CORRECTION

PARTIE A : généralités sur les suites

Exercice 1 : sens de variation d'une suite *2 points*

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $U_n = n^2 + 4n - 1$.
Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 + 4(n+1) - 1 - (n^2 + 4n - 1) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - 1 - n^2 - 4n + 1$
$= 2n + 5$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2n + 5 \geq 5 \geq 0$
La suite (U_n) est donc croissante.

Exercice 2 : suite définie par récurrence *4 points*

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - 5}{2}$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5}{2}$

   a. A l'aide de la calculatrice en mode TABL, compléter le tableau de valeurs suivant :

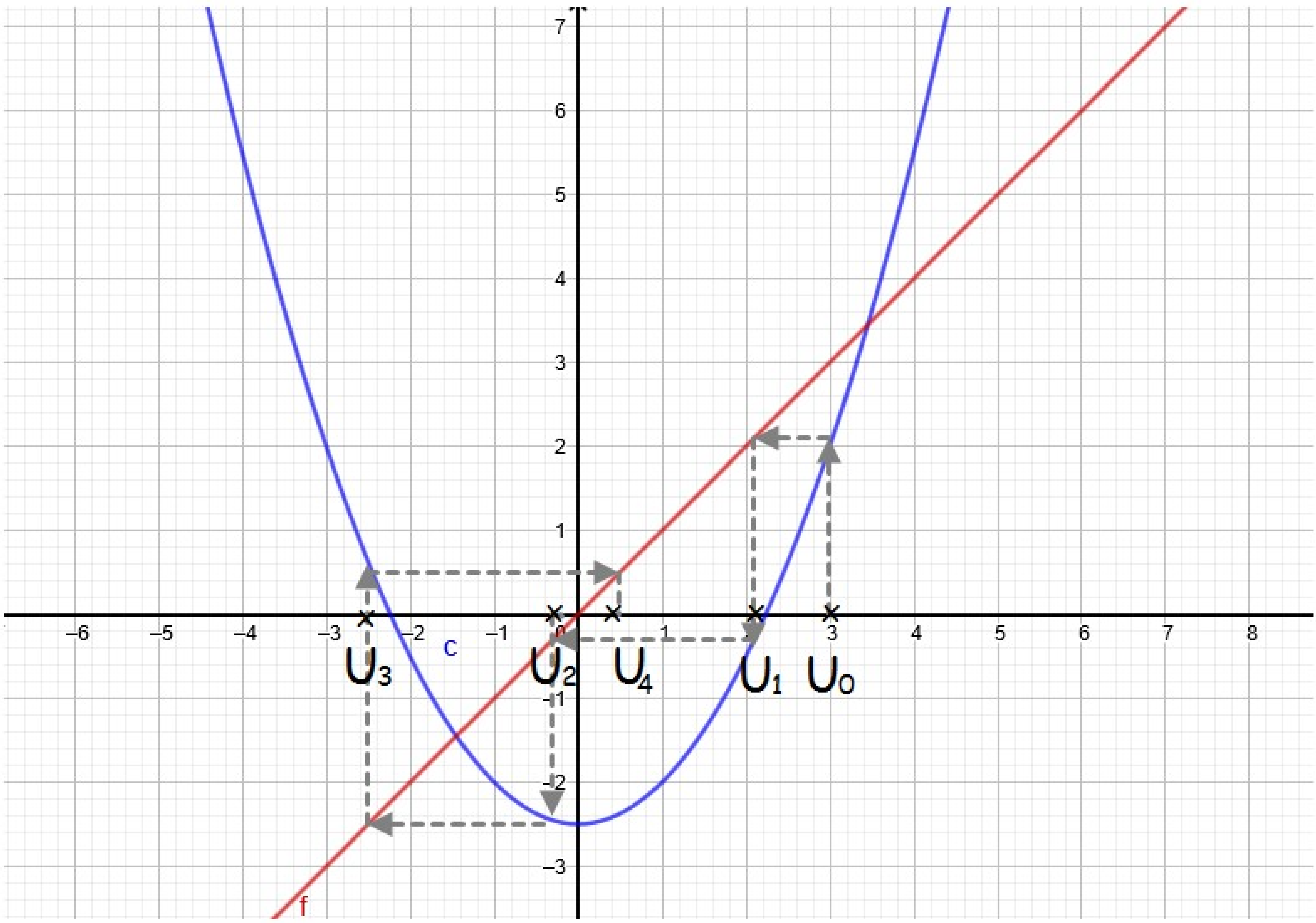
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	2	0,625	– 0,5	–1,375	–2	–2,375	–2,5	–2,375	–2	–1,375	– 0,5	0,625	2	3,625	5,5

   b. Construire en bleu sur l'annexe fournie la représentation graphique de la fonction f sur $[-3; 4]$

   c. Tracer en rouge la droite Δ d'équation $y = x$

2. En déduire la construction des 5 premiers termes de la suite (U_n). (on ne demande pas de calculer les termes de la suite)

annexe : Partie A – construction des termes successifs d'une suite définie par une relation de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$



PARTIE B : Problème *14 points*

Une association caritative a constaté que chaque année, 20% des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.
Lors de la première année d'étude en 2016, l'association comptait 1000 donateurs. On note U_n le nombre de donateurs lors de la n-ième année. On a donc $U_1 = 1000$.

1. Calculer U_2 et U_3.

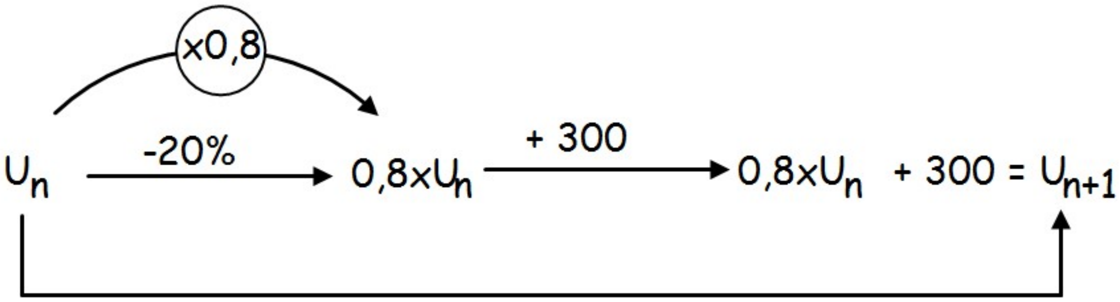
Diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8.
$1000 \times 0,8 = 800$
800 + 300 = 1100
$U_1 = 1100$

De la même façon on a :
$1100 \times 0,8 = 880$
880 + 300 = 1180
$U_2 = 1100$

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 300$$

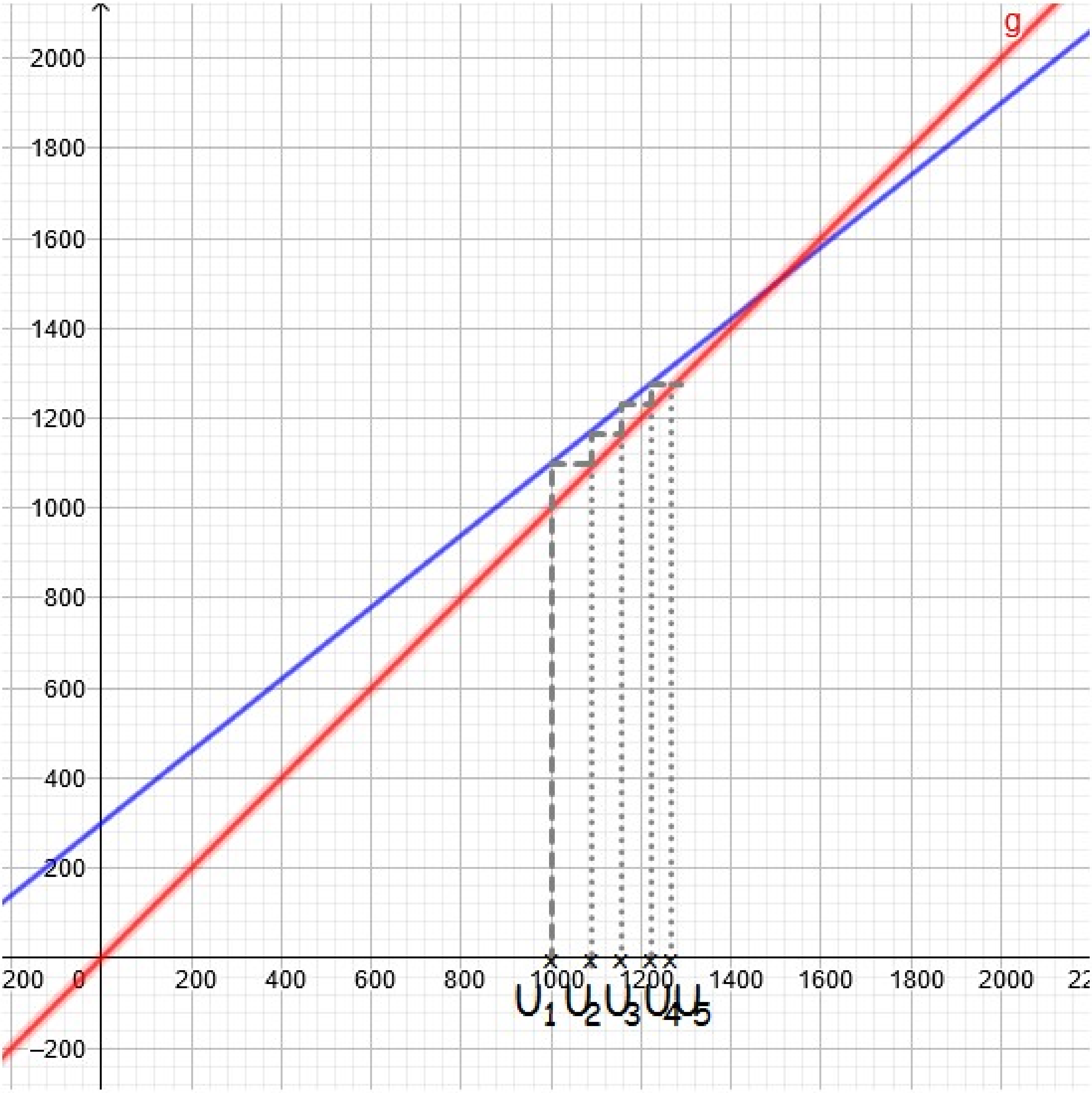
D'une année n quelconque à l'année $n+1$, le mécanisme est le suivant :



Le schéma précédent met donc en évidence la forme récurrente de la suite (U_n) et on a bien pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 300$$

3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représentez les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,8x + 300$.
   Construire les 5 premiers termes de la suite (U_n).


g
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
−200
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
U1 U2 U3 U4 U5

4. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de donateurs dépassera 1480.
   a. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il puisse répondre à cette question.

```
U ← 1000
N ← 0

Tant que U ≤ 1480
    N ← N + 1
    U ← 0,8xU + 300
Fin Tant que
Afficher N
```

   b. Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de N	1	2	3	4	5	6	7	15	16
Valeur de U	1000	1100	1180	1244	1295,2	1336,1	1368,9	1478	1482
Condition $U \leq 1480$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Faux

   c. Quelle est la valeur retournée par l'algorithme ?

L'algorithme retourne la première valeur telle que la condition $U \leq 1480$ n'est plus remplie soit $N = 16$.

5. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$V_n = 1500 - U_n$$

   a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(V_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = q \times V_n$$

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 1500 - U_{n+1} \\ &= 1500 - (0,8U_n + 300) \\ &= 1200 - 0,8U_n \\ &= 1200 - 0,8(1500 - V_n) \\ &= 0,8V_n \end{aligned}$$

Ainsi, (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8et de premier terme $V_1 = 1500 - U_1$=500.

On peut donc donner la forme explicite de la suite.

   b. En déduire, pour tout entier n, l'expression de U_n en fonction de n.

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,8et de premier terme V_1=500, donc pour tout entier n,

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 500 \times 0,8^{n-1}$$

On a de plus pour tout entier naturel n $U_n = 1500 - V_n = 1500 - 500 \times 0,8^{n-1}$

c. Combien y – aura-t-il de donateurs en 2030 ?

L'année 2016 correspond au rang 1 ; de plus on a 2023 = 2016 + 7.
En 2023, le rang sera donc $n = 8$.
$U_8 = 1500 - 500 \times 0,8^7 \approx 1395,14$
En 2023, l'association devrait recueillir 1395 dons.

d. Calculer la limite de la suite (U_n).

0,8 < 1 donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^{n-1} = 0$ par produit, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 0,8^{n-1} = 500 \times 0 = 0$.

Par différence : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1500 - 500 \times 0,8^{n-1} = 1500 - 0 = 1500$

e. Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?

Au bout d'un certain temps, le nombre annuel de donateurs qui est en augmentation depuis 2016 devrait se stabiliser autour de 1500 personnes.

6. En moyenne, un donateur effectue un don de 25€. Quelle sera le montant total des dons reçus de 2016 à 2030 ?

De 2016 à 2030, on compte 2030 – 2016 +1 = 15 années.

Soit S la somme totale perçue en 15 ans.

$$\begin{aligned} \text{On a S} &= 25 \times (U_1 + U_2 + ... + U_{15}) \\ &= 25 \times [(1500 - V_1) + (1500 - V_2) + ... + (1500 - V_{15})] \\ &= 25 \times [15 \times 1500 - (V_1 + V_2 + ... + V_{15})] \\ &= 25 \times \left[15 \times 1500 - V_1 \times \frac{1 - q^{15}}{1 - q}\right] \\ &= 25 \times \left[15 \times 1500 - 500 \times \frac{1 - 0,8^{15}}{0,2}\right] \\ &= 25 \times \left[15 \times 1500 - 2500 \times (1 - 0,8^{15})\right] \\ &\approx 502\ 199,02.... \end{aligned}$$

la somme étant nécessairement un multiple de 25, on a donc S = 502 200 €

(il faut toujours donner du sens à un résultat….)