Devoir maison n°4

Exercice :

$f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-2x+5}{x^2}$ pour tout $x > 0$

1) $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses si et seulement si l'équation $f(x)=0$ admet des solutions.
Pour tout $x>0$:
$f(x)=0 \iff 2x^2-2x+5=0$ d'après la règle du quotient nul.

$\Delta = b^2-4ac$ avec $a=2$; $b=-2$; $c=5$
$= (-2)^2-4\times 2\times 5 = 4-40 = -36$
$\Delta<0$ donc $f(x)$ n'admet aucune racine réelle.

$\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
L'écran de la calculatrice graphique nous le confirme.

2) f est un quotient de polynômes donc est définie continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x^2-2x+5$ $u' : x \mapsto 4x-2$
$v : x \mapsto x^2$ $v' : x \mapsto 2x$

$f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Pour tout $x>0$: $f'(x) = \dfrac{x^2(4x-2)-2x(2x^2-2x+5)}{x^4}$

$= \dfrac{x(4x-2)-2(2x^2-2x+5)}{x^3}$

$= \dfrac{2x-10}{x^3}$

b) Les variations de f sur $]0;+\infty[$ dépendent du signe de sa dérivée sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$ $f'(x) = \dfrac{2x-10}{x^3}$, donc

$f'(x)$ est du signe de $2x-10$ sur $]0;+\infty[$.

$2x-10 \geqslant 0$
$\iff 2x \geqslant 10$
$\iff x \geqslant 5.$

D'où le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{5}$	$\nearrow$	2

$f(5) = \dfrac{2\times 5^2-2\times 5+5}{5^2}$

$f(5) = \dfrac{45}{25} = \dfrac{9\times\cancel{5}}{5\times\cancel{5}} = \dfrac{9}{5}$

3.a) La convexité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ dépend du signe de f'' sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or f' est une fonction rationnelle donc f' est continue est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x-10$ $u' : x \mapsto 2$
$v : x \mapsto x^3$ $v' : x \mapsto 3x^2$

$f'' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Pour tout $x>0$: $f''(x) = \dfrac{-3x^2(2x-10)+2x^3}{x^6}$

$= \dfrac{-3(2x-10)+2x}{x^4}$

$= \dfrac{-4x+30}{x^4}$

$f''(x)$ est donc du signe de $-4x+30$ sur $]0;+\infty[$

Or $-4x+30 \geqslant 0$

$\iff -4x \geqslant -30$

$\iff x \quad \frac{15}{2}$

D'où le tableau de signes de f'' et l'étude de convexité qui en résulte.

x	0		$15/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
convexité de f		f est con		f est con	

C_f présente un point d'inflexion d'abscisse $15/2$.

b) D'après le tableau précédent le point d'abscisse $\frac{15}{2}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Ses cordonnées sont $\left(\frac{15}{2}; f\left(\frac{15}{2}\right)\right)$

4) Les variations de f' dépendent du signe de sa dérivée f''.

D'après le tableau précédent relatif à l'étude de convexité on a :

x	0	1	α	2	$15/2$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$			0	$-$
$f'(x)$		-8	-1	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\searrow$

$f'(1) = -8$

$f'(2) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

f' est continue est strictement croissante sur $[1;2]$, à valeurs dans $[f'(1); f'(2)]$

Or $-1 \in [f'(1); f'(2)]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f'(x) = -1$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient

$\alpha \simeq 1,85$ à 10^{-2} près.