Pour les exercices 89 à 93

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Expliquez pourquoi la suite (S_n) est strictement croissante et donnez sa limite.

89 a) $q = \frac{1}{2}$. b) $q = \frac{1}{3}$.

90 a) $q = 0{,}1$. b) $q = 0{,}9$.

91 a) $q = \frac{4}{7}$. b) $q = \frac{9}{11}$.

92 a) $q = 1{,}1$. b) $q = 3$.

93 a) $q = \frac{4}{3}$. b) $q = \frac{\pi}{3}$.

94 (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 90$ et de raison q.

1. Exprimez $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n et de q.

2. Déterminez la raison de la suite (u_n) si S_n a pour limite 150.

95 Écriture décimale

On sait que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est soit finie, soit périodique à partir d'un certain rang.
Par exemple, $\frac{15}{4} = 3{,}75$: écriture décimale finie ; et $\frac{15}{11} = 1{,}36\ 36\ 36\ldots$: écriture décimale illimitée avec une période de longueur 2. Réciproquement toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang est l'écriture décimale d'un nombre rationnel.
Par conséquent, $3{,}236\,236\,236\ldots$ avec une période de longueur 3 est l'écriture décimale d'un nombre rationnel.
On veut retrouver ce rationnel r.

1. Justifiez que $r = 3 + 236 \times 10^{-3} + 236 \times 10^{-6} + 236 \times 10^{-9} + \ldots$

2. On pose $u_1 = 236 \times 10^{-3}$, $u_2 = 236 \times 10^{-6}$, $u_3 = 236 \times 10^{-9}, \ldots$
Montrez que la suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

3. Exprimez $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

4. Déterminez la limite de (S_n).

5. Donnez l'écriture fractionnaire de r.

LIMITES

Pour les exercices 83 à 85

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
Précisez sa limite.

83 a) $q = 10$. b) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

84 a) $q = \frac{\pi}{3}$. b) $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

85 a) $q = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}$. b) $q = \frac{3}{4} + \frac{3}{11}$.

Pour les exercices 86 à 88

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Précisez sa limite.

86 $u_0 = -2$ et $q = 1{,}1$.

87 $u_0 = -5$ et $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

88 $u_0 = 10^{10}$ et $q = 0{,}99$.

$1{,}047 = \frac{104{,}7}{100} = 104{,}7\%$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

83 a) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$U_n = U_0 \times q^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n = q^n = 10^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$ car $10 > 1$

Rappel : si $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

b) $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ $\qquad \frac{\pi}{3} \simeq 1{,}047$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

84 $\frac{\pi}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n = +\infty$

Remarque : multiplier par $q = \frac{\pi}{3}$ revient à ajouter environ $4{,}7\%$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n = +\infty$

LIMITES

Pour les exercices 83 à 85

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
Précisez sa limite.

83 **a)** $q = 10$. **b)** $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

84 **a)** $q = \frac{\pi}{3}$. **b)** $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

85 **a)** $q = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}$. **b)** $q = \frac{3}{4} + \frac{3}{11}$.

Pour les exercices 86 à 88

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Précisez sa limite.

86 $u_0 = -2$ et $q = 1{,}1$.

87 $u_0 = -5$ et $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

88 $u_0 = 10^{10}$ et $q = 0{,}99$.

85 $q = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}$ $-1 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$\frac{6 \times 6}{7 \times 6} - \frac{5 \times 7}{6 \times 7} = \frac{36 - 35}{42} = \frac{1}{42}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{3}{11} = \frac{45}{44} > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

86 $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ car $q > 1$

Par produit par $U_0 < 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_0 \times q^n = -\infty$

87 $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ car $-1 < q < 1$

par produit par $U_0 = -5$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -5 \times 0 = 0$

Pour les exercices 89 à 93

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Expliquez pourquoi la suite (S_n) est strictement croissante et donnez sa limite.

89 a) $q = \frac{1}{2}$. b) $q = \frac{1}{3}$.

90 a) $q = 0{,}1$. b) $q = 0{,}9$.

91 a) $q = \frac{4}{7}$. b) $q = \frac{9}{11}$.

92 a) $q = 1{,}1$. b) $q = 3$.

93 a) $q = \frac{4}{3}$. b) $q = \frac{\pi}{3}$.

<u>Méthode</u> : pour étudier le sens de variation de la suite (S_n), on étudie le signe de la différence $S_{n+1} - S_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + \dots + U_n + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + \dots + U_n)$

$= \cancel{U_0} + \cancel{U_1} + \dots + \cancel{U_n} + U_{n+1} - \cancel{U_0} - \cancel{U_1} - \dots - \cancel{U_n}$

$= U_{n+1}$

89 $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$

donc $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$

donc (S_n) est croissante.

$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{\overset{\text{nb de termes}}{n+1}}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$1 - q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad S_n = 2(1 - q^{n+1})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2(1 - q^{n+1})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ car $-1 < q < 1$

par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - q^{n+1} = 1 - 0 = \underline{1}$ par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim 2(1 - q^{n+1}) = 2 \times 1 = 2$

90 **a)** $q = 0{,}1$. **b)** $q = 0{,}9$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} = (0{,}1)^{n+1} > 0$

donc (S_n) est croissante

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = U_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 0{,}1^{n+1}}{0{,}9} = \dfrac{10}{9}\left(1 - 0{,}1^{n+1}\right)$

Remarque : $0{,}9 = \dfrac{9}{10}$ diviser par $\dfrac{9}{10}$ revient

à multiplier par $\dfrac{10}{9}$

- Etude de $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^{n+1} = 0$ car $-1 < 0{,}1 < 1$

par somme il vient : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}1^{n+1} = 1 - 0 = 1$

puis par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{10}{9}\left(1 - 0{,}1^{n+1}\right) = \dfrac{10}{9} \times 1 = \dfrac{10}{9}$

91 a) $q = \frac{4}{7}$.

92 a) $q = 1,1$.

93 a) $q = \frac{4}{3}$.

Opérations sur les limites.

$U_n \to \ell$

$V_n \to \ell'$

$U_n - V_n \to \ell - \ell'$

$U_n \times V_n \to \ell \times \ell'$

91 a.

$U_n = U_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{4}{7}\right)^n = \left(\frac{4}{7}\right)^n > 0$

$S_{n+1} - S_n = U_{n+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante

$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}}{\frac{3}{7}}$

$= \frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{4}{7} < 1$

par somme, $\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1} = 1-0 = 1$

par produit $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}\right) = \frac{7}{3}\times 1 = \frac{7}{3}$

92 a

$S_n = \frac{1-(1,1)^{n+1}}{1-1,1} = \frac{(1,1)^{n+1}-1}{1,1-1} = \frac{(1,1)^{n+1}-1}{0,1} = 10\left[(1,1)^{n+1}-1\right]$

$0,1 = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{0,1} = \frac{10}{1}$

$\lim_{n\to+\infty} 1,1^{n+1} = +\infty$ car $1,1 > 1$; par différence $\lim_{n\to+\infty} (1,1)^{n+1}-1 = +\infty$; par produit par 10 $\lim S_n = +\infty$

94 (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 90$ et de raison q.

1. Exprimez $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n et de q.

2. Déterminez la raison de la suite (u_n) si S_n a pour limite 150.

1. Formule de cours :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

$$= U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= 90\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$$

$$q = \frac{60}{150} = \frac{6}{15} = \frac{3\times 2}{3\times 5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

2. (S_n) converge donc (U_n) converge et nécessairement $-1 < q < 1$

il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$

par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - q^{n+1} = 1 - 0 = 1$

par opérations sur les limites il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 90 \times \frac{1}{1-q} = \frac{90}{1-q}$$

$$\frac{90}{1-q} = 150 \iff \frac{90}{1-q} = \frac{150}{1}$$

$$\iff 90 \times 1 = 150(1-q)$$

$$\iff 90 = 150 - 150q$$

$$\iff 150q = 150 - 90$$

$$\iff 150q = 60$$

LIMITES

Pour les exercices 83 à 85

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
Précisez sa limite.

83 a) $q = 10$. b) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

84 a) $q = \frac{\pi}{3}$. b) $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

85 a) $q = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}$. b) $q = \frac{3}{4} + \frac{3}{11}$.

Pour les exercices 86 à 88

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Précisez sa limite.

86 $u_0 = -2$ et $q = 1,1$.

87 $u_0 = -5$ et $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

88 $u_0 = 10^{10}$ et $q = 0,99$.

88 $q = 0,99$

Remarque : Multiplier par 0,99 revient à diminuer de 1%

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,99^n = 0$ car $-1 < 0,99 < 1$

par produit on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 10^{10} \times 0,99^n = 10^{10} \times 0 = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

95 **Écriture décimale**

On sait que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est soit finie, soit périodique à partir d'un certain rang. Par exemple, $\frac{15}{4} = 3{,}75$: écriture décimale finie ; et $\frac{15}{11} = 1{,}\mathbf{36\ 36\ 36}\ldots$: écriture décimale illimitée avec une période de longueur 2. Réciproquement toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang est l'écriture décimale d'un nombre rationnel.

Par conséquent, 3,236 236 236… avec une période de longueur 3 est l'écriture décimale d'un nombre rationnel. On veut retrouver ce rationnel r.

1. Justifiez que $r = 3 + 236 \times 10^{-3} + 236 \times 10^{-6} + 236 \times 10^{-9} + \ldots$

2. On pose $u_1 = 236 \times 10^{-3}$, $u_2 = 236 \times 10^{-6}$, $u_3 = 236 \times 10^{-9}$, …

Montrez que la suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

3. Exprimez $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

4. Déterminez la limite de (S_n).

5. Donnez l'écriture fractionnaire de r.