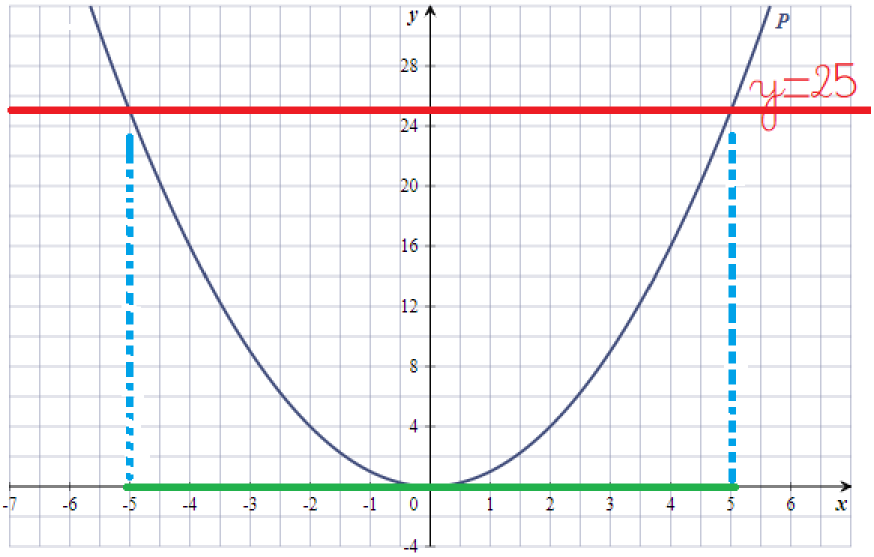
Correction du CC 2 chap 4

Exercice 1

Soit x un réel,

1. L'affirmation « si $x^2 \leq 25$ alors $x \leq 5$ » est-elle vraie ?

Résoudre graphiquement $x^2 \leq 25$ revient à déterminer graphiquement les abscisses des points de la courbe situés en dessous de la droite horizontale d'équation $y = 25$.
Les abscisses solution sont coloriées en vert, elles sont bien inférieures ou égale à 5.
La réciproque de cette affirmation est en revanche fausse. On dit que ($x \leq 5$) est une condition nécessaire pour ($x^2 \leq 25$) mais non suffisante .
($x \leq 5$) et ($x^2 \leq 25$) ne sont donc pas des conditions nécessaires et suffisantes : il ne s'agit donc pas d'une équivalence



2. Ecrire une proposition équivalente à $x^2 \leq 25$

$$x^2 \leq 25$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 25 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-5)(x+5) \leq 0$$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-5)(x+5)$		**+**	0	**−**	0	**+**	

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

Conclusion :

$$x^2 \leq 25$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [-5;5]$$

La proposition équivalente est donc :
« $x^2 \leq 25$ si et seulement si $-5 \leq x \leq 5$ »

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)^2 = 9$

Méthode 1 : équation $X^2 = k$ voir cours et capsule

$$\begin{array}{ll} & (x-1)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow & (x-1) = 3 \quad \text{ou} \quad (x-1) = -3 \\ \Leftrightarrow & x = 3+1 \quad \text{ou} \quad x = -3+1 \\ \Leftrightarrow & x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{array}$$

$\boxed{s = \{-2 ; 4\}}$

Méthode 2 : Méthode équation $X^2 = k$ voir cours et capsule

$$\begin{array}{ll} & (x-1)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 - 3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & [(x-1)-3][(x-1)+3] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)(x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x-4=0 \quad \text{ou} \quad x+2=0 \ \text{d'après la règle du produit nul} \\ \Leftrightarrow & x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{array}$$

$\boxed{s = \{-2 ; 4\}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(3-2x)^2 \leq 25$

Méthode 1 : inéquation produit

$$\begin{array}{ll} & (3-2x)^2 \leq 25 \\ \Leftrightarrow & (3-2x)^2 - 25 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (3-2x)^2 - 5^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & [(3-2x) - 5][(3-2x)+5] \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (-2-2x)(8-2x) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -2(1+x)(-2)(x-4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 4(x+1)(x-4) \leq 0 \end{array}$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de $(x+1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-4)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $4\times(x+1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Remarque : il y a 3 facteurs dans le produit $4(x+1)(x-4)$ donc en théorie 3 lignes dans le tableau, mais il est sans intérêt de faire une ligne pour le signe de 4. En effet 4 étant positif, le produit $4(x+1)(x-4)$ est ***du signe de*** $(x+1)(x-4)$.
*L'expression « **du signe de** » est à connaître.*

Conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned}&(3-2x)^2 \leq 25\\ \Leftrightarrow\ & x \in [-1;4]\end{aligned}}$$

Méthode 2 : utiliser le résultat de l'exercice 1

D'après l'exercice 1, on a :

remarque : dans l'exercice on a $X = 3-2x$

$$\begin{array}{llll}
 & X^2 \leq 25 & & \\
\Leftrightarrow & X \in [-5;5] & & \\
\Leftrightarrow & X \leq 5 & \text{et} & X \geq -5 \\
\Leftrightarrow & 3-2x \leq 5 & \text{et} & 3-2x \geq -5 \\
\Leftrightarrow & -2x \leq 5-3 & \text{et} & -2x \geq -5-3 \\
\Leftrightarrow & -2x \leq 2 & \text{et} & -2x \geq -8 \\
\Leftrightarrow & x \geq \dfrac{2}{-1} & \text{et} & x \leq \dfrac{-8}{-2} \\
\Leftrightarrow & x \geq -1 & \text{et} & x \leq 4
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1;4]$$