Fiche de correction d'exercices

6 a) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ $\qquad f'(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Rappel $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

$f'(x) > 0$ par quotient de 2 facteurs positifs.

6 b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{2x^2} < 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

7 b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

f est définie pour tout x tel que $x+1 \neq 0$
$\iff x \neq -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\qquad -1$ est valeur interdite.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x-1 & v'(x) = 1 \\ v(x) = x+1 & v'(x) = 1 \end{cases}$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

pour tout $x \neq -1$ $\quad f'(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

8 a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ $\qquad x^2+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
donc $D_f = \mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x-1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2+1 & v'(x) = 2x \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - (x-1)(2x)}{x^2+1} = \frac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$$

du signe de $-x^2+2x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calcul des racines : $\Delta = 8$ $\quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$
$x_1 = 1-\sqrt{2}$
$x_2 = 1+\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f(1-\sqrt{2})$	↗	$f(1+\sqrt{2})$	↘	

$-x^2-2x+1$
ax^2+bx+c ; $a<0$
Le signe de a est à l'extérieur des racines

$f(1+\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\qquad f(1-\sqrt{2}) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

8 b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

f est définie pour tout x tel que $x-1 \neq 0$
$\iff x \neq 1$
1 est valeur interdite.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f = \dfrac{u}{V}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+1 & u'(x) = 2x \\ V(x) = x-1 & V'(x) = 1 \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ du signe de x^2-2x-1.

Etude du signe de x^2-2x-1

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-1) = 8$ $\quad\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

les racines sont : $x_1 = 1-\sqrt{2}$

$x_2 = 1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{-\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{(-4+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2-2\sqrt{2}$$

$f(1-\sqrt{2}) = 2-2\sqrt{2}$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{\sqrt{2}} = \frac{(4+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} = 2+2\sqrt{2}$$

9 a) $f(x) = \sqrt{x} + 2x$.

f est défini sur $[0;+\infty[$ (racine carrée).

pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$$

$f'(x) > 0$ par somme de 2 termes positifs.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$f(0) = 0$

b) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} - x^3 = -\dfrac{1}{2}\times\sqrt{x} - x^3$

$D_g = [0;+\infty[$ (racine carrée).

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{x}} - 3x^2$$

$f'(x) < 0$ par somme de 2 termes négatifs

$f(0) = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	