Corrigé type

PARTIE A

1. $f'(6)$ correspond au coefficient directeur correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse 6. La tangente en $B(6;126)$ passe par l'origine du repère.

$$f'(6) = \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} = \frac{126}{6} = 21$$

La courbe traverse sa tangente en $A(3,5;104,75)$ donc la fonction change de convexité pour $x = 3{,}5$.
On en déduit que $f''(3,5) = 0$

2. En tout point d'abscisse inférieure à 3,5 la tangente à la courbe semble située au dessus de la courbe.
On peut donc conjecturer que la fonction f est concave sur]0 ;3,5] puis convexe sur [3,5 ;8].

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de]0 ;8] par $f(x) = x^3 - 10,5x^2 + 39x + 54$.
f est une fonction polynôme donc est deux fois dérivable sur son ensemble de définition.

1. Pour tout $x \in$]0 ;8], on a $f'(x) = 3x^2 - 21x + 39$
$f''(x) = 6x - 21$

2. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée f'.
Le discriminant du polynôme du second degré $3x^2 - 21x + 39$ est : $\Delta = (-21)^2 - 4 \times 3 \times 39 < 0$.

Pour tout réel x de l'intervalle]0 ;8], $f'(x)$ >0 donc la fonction f est strictement croissante sur]0 ; 8].

3. La convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde définie sur l'intervalle]0 ;8] par $f''(x) = 6x - 21$;

4.

x	0		3,5		8
$6x - 21$	||	$-$	0	$+$	

5. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour x =3,5 donc le point $A(3,5;104,75)$ est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

PARTIE C

1. C_M est dérivable par somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]0;8]$,

d'une part : $C'(x) = 2x - 10,5 - \dfrac{54}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 10,5x^2 - 54}{x^2}$

d'autre part : $(x-6)(2x^2+1,5x+9) = 2x^3 + 1,5x^2 + 9x - 12x^2 - 9x - 54$
$= 2x^3 - 10,5x^2 - 54$

Donc pour tout $x \in]0;8]$,
$C'(x) = \dfrac{(x-6)(2x^2+1,5x+9)}{x^2}$

2. Le discriminant du polynôme du second degré $2x^2+1,5x+9$ est : $\Delta = (1,5)^2 - 4 \times 2 \times 9 < 0$.
Donc le trinôme est de signe constant, strictement positif.

Pour tout réel x de l'intervalle]0 ;8], $C_M'(x)$ est du signe de $(x-6)$
$x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$.

Les variations de la fonction C_M sur]0 ;8] se déduisent du signe de sa dérivée C_M

x	0		6		8
$C'(x)$	‖	−	0	+	
$C_M(x)$	‖	↘	21	↗	

3. Le coût moyen minimal est obtenu pour une production mensuelle de 6000 articles.

$C_M(6) = 6^2 - 10,5 \times 6 + 39 + \dfrac{54}{6} = 21$

L'entreprise ne fait aucun bénéfice si le prix d'un article est inférieur à 21 €.