Correction de la composition trimestrielle

EXERCICE 1 LE FRÈRE DES EXERCICES 108 ET 109.

Partie A. — Étude graphique cela signifie qu'on ne se sert que du graphique !

1. a. $f(1)=10$ $\quad f(4)=16$

   b. $f(x)=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

   $f(x)=13 \quad \Leftrightarrow \quad x=0,4$ ou $x=3,6$

   $\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x \in \{0,4;3,6\}$

2. a.

x	0		2		4
Variations de f	16	$\searrow$	8	$\nearrow$	16

   b. $\underset{[0;4]}{Min}\, f = 8$ pour $x=2$

3. a. $f(x)=10 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$ ou $x=3$

   $\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x \in \{1;3\}$

   b. $f(x) \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1;3]$

Partie B. — Étude d'un cas concret

1. On sait que AP = x ; or $0 \leq AP \leq AB$ et $AB = 4$,
   donc lorsque P décrit [AB], x décrit l'intervalle [0 ; 4].

2. a. Le triangle APS est rectangle en A donc son aire est :

   $$Aire(APS) = \frac{AP \times AS}{2} = \frac{x \times (4-x)}{2}$$

   b. De la même façon :

   $$Aire(BPQ) = Aire(QCR) = Aire(RDS) = \frac{x \times (4-x)}{2}$$

   Or l'aire du carré $ABCD$ est $4^2 = 16$
   Donc l'aire du quadrilatère $PQRS$ est :

   $$Aire(PQRS) = 16 - 4 \times \frac{x \times (4-x)}{2} = 16 - 2x(4-x) = 16 - 8x + 2x^2 = f(x)$$

3. a. On a vu graphiquement que la fonction f atteint son minimum sur [0 ;4] en 2 donc on peut conjecturer que l'aire de $PQRS$ est minimale lorsque P est au milieu de [AB].

   b. On a vu graphiquement que les solutions de l'équation $f(x)=10$ sont 1 et 3 donc on peut conjecturer que l'aire de $PQRS$ vaut 10 lorsque P est au quart ou aux trois-quarts de [AB].

4. a. Pour tout $x \in [0;4]$,

$$\begin{aligned} 2(x-2)^2+8 &= 2(x^2-4x+4)+8 \\ &= 2x^2-8x+8+8 \\ &= 2x^2-8x+16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

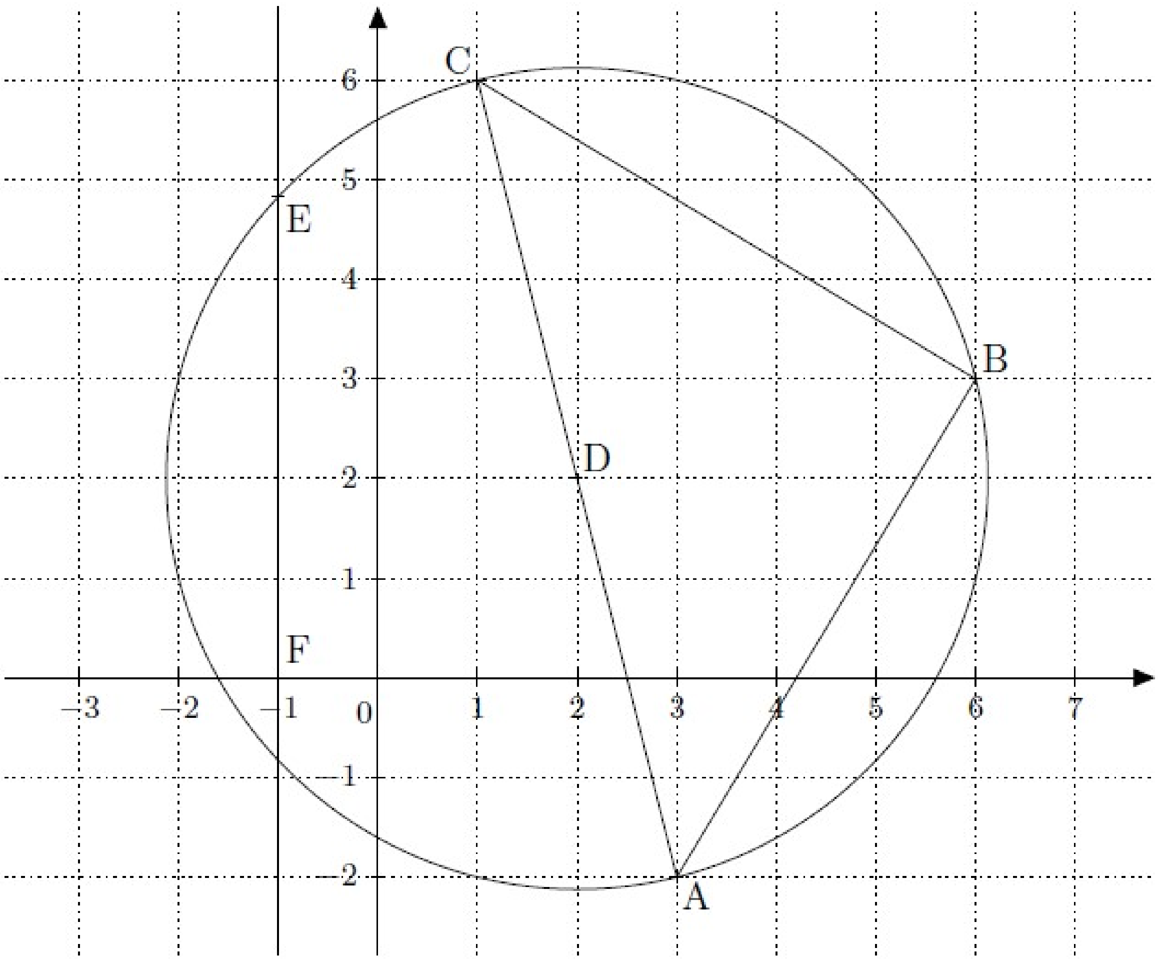
5. a. Pour tout $x \in [0;4]$, on a $(x-2)^2 \geq 0$

$(x-2)^2 \geq 0$
donc $2\times(x-2)^2 \geq 2\times 0$
donc $2(x-2)^2+8 \geq 0+8$
donc $f(x) \geq 8$

ceci prouve que le minimum de *f* sur [0 ;4] est 8.

<u>EXERCICE 2</u> LE FRÈRE DES EXERCICES 52 ET 53 TRAITÉS AU CHAPITRE 2.

1.



2. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$= (6-3)^2 + (3+2)^2$
$= 3^2 + 5^2$
$= 9 + 25$
$= 34$

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$
$= (1-6)^2 + (6-3)^2$
$= (-5)^2 + (3)^2$
$= 25 + 9$
$= 34$

$AC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$
$= (1-3)^2 + (6+2)^2$
$= (-2)^2 + 8^2$
$= 4 + 64$
$= 68$

$AB^2 = BC^2$ donc ABC est isocèle en B.

D'une part : $AB^2 + BC^2 = 34 + 34 = 68$ D'autre part : $AC^2 = 68$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, est rectangle en B.

Conclusion : $\boxed{ABC \text{ est rectangle isocèle en B.}}$

3. $D\left(\dfrac{x_A + x_C}{2} ; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$

$D\left(\dfrac{3+1}{2} ; \dfrac{6+(-2)}{2}\right)$

$\boxed{D(2;2)}$

4. On sait que le triangle ABC est rectangle en B et $[AC]$ est son hypoténuse, et D=m$[AC]$.
Or, si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans un cercle dont le diamètre est son hypoténuse.
Donc A,B,C appartiennent au cercle de centre D et de rayon $R = \dfrac{AC}{2}$

$$R = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{\sqrt{4\text{x}17}}{2} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$$

5. a. E appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $ED = R$.
Or $ED^2 = (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2$
$= (2+1)^2 + (2-2-2\sqrt{2})^2$
$= 3^2 + (2\sqrt{2})^2$
$= 9 + 8$
$= 17$ *cqfd.*
Le point E appartient donc à $\mathscr{C}$.

b. On trace la droite verticale d'équation $x = -1$. Elle coupe $\mathscr{C}$ en 2 points. Le point E est le point d'ordonnée positive.

<u>EXERCICE 3</u> LE FRÈRE DES EXERCICES DES DST 1-2-3….

1. $D_f = [-4;9]$

2.

Valeurs de x	-4	3	5	8	-2
Valeurs de $f(x)$	6	-3	-3	0	8

3. $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 2,6$ ou $x = 5,4$ ou $x = 8,4$
$\Leftrightarrow x \in \{2,6; 5,4; 8,4\}$

4. $f(x) \geq 6 \Leftrightarrow x \in [-4;0]$

$f(x) \leq -3 \Leftrightarrow x \in [3;5] \cup [8,6;9]$

5.

x	-4		2		6		8		9
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

6.

x	-4		-2		4		7		9
Variations de f			8				2		
		↗		↘		↗		↘	
	6				-4				-6

7. $\underset{[-4;9]}{Min} f = -6$ $\underset{[-4;9]}{Max} f = 8$

<u>EXERCICE 4</u>

1. Pour tous réels a et b, $(a^2+b)^2 = (a^2)^2 + za^2b + b^2 = a^4 + 2a^2b + b^2$
2. $f(-1) = -(-1)^2 + 2\times(-1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2$
3. Pour tous réel x, $(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow [(x+1)-1][(x+1)+1] = 0$
$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 2 = 0$ d'après la règle du produit nul
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

$\mathcal{S} = \{-2 ; 0\}$

4. L'algorithme retourne les valeurs 17 pour x et -5 pour y.