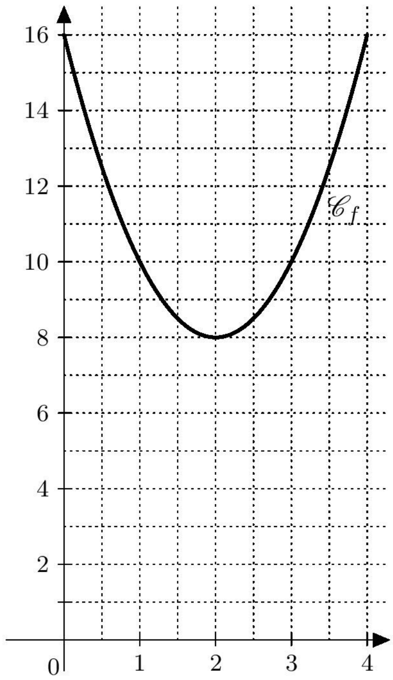
Compostion trimestrielle de mathématiques

Durée : 2 heures
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Les élèves doivent traiter les 4 exercices.

Exercice 1 (16 points). — On considère la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la fonction f est représentée graphiquement par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

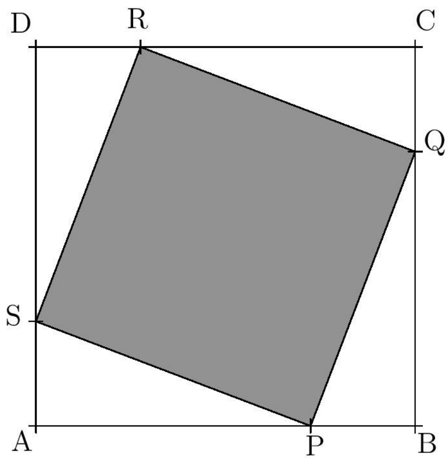


Partie A. — Étude graphique

On répondra aux questions de cette partie avec la précision permise par le graphique. On justifiera ses réponses.

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image de 1 puis l'image de 4 par f.
   b. Déterminer graphiquement les antécédents de 8 puis ceux de 13 par f.
2. **a.** Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;4]$.
   b. Déterminer le minimum de f sur $[0\,;4]$ et la valeur de x en laquelle il est atteint.
3. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 10$.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 10$.

Partie B. — Étude d'un problème concret



Une unité étant choisie, on considère un carré ABCD de côté 4. On note P, Q, R et S les points des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que AP = BQ = CR = DS.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du quadrilatère PQRS lorsque le point P décrit le segment [AB].
On pose AP = x.

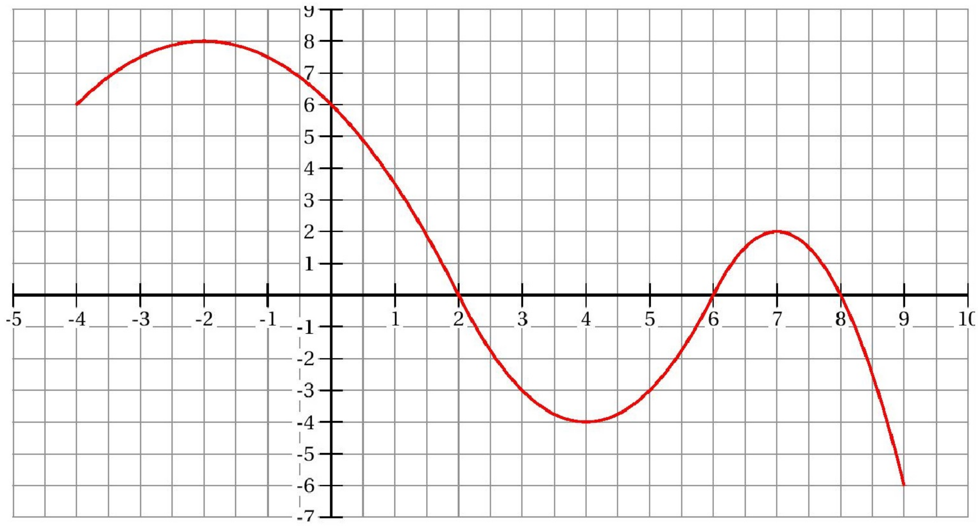
1. Dans quel intervalle varie le réel x ? (Justifier.)
2. **a.** Calculer l'aire du triangle APS en fonction de x.
   b. En déduire l'aire du quadrilatère PQRS en fonction de x et vérifier que cette aire est égale à $f(x)$ où f est la fonction définie au début de l'exercice.
3. À partir des considérations graphiques de la partie A, que peut-on conjecturer sur :
   a. la position de P sur [AB] telle que l'aire de PQRS soit minimale ? (Justifier.)
   b. les positions de P sur [AB] telles que l'aire de PQRS soit égale à 10 ? (Justifier.)
4. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) = 2(x-2)^2 + 8$.
5. **a.** Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geq 8$. La conjecture de la question 3.a est-elle vérifiée ?
   b. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 10$. La conjecture de la question 3.b est-elle vérifiée ?

EXERCICE 2 (9 points). — Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A $(3\,;-2)$, B $(6\,;3)$ et C $(1\,;6)$.

1. Placer ces points sur une figure et représenter le triangle ABC.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.
3. Calculer les coordonnées du milieu D de [AC].
4. Justifier que les points A, B et C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre D et déterminer le rayon de ce cercle.
   Représenter le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure.
5. On considère le point E de coordonnées $\left(-1\,;2+2\sqrt{2}\right)$.
   a. Démontrer que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   b. En déduire une méthode de construction précise du point E que l'on décrira explicitement puis effectuer cette construction sur la figure.

EXERCICE 3 (9 points).

La courbe ($\mathscr{C}$)indiquée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f .



Par lecture graphique , répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction .
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Valeurs de x	-4	3	5	8	$\cdots$
Valeurs de $f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	8

3. Résoudre l'équation $f(x) = -2$.
4. Résoudre les inéquations $f(x) \geqslant 6$ et $f(x) \leqslant -3$.
5. Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4\,;\,9]$.
7. Préciser le maximum et le minimum de f sur $[-4\,;\,9]$.

Exercice 4 (6 points). — Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1,5 point. L'absence de réponse, ou le fait de donner plusieurs réponses pour une même question, n'enlève ni ne rapporte aucun point. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Pour tous réels a et b, le nombre $(a^2+b)^2$ est égal à :

a) a^4+b^2 b) $a^4+b^2+2a^4b^2$ c) $a^4+b^2+2a^2b$ d) $a^2+2ab+b^2$.

2. Si f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-x^2+2x+1$ alors l'image de -1 par f est :

a) -2 b) 0 c) 2 d) 4.

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(x+1)^2=1$ est :

a) $\{0\}$ b) $\{-1\,;1\}$ c) $\varnothing$ d) $\{-2\,;0\}$.

4. On fait fonctionner l'algorithme ci-contre avec les nombres $x=-12$ et $y=8$ en entrée. On obtient alors en sortie pour x et y les nombres:

Entrée :	Saisir un réel x et un réel y
Traitement :	$x \leftarrow x+2y$
	$y \leftarrow 2x-13$
	$x \leftarrow 3x-y$
Sortie :	Afficher x.
	Afficher y.

a) -40 et -37 b) 7 et 5

c) 17 et -5 d) -12 et 21