

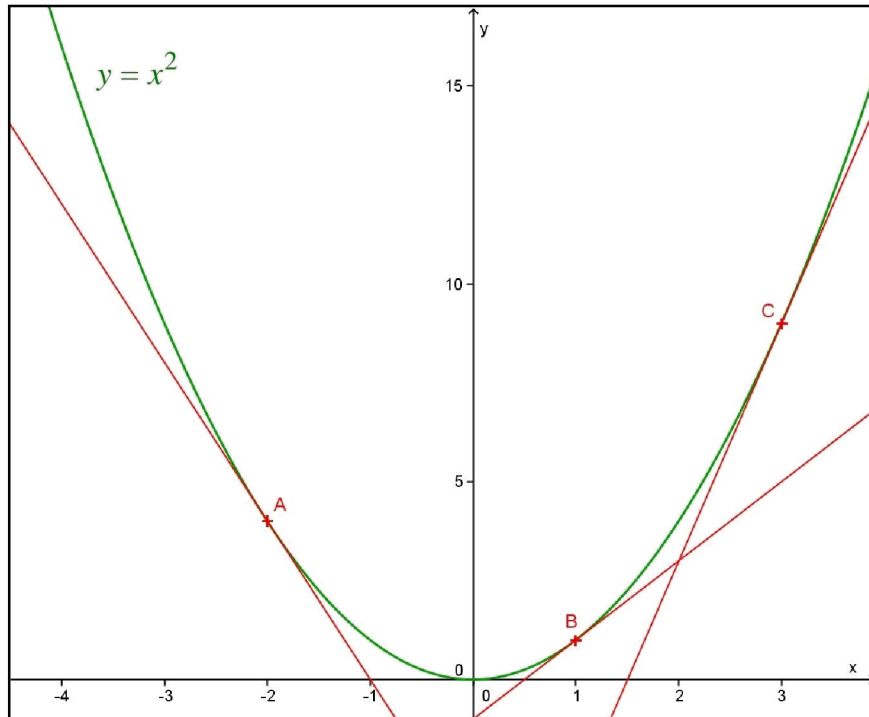
Convexité

I – Fonction convexe, fonction concave

Définition 1: On appelle **fonction convexe** une fonction dérivable sur intervalle I, dont la courbe représentative est

Exemple de fonction convexe

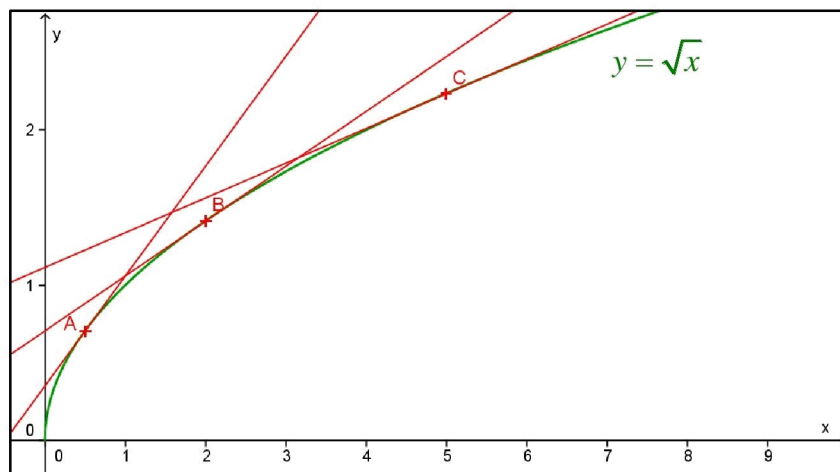
- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .



Définition 2: On appelle **fonction concave** une fonction dérivable sur intervalle I, dont la courbe représentative est

Exemples de fonctions concaves

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R} .



Propriété 1: • Une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si
• Une fonction est concave sur un intervalle I si et seulement si

Remarque : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I alors la propriété 1 se traduit par :

- f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I$,
- f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I$,

où f'' désigne la **fonction dérivée de f'** .

Exemple : Étudier la convexité d'une fonction sur un intervalle

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur \mathbb{R} .

II – Point d'inflexion d'une courbe

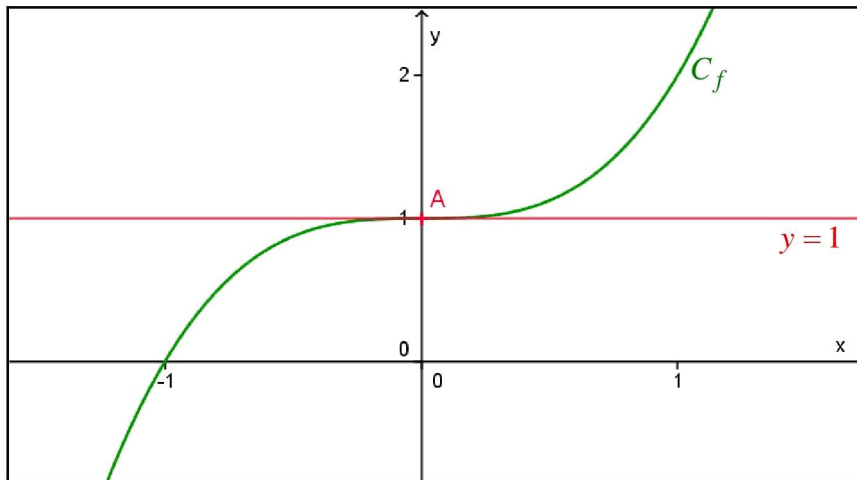
Définition 3: On appelle **point d'inflexion** un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.

Exemple : Reconnaître un point d'inflexion sur un graphique

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur \mathbb{R} . On appelle C_f sa représentation graphique.

f est dérivable sur \mathbb{R} telle que $f'(x) = 3x^2$.

Équation de la tangente à C_f en $A(0, f(0))$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = 1$



La courbe C_f traverse sa tangente en A donc A est un point d'inflexion de C_f .

Propriété 2: Soit f une fonction 2 fois dérivable (f' est dérivable) sur un intervalle I.
La courbe représentative de f a un point d'inflexion d'abscisse x_0 si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 .

Exemple : Trouver point d'inflexion par le calcul

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur \mathbb{R} . On appelle C_f sa représentation graphique.