Chapitre 4 : factorisation et étude de signe

I Les différentes formes d'une expression algébrique

1. Vocabulaire : somme, produit, quotient, carré, inverse, . . .

NOM	FORME	EXEMPLE
SOMME	$A+B$	$2x^2+5x$
DIFFERENCE	$A-B$	$8x-4$
PRODUIT	$A\times B$	$(2x+3)(3x-1)$
CARRÉ	A^2	$(x^3-3x^2+7x+1)^2$
QUOTIENT	$\dfrac{A}{B}$	$\dfrac{5x+\sqrt{3}}{x^2-1}$
INVERSE	$\dfrac{1}{A}$ $\dfrac{B}{A}$	$\dfrac{x^2-1}{5x+\sqrt{3}}$

2 termes

2 termes

2 facteurs

$\dfrac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}}$

Associer à chaque énoncé l'expression algébrique correspondante :

Enoncé	Expression algébrique
1. La somme de deux produits d	a) $\dfrac{ab}{c+d}$
2. Le produit d'une différence et d'une somme f	b) $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$
3. La différence d'une somme et d'un produit c	c) $(a+b)-cd$
4. Le quotient d'une somme par une différence g	d) $ab+cd$
5. La différence de deux quotients b	e) $\dfrac{1}{c+d}$
6. L'inverse d'une somme e	f) $(a-b)(c+d)$
7. Le quotient d'un produit par une somme a	g) $\dfrac{a+b}{c-d}$

2) Transformation d'expressions algébriques

a) Réduire une somme : c'est écrire cette somme sous la forme la plus condensée possible, en regroupant les termes de même nature.

Exemple : $A = 3x^2 + 5x - 4 + 2x^3 - x^3 - x^2 + x + 4$

$A = 2x^3 + 2x^2 + 6x$

b) Développer : c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes.

Exemple : $B = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$

c) **Factoriser** : c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit de facteurs.

Exemple :

$C = x^2 + 3x$ 2 termes séparés par un " + "

$C = \underline{x} \times x + 3 \times \underline{x}$

$C = \underline{x}(x+3)$ la parenthèse de factorisation comporte 2 termes séparés par un " + "

3) Développement et factorisation

a) identités remarquables

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple : $(5x+3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$

$a = 5x \quad b = 3 \quad 2ab = 30x$

• $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

$a = 3x \quad b = 2 \quad 2ab = 12x$

• $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemple : $(3x+4)(3x-4) = 9x^2 - 16$

$a = 3x \quad b = 4$

b) Méthode pour factoriser : comment trouver le facteur commun ?

- on reconnaît une identité remarquable :

<u>Exemple</u> : $16x^2 - 25 = (4x-5)(4x+5)$

$a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 5$

$9x^2 + 24x + 16 = (3x+4)^2$

$a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ $b = 4$

- un réel est en facteur :

il y a 3 termes, donc dans la parenthèse de factorisation, on doit retrouver

<u>Exemple</u> : $6x^2 - 3x + 3 = \underline{3} \times 2x^2 - \underline{3} \times x + \underline{3} \times 1$

$= \underline{3}(2x^2 - x + 1)$

3 termes avec la même alternance de signes.

- x ou une puissance de x est en facteur :

<u>Exemple</u> : $7x^3 - 4x^2 + 3x = 7x^2 \times \underline{x} - 4x \times \underline{x} + 3 \times \underline{x} = \underline{x}(7x^2 - 4x + 3)$

- le facteur commun est une expression du type $ax+b$

Exemple : $(x-2)^2(x+1)-3x(x-2)$

$= (x-2)\underline{(x-2)}(x+1) - 3x\underline{(x-2)}$

$= \underline{(x-2)}\left[(x-2)(x+1) - 3x\right]$

$= (x-2)\left[x^2+x-2x-2-3x\right]$

$= (x-2)(x^2-4x-2)$

c) utiliser un dénominateur commun pour factoriser une expression rationnelle

Exemple : $\dfrac{2}{-x+3} - \dfrac{3}{2x+1} = \dfrac{2\times(2x+1)}{(-x+3)\times(2x+1)} - \dfrac{3\times(-x+3)}{(2x+1)\times(-x+3)}$

$= \dfrac{2(2x+1)-3(-x+3)}{(-x+3)(2x+1)}$

$= \dfrac{4x+2+3x-9}{(-x+3)(2x+1)}$ on ne développe pas le dénominateur

$= \dfrac{7x-7}{(-x+3)(2x+1)} = \dfrac{7(x-1)}{(-x+3)(2x+1)}$

II Résolution algébrique d'équations

1) Équation se ramenant à un problème du 1er degré :

Exemple : résoudre $3x + 3 = 5x - 7$

- on traite les informations de la gauche vers la droite et on isole l'inconnue dans l'un des membres :

$$3x + 3 = 5x - 7$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5x = -7 - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x = -10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$\mathcal{S} = \{5\}$$

Vérification : pour $x = 5$

d'une part le 1er membre vaut $3 \times 5 + 3 = 18$

d'autre part le 2nd membre vaut $5 \times 5 - 7 = 18$

2) Équation produit :

a) Définition :

Une équation produit est une équation dont le premier membre est un produit de facteurs et dont le second membre est égal à zéro.

Exemple : $(2x+1)(x-3)=0$ est une équation produit

b) Propriété : Règle du produit nul.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple : $(2x+1)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow \quad 2x+1=0 \quad$ ou $\quad x-3=0$

$\Leftrightarrow \quad 2x=-1 \qquad\qquad x=3$

$\Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-1}{2}$

$$\boxed{S=\left\{-\tfrac{1}{2}\,;\,3\right\}}$$

3) Équation $x^2 = k$

a) La fonction carré

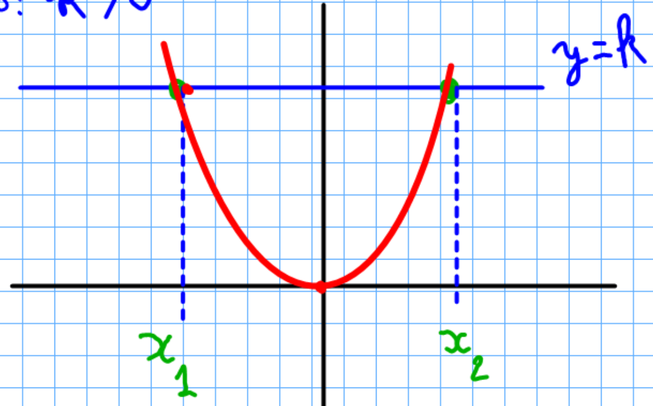
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée **fonction carré**; sa représentation graphique dans un repère est appelée **parabole**.

b) Résoudre l'équation $x^2 = k$ graphiquement

résolution graphique : cela revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

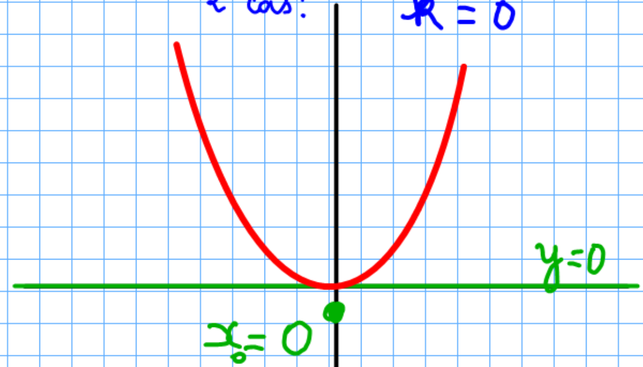
• Plusieurs cas selon le signe de k :

1er cas : $k > 0$



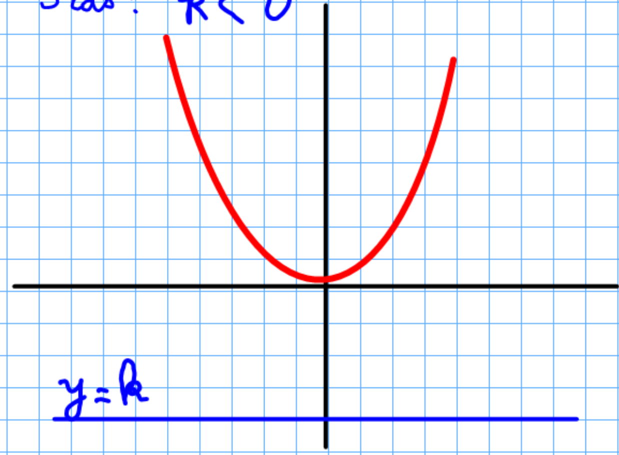
$\mathcal{S} = \{x_1 ; x_2\}$

2e cas : $k = 0$



$\mathcal{S} = \{x_0\}$

3e cas : $k < 0$



$\mathcal{S} = \emptyset$

c) résolution algébrique

$x^2 = k$.

- si $k < 0$: $x^2 = k$ un carré est toujours positif ou nul : donc impossible
- si $k = 0$: $x^2 = 0 \iff x \times x = 0$ d'après la règle du produit nul
  $x = 0$ ou $x = 0$
- si $k > 0$: comme $k > 0$, k peut s'écrire sous la forme $(\sqrt{k})^2$

l'équation $x^2 = k$ équivaut à $x^2 = (\sqrt{k})^2$

identité remarquable
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\iff x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$

$\iff (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$

$\iff x - \sqrt{k} = 0$ ou $x + \sqrt{k} = 0$ D'après la règle du produit nul :

$\iff x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$

Exemple : $x^2 = 5$

$\iff x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$ $\quad \mathcal{S} = \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

d) Équation se ramenant à $X^2 = k$

exemple : Résoudre $(x-8)^2 = 9$

méthode ①

① on pose $X = (x-8)$, on obtient

alors $X^2 = 9$

$\Leftrightarrow \quad X = \sqrt{9}$ ou $X = -\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow \quad X = 3$ ou $X = -3$

$\Leftrightarrow \quad x - 8 = 3$ ou $x - 8 = -3$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 + 8$ ou $x = -3 + 8$

$\Leftrightarrow \quad x = 11$ ou $x = 5$

$S = \{5 ; 11\}$

méthode ②

② on transpose pour obtenir une équation dont le second membre est égal à zéro

on obtient $(x-8)^2 - 9 = 0$

on reconnaît une I.R $a^2 - b^2 = 0$

avec $a^2 = (x-8)^2 \qquad a = (x-8)$

$b^2 = 9 \qquad b = 3$

on factorise en $(a-b)(a+b) = 0$

$[(x-8) - 3][(x-8) + 3] = 0$

on réduit : $(x - 8 - 3)(x - 8 + 3) = 0$

$(x - 11)(x - 5) = 0$

on applique la règle du produit nul :

$x - 11 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = 11$ ou $x = 5$

$S = \{5 ; 11\}$

4) Équations se ramenant à une équation produit

Exemple 1 : résoudre (E) : $(2x-1)^2 = (x+2)^2$

Méthode :

- on évite de développer, mais on transpose (on se ramène à une équation dont le second membre est égal à zéro)

$$(E) : (2x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$$

- on cherche à factoriser

ici on factorise à l'aide de l'I.R $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

avec $A = (2x-1)$ $B = (x+2)$

$$(E) : [(2x-1) - (x+2)][(2x-1) + (x+2)] = 0$$

on réduit dans les crochets : $(E) : (2x-1-x-2)(2x-1+x+2) = 0$

$$(E) : (x-3)(3x+1) = 0$$

- on a une équation produit : on applique la règle du produit nul

$(E) : x - 3 = 0$ ou $3x + 1 = 0$

$x = 3$ ou $3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{-\frac{1}{3} ; 3\right\}$$

Exemple 2 : Résoudre $(E) : (2-x)(3+x) = 2(3-2x)(2-x)$

Méthode :

- on transpose :

$$(E) : \underline{(2-x)}(3+x) - 2(3-2x)\underline{(2-x)} = 0$$

- on cherche à factoriser :

$$(E) : (2-x)\left[(3+x) - 2(3-2x)\right] = 0$$

$$(E) : (2-x)(3+x-6+4x) = 0$$

on réduit : $(E) : (2-x)(5x-3) = 0$

- on a une équation produit, on applique la règle du produit nul

$(E) :$ $2-x = 0$ ou $5x-3 = 0$

$-x = -2$ $\quad$ $5x = 3$

$x = +2$ $\quad$ $x = \dfrac{3}{5}$

$$S = \left\{ 3/5 \, ; \, 2 \right\}$$