Chapitre 2 : Polynômes du second degré

I. Fonction polynôme de degré 2

1) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une

expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Vocabulaire : L'image de 0 par une fonction est appelée « ordonnée à l'origine ».

Pour une fonction du second degré on a :

f(0) = a x 0² + bx0 + c = c

Dans une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, le nombre *c* est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

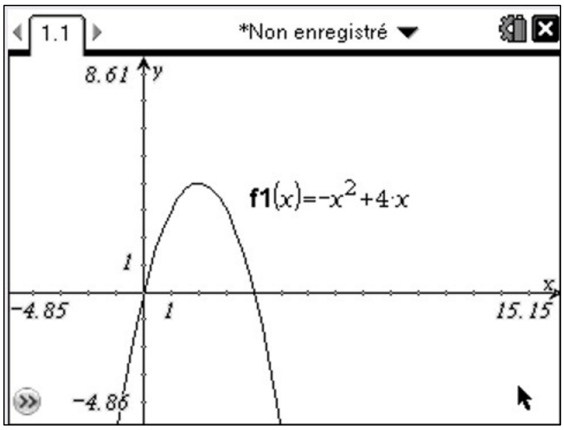
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = 3 ; b= -7 et c = 3.
- $g(x) = x^2 + 5x - 4$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = 1 ; b= 5 et c = -4.
- $h(x) = -x^2 + x$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = -1 ; b= 1 et c = 0.
- $k(x) = 4 - 2x^2$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a = -2 ; b= 0 et c = 4.

  En effet, en remettant dans l'ordre habituel les termes, on peut écrire $k(x) = -2x^2 + 4$

2) Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

Exemple : représentation graphique de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = -x^2 + 4x$



La parabole est ici « tournée vers le bas ».

Astuce !

Smiley content

a > 0 ☺

Smiley pas content

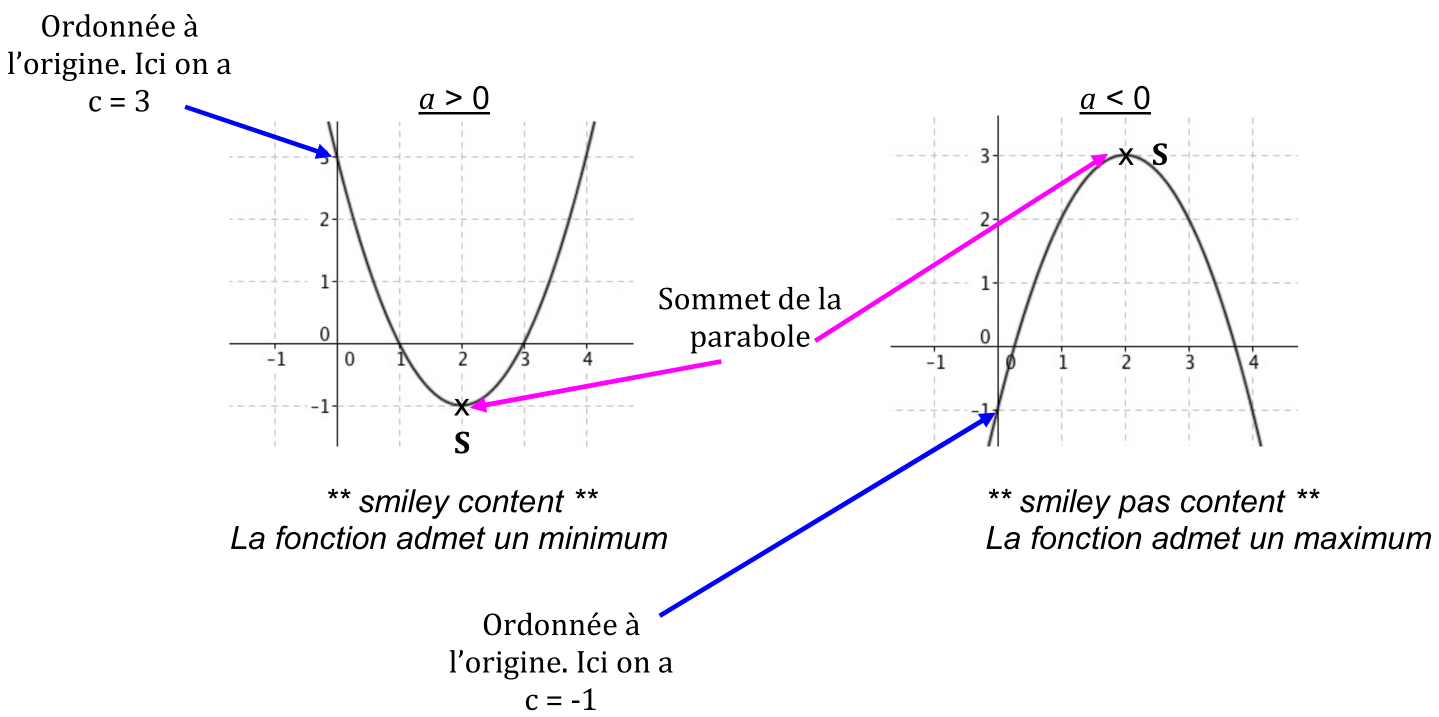
a < 0 ☹

Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut : « *cuvette* ».
  f est d'abord décroissante, puis croissante

- Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas : « *colline* ».
  f est d'abord croissante, puis décroissante



*** smiley content ***
La fonction admet un minimum

*** smiley pas content ***
La fonction admet un maximum

3) Coordonnées du sommet - tableau de variation

a) **coordonnées du sommet**

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le sommet de la parabole représentative de f dans un repère orthogonal a pour coordonnées :

$S(x_S ; y_S)$ avec $x_S = -\dfrac{b}{2a}$

$y_S = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Remarque : les coordonnées du sommet sont souvent notées $S(\alpha ; \beta)$

Exemple : $f(x) = -2x^2 + 7x + 4$

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec :

a = – 2 b = 7 c = 4

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une parabole de sommet $S(\alpha ; \beta)$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \times (-2)} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}\beta &= -2 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \times \left(\frac{7}{4}\right) + 4 \\ &= -2 \times \left(\frac{49}{16}\right) + \frac{49}{4} + \frac{4}{1} \\ &= -\frac{49}{8} + \frac{98}{8} + \frac{32}{8} \\ &= \frac{-49 + 98 + 32}{8} = \frac{81}{8}\end{aligned}$$

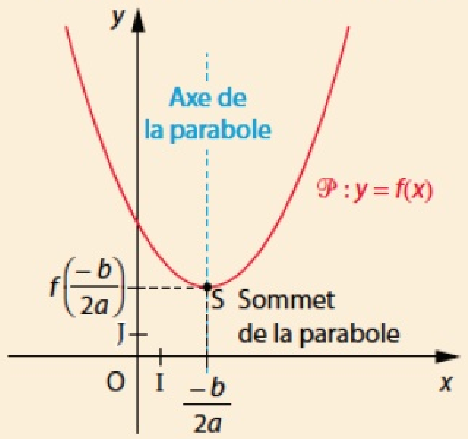
Le sommet de la parabole a pour coordonnées

$$S\left(\frac{7}{4} ; \frac{81}{8}\right)$$

b) tableau de variations

Si $a > 0$

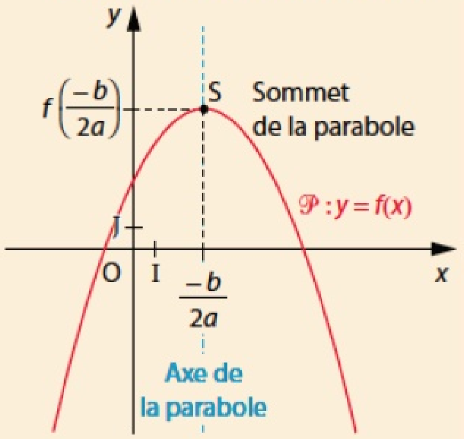
$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$+\infty$ ↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗ $+\infty$

Si $a < 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$ ↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘ $-\infty$

II. Résolution d'une équation du second degré

Exemple :
L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

1) Définitions

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Définition : On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté Δ, égal à b^2-4ac.

Exemple :
Le discriminant de l'équation $3x^2-6x-2=0$ est :

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, a = 3, b = -6 et c = -2.

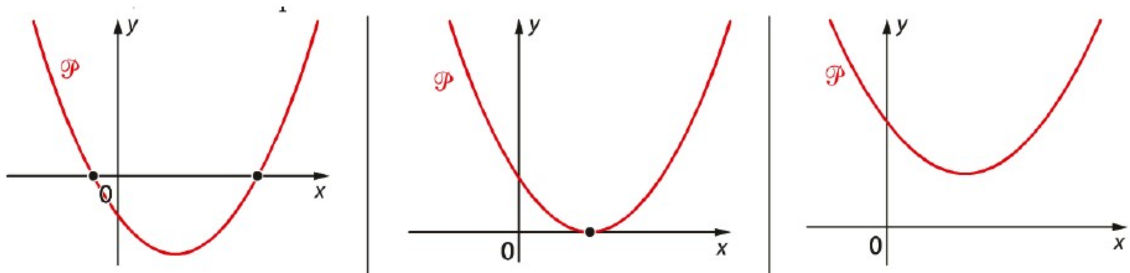
Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Vocabulaire :
Les solutions d'une équation de la forme $f(x)=0$ sont appelées racines de l'expression $f(x)$
Les solutions d'une équation du second degré sont donc appelées racines de ax^2+bx+c.

2) Interprétation graphique

Graphiquement, on constate que 3 cas de figure peuvent se présenter :
l'équation $f(x)=0$ peut avoir deux, une ou aucune solution :



𝒫 coupe deux fois l'axe des abscisses. | 𝒫 coupe une fois l'axe des abscisses. | 𝒫 ne coupe pas l'axe des abscisses.

Exemples et méthodes en vidéo : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

a = 2, b = -1 et c = -6 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$:

a = 4, b = -12 et c = 9 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

a = 1, b = 3 et c = 10 donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 - 40 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Le cours est expliqué en vidéo :

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk

Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk

Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Remarque :

Après avoir calculé les racines d'une expression du second degré, on peut vérifier que leur produit $x_1 \text{x} x_2$ *est bien égal à* $\frac{c}{a}$.

- Dans l'exemple a) on a ainsi :

D'une part $x_1 \text{x} x_2 = -\frac{3}{2} \text{x} 2 = -3$ D'autre part $\frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$

- Dans l'exemple b) on a ainsi :

D'une part $x_1 \text{x} x_2 = \frac{3}{2} \text{x} \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ D'autre part $\frac{c}{a} = \frac{9}{4}$

III. Différentes formes d'une même expression

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Cette forme d'une expression du second degré est appelée forme développée.

On peut présenter une expression du second degré sous 2 autres formes.

1) Forme canonique

La forme canonique de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

2) Forme factorisée

Propriété :

Lorsque le discriminant de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est positif, l'expression $f(x)$ admet 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Le trinôme peut alors se factoriser.

La forme factorisée de $f(x)=ax^2+bx+c$ est alors $f(x)= a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemples :

- $f(x) = 2x^2 - x - 6$

On a déterminé dans le § II les racines de $f(x)$ en résolvant l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$

On a trouvé $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = 2$

La forme factorisée de $f(x) = 2x^2 - x - 6$ est donc $f(x) = 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x - 2)$

- $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

On a déterminé dans le § II les racines de $f(x)$ en résolvant l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$

On a trouvé $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$. La racine est double.

La forme factorisée de $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ est donc $f(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. C'est une identité remarquable.

Pour revoir cette notion, il faut se référer aux exercices traités en classe jeudi 18 octobre, disponibles sur lewebpedagogique.