à 10 % des ouvrages de l'année précédente et la bibliothèque achète 800 nouveaux ouvrages.

PARTIE A Feuille de calcul

On prépare une feuille de calcul, où il sera possible de changer le nombre d'achats annuels.

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Achat annuel
2	2011	0	11500	800
3	2012	1	=	

Indiquer la formule à écrire en cellule C3 pour obtenir le nombre d'ouvrages en fin 2012 et, par recopie vers le bas, obtenir le nombre d'ouvrages pour les années suivantes.

PARTIE B Étude théorique

On note u_n le nombre d'ouvrages dans cette bibliothèque à la fin $2011+n$. Ainsi, $u_0 = 11\,500$.

1 a. Calculer u_1 et u_2.
Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?
b. Établir la relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2 On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n = u_n - 8\,000}$.
a. Calculer v_0.
b. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$.
c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3 Parmi les trois formules suivantes, quelle est celle donnant u_n en fonction de n ?
a. $u_n = 11\,500 \times 0{,}9^n$
b. $u_n = 3\,500 \times 0{,}9^n + 8\,000$
c. $u_n = 8\,000 - 3\,500 \times 0{,}9^n$

PARTIE C Long terme

a. Calculer le nombre d'ouvrages en fin 2016, arrondi à l'unité près.
b. Peut-on obtenir moins de 8 000 ouvrages à long terme ?

PARTIE D Comparaison

Une autre analyse a permis d'établir que le nombre d'ouvrages égarés est de 1 050 ouvrages par an. La politique d'achat de 800 nouveaux ouvrages est conservée.
On note v_n le nombre d'ouvrages fin $2011+n$.
a. Exprimer v_n en fonction de n.
b. D'après ce modèle, le nombre d'ouvrages peut-il être inférieur à 8 000 ? Justifier par un calcul.

81 Population et immigration

Dans un pays du Moyen-Orient d'un million d'habitants en 2010, le TAN (Taux accroissement naturel) est de 13 ‰ et chaque année, le solde migratoire est de 65 000 personnes.
Pour tout entier n, on note P_n la population, en millier, en $2010+n$. Ainsi, $P_0 = 1\,000$.

1 a. Calculer la population en 2011, puis en 2012.
b. Établir la relation de récurrence exprimant P_{n+1} en fonction de P_n.

2 On pose $v_n = P_n + 5\,000$, pour tout entier n.
a. Calculer v_0.
b. Démontrer que $v_{n+1} = 1{,}013 \times v_n$.
c. En déduire l'expression de v_n, puis de P_n en fonction de n.

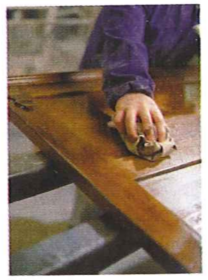
3 À l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici, TI-Nspire™), on a résolu l'inéquation suivante :

1.1 TES 1 population

$\text{solve}\left(6000\cdot(1.013)^n - 5000 > 2000, n\right)$ $\quad n > 11.9347$

À quelle question répond cette inéquation ? Interpréter le résultat en termes de population pour ce pays.

82 Étude d'un bénéfice



En janvier 2010, un artisan a réalisé une recette mensuelle de 2 300 €, alors que ses frais (ou coûts) se sont élevés à 800 €. Son bénéfice est donc de 1 500 €. Grâce à une clientèle en augmentation, le chiffre d'affaires (ou recette) augmente de 1 % tous les mois. Cependant, ses frais augmentent dans le même temps de 2,5 %.

1 Déterminer le chiffre d'affaires, les frais et le bénéfice au mois de février et de mars 2010.

2 Pour le mois de rang n, avec n entier naturel, on note R_n le montant du chiffre d'affaires, C_n le montant des frais et B_n le bénéfice, en euro.
a. Exprimer R_n et C_n en fonction de n. Justifier avec soin.
b. Montrer que $B_n = 2\,300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n$.

3 a. Exprimer $B_{n+1} - B_n$ en fonction de n.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier entier n tel que : $\left(\dfrac{1{,}025}{1{,}01}\right)^n > \dfrac{23}{20}$.
Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

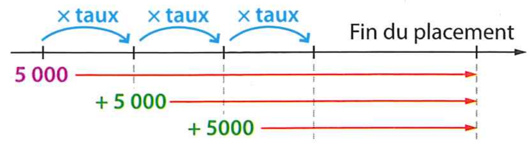
4 Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ?
Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

83 Placement et versements

On propose un placement rémunéré à 5 %, bloqué pendant 20 ans, avec obligation d'un versement chaque année au 31 décembre, de 5 000 €. Les intérêts sont versés avant le versement de 5 000 €, à la même date, et viennent s'ajouter au capital déjà acquis.
On note C_n le capital acquis le 1er janvier au bout de n années de placement. Ainsi, $C_0 = 5\,000$.

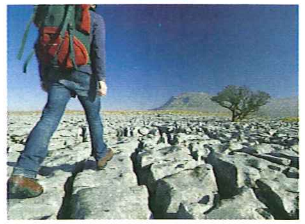
1 a. Calculer le capital acquis au bout 2 ans.
b. Établir que $C_{n+1} = 1{,}05\, C_n + 5\,000$.

2 a. Le 1er versement de 5 000 € aura produit des intérêts durant les n années du placement, pour $n \in \mathbb{N}$.
Quel est le capital acquis par ce seul versement au bout de 20 ans ?
b. Exprimer le capital K_n acquis à la fin du placement par les 5 000 € placés la n-ième année.
On s'aidera du schéma suivant :



3 On pose, pour tout entier n :
$S_n = 5\,000 + 5\,000 \times 1{,}05 + 5\,000 \times 1{,}05^2 + \ldots + 5\,000 \times 1{,}05^n$.
a. Justifier que cette somme correspond au capital acquis C_n, après avoir effectué le dernier versement de 5 000 € la n-ième année.
b. Dans cette somme, mettre 5 000 en facteur et en déduire l'expression de C_n en fonction de n.
c. Calculer le capital acquis au bout de 20 ans.
Arrondir les résultats au centime d'euro près.

84 Calcul d'une somme ALGO



Un globe-trotter a parié avec des amis de parcourir une distance de 5 000 km à pied. Le 1er jour, il peut parcourir 50 km, mais ensuite, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1 % tous les jours.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note d_n la distance parcourue durant le n-ième jour, en km. Ainsi, $d_1 = 50$.

1 Quelle est la nature de la suite (d_n) ?
En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

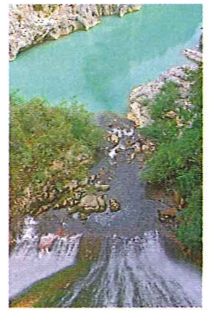
2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note L_n la distance totale parcourue en n jours : $L_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.
a. Exprimer L_n en fonction de n.
b. En déduire la limite de la suite (L_n).
Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?

3 On souhaite déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.
a. On propose pour cela l'algorithme ci-dessous :

```
Stocker 1 dans N
Stocker 50 dans D
Stocker 50 dans L
Tant que L < 4 999, faire
   stocker N + 1 dans N
   stocker D × 0,99 dans D
   stocker L + D dans L
FinTantQue
Afficher N
```

Expliquer la démarche.
b. Programmer, puis résoudre le problème.

85 Problème d'eau



Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur.
Soit D_n le débit en m³ pour le n-ième jour après le 1er juin.
Pour la journée du 1er juin, le débit D_0 est égal à 300 m³ par jour.
On arrondira les résultats au dixième de mètre cube près.

1 a. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
b. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n.
Quelle est la nature de la suite (D_n) ?
c. Exprimer D_n en fonction de n.
Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin.
d. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin.

2 À partir du 1er juillet, le débit du ruisseau peut être considéré comme nul (inférieur à 0,5 m³/jour). La chaleur provoque, dans la retenue, une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, on doit libérer, de la retenue, 500 m³ d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse. Le 1er juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000$ m³ d'eau.
Soit V_n le volume d'eau au n-ième matin après le 1er juillet.
a. Montrer que V_1 est égal à 95 500 m³.
b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

3 On considère la suite de terme général U_n définie, pour tout entier n, par $U_n = V_n + 12\,500$.
Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme U_0.

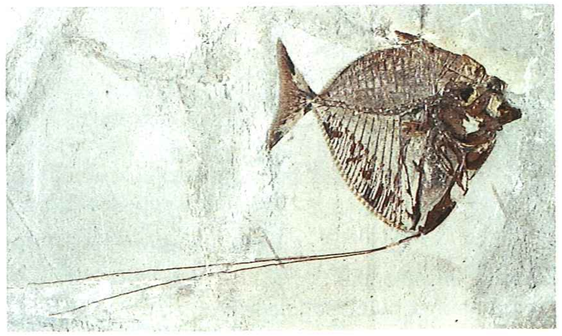
4 Exprimer U_n en fonction de n.
En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

5 Calculer V_{31} le volume restant au matin du 1er août.

6 À quelle date la retenue sera-t-elle « à sec » ?

86 ... en sciences

Comment dater un fossile ?



Lorsqu'on cherche à dater des restes fossiles, on peut utiliser la méthode dite « au carbone 14 ».
Les rayons cosmiques qui traversent l'atmosphère permettent la régénération du carbone 14 en continu, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère est constant : à chaque instant, il se forme autant de carbone 14 qu'il s'en désintègre.
Chez un être vivant, du fait de la respiration, la proportion de carbone 14 est donc constante.

Dès sa mort, le carbone 14 présent initialement dans l'organisme se transforme « lentement » et se désintègre en carbone 12 qui est plus stable.
On estime que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue d'environ 1,24 % tous les siècles.
Sous certaines conditions, la comparaison de la proportion de carbone 14 présent dans un reste d'organisme fossile avec la proportion initiale connue à l'état vivant permet de le dater.

1 On considère un ossement dont on sait qu'il date de 30 000 ans.
Justifier qu'environ 97,6 % des atomes du carbone 14 initial se sont désintégrés.

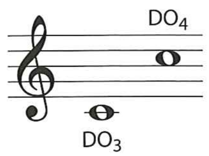
2 Dans un squelette d'homme préhistorique, il ne reste plus que 5 % du carbone 14 qu'il contenait quand l'homme était en vie.
Estimer l'âge du squelette.

3 On appelle « **période du carbone 14** » le temps nécessaire pour que la moitié des atomes se soient désintégrés.
Estimer cette période, arrondie à dix ans près.

87 ... en musique

La gamme tempérée ou gamme de tempérament égal

En musique, pour repérer chaque octave, on lui associe un indice entier n. Les notes sont alors indicées par le numéro de l'octave. Ainsi, DO_3 correspond au DO de l'octave 3 et DO_4 correspond au DO de l'octave 4, située au-dessus de l'octave 3. DO_3 est la note de fréquence 264 Hz (Hertz).



Plus l'indice est grand, plus la note est aiguë. Deux notes situées à intervalle d'octave ascendante ont un rapport de fréquence 2. Ainsi, DO_4 a pour fréquence :
$$2 \times 264 = 528 \text{ Hz}.$$
Dans la gamme tempérée, habituellement utilisée au XXI^e siècle, **une octave est divisée en 12 demi-tons égaux** séparant les notes, si bien que la suite des fréquences est géométrique de raison q positive telle que :
$$q^{12} = 2.$$
On utilisera le résultat donné à la calculatrice TI-Nspire :

```
solve(q^12=2.,q)     q=-1.05946 or q=1.05946
```

On rappelle que les douze notes d'une octave sont :
DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA# et SI.

1 Déterminer les fréquences de LA_3 et de $RÉ_4$ dans la gamme tempérée.
Arrondir les résultats à 1 Hertz près.

2 On considère un individu qui perçoit les sons dont la fréquence est comprise entre 50 Hz et 15 000 Hz.
a. Quel est le nombre de notes DO différentes que l'individu peut percevoir ?
b. Quelle est la note audible la plus basse pour cet individu ?
c. Quelle est la note audible la plus haute pour cet individu ?

3 Une **quinte juste** est formée de deux notes espacées de 7 demi-tons.
Ainsi, DO-SOL est une quinte juste, dite ascendante.
a. Quel est le rapport de fréquence entre deux notes formant une quinte juste ascendante ?
b. Dans l'Antiquité, dans la gamme pythagoricienne, on appelait **quinte pure** deux notes dont le rapport de fréquence était $\frac{3}{2}$. La quinte pure et la quinte juste sont-elles égales ? différentes ?
On pourra comparer les écarts entre 12 quintes justes – soit 7 octaves dans la gamme tempérée – et 12 quintes pures dans la gamme pythagoricienne.

Réinvestir...

88 ... en économie

Le multiplicateur keynésien et le paradoxe de l'épargne

L'économiste Keynes (1883-1946) a étudié les effets d'un **supplément d'investissement ΔI**, dit « marginal », injecté dans l'économie d'un pays.
On suppose que le taux d'épargne d'un pays est :
$$s = 0{,}16, \text{ soit } 16\ \%.$$
Ainsi, en moyenne, toute personne de ce pays consomme 84 % des revenus qu'il reçoit :
$$1 - s = c = 0{,}84,$$
appelé **propension marginale à consommer**.

Principe du multiplicateur keynésien
Étape 0 : un investissement ΔI constitue un revenu supplémentaire ΔY_0 pour l'entreprise qui le reçoit.
Étape 1 : les salariés et les actionnaires de cette entreprise reçoivent ce supplément de revenu : ils en consomment $c \times \Delta Y_0$ et épargnent $s \times \Delta Y_0$.
Mais la part du revenu consommé devient un **revenu supplémentaire ΔY_1** pour les salariés et actionnaires des entreprises du secteur des biens de consommation et ainsi de suite.
Étape n : les personnes ayant reçu le revenu ΔY_{n-1} consomment $c \times \Delta Y_{n-1}$ et épargnent $s \times \Delta Y_{n-1}$.
La part consommée $c \times \Delta Y_{n-1}$ devient un revenu supplémentaire ΔY_n. Ainsi, l'investissement supplémentaire ΔI de départ engendre des revenus marginaux ΔY_n à chaque étape n de la chaîne.
À l'étape n, la totalité des revenus supplémentaires engendrés par cet investissement ΔI est la somme des revenus marginaux.

Note Bien sûr, ce modèle, comme tout modèle, néglige certains aspects, car il nécessite, entre autres, que l'investissement soit exogène (on consomme, dans le pays, des produits fabriqués dans le pays), sans problème de financement.
P. Combemale (2010), *Introduction à Keynes*.

1 On suppose qu'un état réalise de grands travaux et investit pour cela un milliard d'euros :
$$\Delta I = \Delta Y_0 = 1\,000, \text{ exprimé en million d'euros.}$$
a. Calculer les revenus supplémentaires ΔY_1 à l'étape 1 et ΔY_2 à l'étape 2.
b. À l'étape $n + 1$, exprimer le revenu supplémentaire ΔY_{n+1} en fonction de ΔY_n.
En déduire la nature de la suite de terme général ΔY_n.
Exprimer alors ΔY_n en fonction de n.
c. En déduire que la somme des revenus à l'étape n est :
$$\Delta I \times \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$
d. Le nombre d'étapes n étant très grand, montrer qu'un investissement ΔI engendre une somme de revenus supplémentaires, notée $\Sigma \Delta Y$, égale à : $\Delta I \times \frac{1}{1-c}$.
$k = \frac{1}{1-c}$ est appelé **multiplicateur keynésien**.
e. Dans le cas de la France, où la propension marginale à consommer est 0,84, calculer $\Sigma \Delta Y$.

2 Si on donne une prime de 100 millions d'euros à des chômeurs qui consomment 99 % de leur revenu, en France, calculer $\Sigma \Delta Y$.

3 **Paradoxe :** Démontrer que, quelle que soit la propension marginale à épargner, la somme de l'épargne engendrée est toujours égale à l'investissement.

89 ... en économie

Offre et demande à l'équilibre

Les fabricants de cafetières vendent leur machine à un prix P_n l'année n. On suppose que, à ce prix P_n, la quantité demandée D_n s'exprime par : $\boldsymbol{D_n = 3\,000 - 10\,P_n}$.
Mais la quantité offerte F_{n+1} l'année suivante dépend du prix de l'année précédente P_n : $\boldsymbol{F_{n+1} = 6\,P_n + 1\,400}$.
Les quantités sont en centaine et les prix en euro.

1 Le prix de la cafetière étant fixé à 150 € ($P_0 = 150$), calculer la quantité demandée D_0 à ce prix, puis la quantité offerte F_1 l'année suivante.

2 Le marché est en équilibre l'année $n + 1$ si la quantité offerte dans l'année est égale à la quantité demandée dans la même année.
a. Écrire l'équilibre du marché sous la forme $F_{n+1} - D_{n+1} = 0$ et montrer que : $P_{n+1} = -0{,}6\,P_n + 160$.
b. En déduire le prix l'année 1, puis l'année 2.

3 **TICE** On utilise le tableur pour obtenir les différentes quantités demandées et offertes.

	A	B	C	D
1	n	P_n	D_n	F_n
2	0	150		
3	1			

a. Pour chaque cellule C2, B3 et D3, indiquer la formule à entrer, permettant d'obtenir tous les termes de ces suites en recopiant vers le bas.
b. Quelle semble être la valeur limite P du prix d'équilibre ?

4 On pose, pour tout entier n : $u_n = P_n - 100$.
a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
b. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$P_n = 50 \times (-1)^n \times 0{,}6^n + 100.$$
Retrouver le prix limite P pour équilibrer l'offre et la demande. Si $P_0 = P$, que deviennent les suites (D_n) et (F_n) ?