Devoir maison n° 3 – Corrigé détaillé

La rédaction qui est ici proposée est la rédaction attendue aux évaluations.

Exercice 1 : $f : x \longmapsto \dfrac{4x+5}{x^2-1}$ pour tout $x \in]-\infty;-1[$

1. f est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty;-1[$ donc est continue et dérivable sur cet intervalle.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 4x+5$ $\quad u' : x \mapsto 4$

$v : x \mapsto x^2-1$ $\quad v' : x \mapsto 2x$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour tout $x < 1$: $$f'(x) = \frac{4(x^2-1) - 2x(4x+5)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - 10x - 4}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(-2x^2-5x-2)}{(x^2-1)^2}$$

2) Pour tout $x < -1$: $-4x^2 - 10x - 4$ est du signe de $-2x^2 - 5x - 2 = P(x)$

Or -2 est racine évidente de $P(x)$, de plus le produit des racines de $P(x)$ étant égal à $-\frac{2}{-2} = 1$

On en déduit que $-\frac{1}{2}$ est également racine de $P(x)$.

Propriété : le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de "a" à l'extérieur de ses racines.

D'où le tableau de signes de $-4x^2 - 10x - 4$

x	$-\infty$		-2		-1
$-4x^2 - 10x - 4$		$-$	0	$+$	‖

3) Les variations de f sur $]-\infty ; -1[$ dépendent du signe de sa dérivée f' sur $]-\infty ; -1[$.

Or pour tout $x < -1$ $f'(x)$ est du signe de $-4x^2 - 10x - 4$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		-1
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	‖

$$f(-2) = \frac{4 \times (-2) + 5}{(-2)^2 - 1}$$

$$f(-2) = \frac{-3}{-3} = 1$$

Sur $]-\infty ; -1[$ f admet un minimum de 1 atteint pour $x = -2$.

Pour tout $x \in]-\infty ; -1[$, $f(x) \geqslant 1$

Exercice 2 :

$f : x \longmapsto x^3 - x^2 - 1$ pour tout $x < 10$

1. f est une fonction polynôme définie sur $]-\infty ; 10[$ donc f est continue et dérivable sur $]-\infty ; 10[$

Pour tout $x < 10$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $3x - 2 = 0$ D'après la règle du produit nul.

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$

Propriété : le trinôme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de "a" à l'extérieur de ses racines.

D'où le tableau de signes donné.

2. Les variations de f sur $]-\infty ; 10[$ dépendent du signe de sa dérivée f'.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	10
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\frac{31}{27}$ ↗	-1 ↗	899

$f(0) = -1$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1$

$= \frac{8}{27} - \frac{4}{9} - \frac{27}{27}$

$= -\frac{31}{27}$

$f(10) = 10^3 - 10^2 - 1$

$= 1000 - 100 - 1 = 899$

3) $f(1) = -1$

D'après le tableau de variations de f
f est continue sur $]-\infty ; 1[$ et pour tout $x < 1$
$f(x) \leq -1$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires
$f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]-\infty ; 1[$

4) f est continue et strictement croissante sur $[1 ; 10[$
à valeurs dans $[f(1) ; f(10)[= [-\frac{31}{27} ; 899[$

Or $0 \in [-\frac{31}{27} ; 899[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1 ; 10[$

5) A l'aide de la fonction G-SOLV de la calculatrice, on obtient

$1,46 \leq \alpha \leq 1,47$