SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

96 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n - 3$

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. Exprimez u_n en fonction de n.

4. Déterminez la limite de la suite (u_n).

1. $U_1 = 2U_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$U_2 = 2U_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$U_3 = 2U_2 - 3 = 2 \times (-5) - 3 = -10 - 3 = -13$

$U_4 = 2U_3 - 3 = 2 \times (-13) - 3 = -26 - 3 = -29$

2. (V_n) est une suite auxiliaire

Démontrons que (V_n) est géométrique.

(V_n) est géométrique si et seulement si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q \times V_n$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$V_{n+1} = U_{n+1} - 3$

$= (2U_n - 3) - 3$

$= 2U_n - 3 - 3$

$= 2U_n - 6$

$= 2(V_n + 3) - 6$

$= 2V_n + 6 - 6$

$= 2V_n$

ce qui prouve que (V_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = 1 - 3 = -2$

1b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$V_n = V_0 \times q^n$

$= (-2) \times 2^n$

3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n + 3$

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

97 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout r tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n - 8$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique rique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. a) Exprimez u_n en fonction de n.

b) Calculez u_{10}.

4. Déterminez la limite de la suite (u_n).

1. $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 4 = \frac{1}{2} \times 5 + 4 = \frac{13}{2}$

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 4 = \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} + 4 = \frac{29}{4}$

$U_3 = \frac{1}{2}U_2 + 4 = \frac{1}{2} \times \frac{29}{4} + 4 = \frac{61}{8}$

$U_4 = \frac{1}{2}U_3 + 4 = \frac{1}{2} \times \frac{61}{8} + 4 = \frac{125}{16}$

2. (V_n) est une suite auxiliaire

Démontrons que (V_n) est géométrique.

(V_n) est géométrique si et seulement si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q \times V_n$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 8$$
$$= \left(\frac{1}{2}U_n + 4\right) - 8$$
$$= \frac{1}{2}U_n + 4 - 8$$
$$= \frac{1}{2}U_n - 4$$
$$= \frac{1}{2}(V_n + 8) - 4$$
$$= \frac{1}{2}V_n + 4 - 4$$
$$= \frac{1}{2}V_n$$

Ce qui prouve que (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 8 = 5 - 8 = -3$

2 b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_n = V_0 \times q^n$$
$$= -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n + 8$

$U_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8$

3 b) pour $n = 10$ on a :

$U_{10} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 8$

$= -3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 8$

$= \frac{-3}{1024} + \frac{8}{1} = \frac{8189}{1024}$

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

par produit, il vient : $\lim\limits_{n \to +\infty} -3\left(\frac{1}{2}\right)^n = -3 \times 0 = 0$

par somme, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8$

$U_n = (-2)\times 2^n + 3$

4. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2>1$

par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times 2^n = -\infty$

puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2\times 2^n + 3 = -\infty$

97 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n - 8$.

a) Montrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimez v_n en fonction de n.

3. a) Exprimez u_n en fonction de n.

b) Calculez u_{10}.

4. Déterminez la limite de la suite (u_n).

98 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.

2. On pose $v_n = u_n + a$.

a) Montrez que $v_{n+1} = 3u_n + 5 + a$.

b) Montrez que $v_{n+1} = 3v_n + 5 - 2a$.

c) Pour quelle valeur de a, la suite (v_n) est-elle géométrique ?

3. On pose $a = \frac{5}{2}$.

a) Exprimez v_n en fonction de n.

b) Exprimez u_n en fonction de n.

c) Calculez u_{10}.