Chapitre 4 : suites numériques

I Vocabulaire et notations

1. Définition :

Une suite numérique est une liste de nombres réels qui sont numérotés par des entiers naturels, en commençant en général par 0 ou 1.

Exemple : On considère la liste de nombres suivants :

-2,7 ; 3 ; 5,1 ; 9 ; -12,4 est une liste de nombres réels.

La liste précédente compte 5 termes.

Le premier terme de cette liste de valeurs est 3

2 - Suites numériques et fonctions :

a) Définition

une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels une suite est souvent désignée par une lettre ; par exemple U, V, W

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U(n)$$

on peut donc calculer $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$, mais pas $U(-1{,}27)$ ni $U(3{,}12)$ ou encore $U(-2)$ car $-1{,}27$; $3{,}12$; -2 ne sont pas des nombres entiers naturels. On ne calcule les images que des nombres positifs, sans virgule.

b) Notation d'une suite

$U(n)$ ou encore U_n est le terme général de la suite U notée encore (U_n)

Exemple : On considère la suite (U_n) définie par $U(n) = U_n = 3n^2 + n - 1{,}2$

$$U_2 = U(2) = 3 \times (2)^2 + 2 - 1{,}2 = 3 \times 4 + 2 - 1{,}2 = 12{,}8$$

$$U(7) = U_7 = 3 \times (7)^2 + 7 - 1{,}2 = 3 \times 49 + 7 - 1{,}2 = 152{,}8$$

c) Vocabulaire : U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 sont les 6 premiers termes de la suite (U_n)

0 est le rang du terme U_0.

U_1 est le terme de rang 1

Le terme de rang 5 est U_5.

Le premier terme de la suite est U_0.

U_4 est le 5e terme de la suite.

De façon générale, le terme de rang n est U_n.

d) représentation graphique : température dans les capitales de différents pays un jours donné

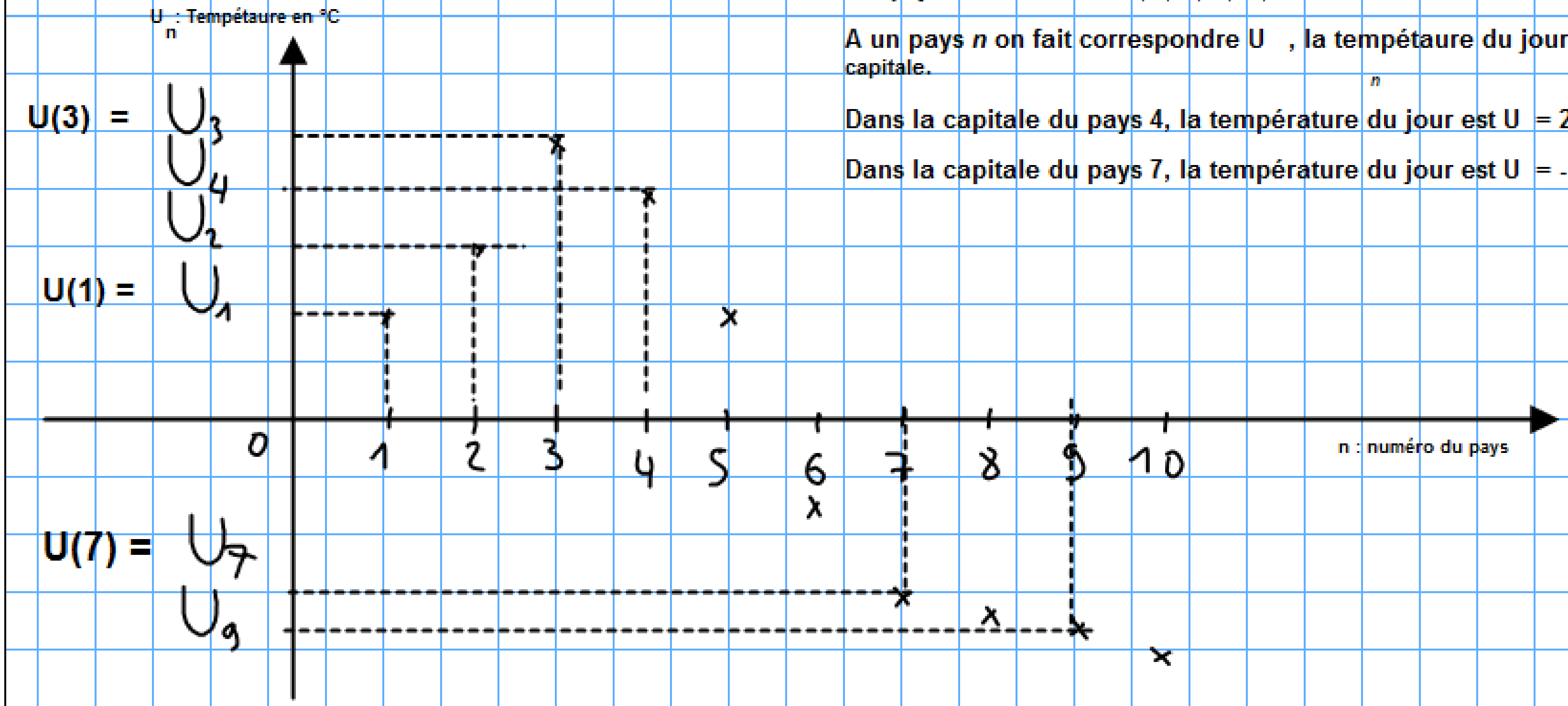
Le graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

Les pays sont numérotés 1; 2; 3 ; 4 ;.....; 10

A un pays *n* on fait correspondre U_n, la tempétaure du jour dans sa capitale.

Dans la capitale du pays 4, la température du jour est U_4 = 2,4°C

Dans la capitale du pays 7, la température du jour est U_7 = - 2,2°C



<u>remarque</u> si n est obligatoirement un nombre entier, U_n son image peut tout à fait être un nombre réel (à virgule).

3. Définition d'une suite de façon explicite

On dit qu'une suite est définie de façon explicite lorsque l'on connaît le terme général de la suite, c'est à dire l'expression algébrique de la fonction.
On peut donc calculer un terme de la suite en remplaçant par une valeur de n.

Exemple : On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = n^2 - 5$
Dressons le tableau de valeurs de cette suite : cela consiste à donner des valeurs à la variable n, et à calculer les images successives pour chaque valeur de n.

pour $n = 0$ on a $U_0 = 0^2 - 5 = 0 - 5 = -5$

$U_{0,7}$ n'existe pas car $0,7 \notin \mathbb{N}$

$U_1 = 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4$

$U_2 = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

$U_3 = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

$U_4 = 4^2 - 5 = 16 - 5 = 11$

$U_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

on considère la suite définie pour tout entier naturel n par Un= 0,5n – 2

a- quel est le premier terme de la suite ? Donner sa valeur ?

Le premier terme est $U_0 = 0,5 \times 0 - 2 = -2$

b- Donner les 4 premiers termes de cette suite, avec leur valeur.

$U_0 = -2$

$U_1 = 0,5 \times 1 - 2 = 0,5 - 2 = -1,5$

$U_2 = 0,5 \times 2 - 2$
$= 1 - 2 = -1$

$U_3 = 0,5 \times 3 - 2 = 1,5 - 2 = -0,5$

c- Donner la valeur du terme de rang 78

Le terme de rang 78 est $U_{78} = 0,5 \times 78 - 2 = 39 - 2 = 37$

d- Quel est le rang ~~l'indice~~ du 85ème terme ?

Le 85è terme est le terme de rang 84.

on considère la suite définie pour tout entier naturel n par Un= 0,5n – 4

a- quel est le premier terme de la suite ? Donner sa valeur ?

Le premier terme est $U_0 = 0{,}5 \times 0 - 4 = -4$

b- Donner les 4 premiers termes de cette suite, avec leur valeur.

$U_0 = -4$

$U_1 = 0{,}5 \times 1 - 4 = -3{,}5$

$U_2 = 0{,}5 \times 2 - 4 = 1 - 4 = -3$

$U_3 = 0{,}5 \times 3 - 4 = 1{,}5 - 4 = -2{,}5$

c- Donner la valeur du terme de rang 76.

Le terme de rang 76 est $U_{76} = 0{,}5 \times 76 - 4 = 34$

d- Quel est l'indice du 82ème terme ?

Le 82^{e} terme est U_{81}

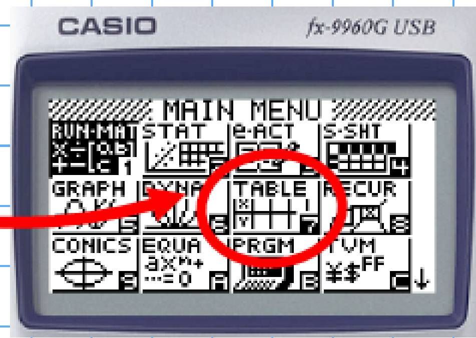
Le 82^{e} terme est le terme de rang 81

Remarque : Lorsque la suite est définie de façon explicite, on connaît l'expression de U_n en fonction de n.

Méthode : savoir utiliser sa calculatrice pour générer les différents termes d'une suite définie par une expression de la forme $U_n = f(n)$

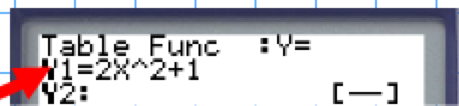
On considère la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}$ telle que $U_n = 2n^2 + 1$.

avec la calculatrice en mode TABL ...

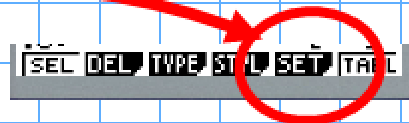


on rentre l'expression algébrique de la fonction associée à la suite (U_n).

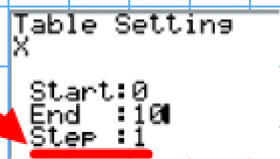
Ici $f(x) = 2x^2 + 1$ ...



on paramètre la calculatrice ...



pour qu'elle génère les images de $x = 0$ à $x = 10$, de 1 en 1



n X	U_n Y1
0	1
1	3
2	9
3	19
4	33
5	51
6	73
7	99
7	99
8	129
9	163
10	201

d'après le tableau de valeurs, on a :

$U_0 = 1$
$U_1 = 3$
$U_2 = 9$
$U_3 = 19$
$\vdots$
$U_8 = 129$

- quel est le terme de rang 7 ? Combien vaut-il ?

Le terme de rang 7 est $U_7 = 99$.

- quel est le 10ᵉ terme ? Combien vaut-il ?

Le 10ᵉ terme est $U_9 = 163$. U_9 est le 10ᵉ terme, mais c'est le terme de rang 9.

4) Définition d'une suite par récurrence

Une suite est définie par récurrence, lorsque chaque terme se calcule à partir de la connaissance du terme précédent et que le premier terme est donné.

Exemple : Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n - 3 \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

Le premier terme de la suite est $v_0 = 2$

Le deuxième terme est v_1.

Pour obtenir v_1 : il faut remplacer n par 0 dans la relation précédente

On a alors $v_1 = v_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

Pour obtenir v_2 : il faut remplacer n par 1 dans la relation précédente

on a donc $v_2 = v_1 - 3 = -1 - 3 = -4$

De même $v_3 = v_2 - 3 = -4 - 3 = -7$ $\qquad v_5 = v_4 - 3$: il faut d'abord calculer v_4

remarque : La forme récurrente n'est pas très pratique car pour obtenir v_{28} il faut calculer tous les termes jusqu'à v_{27} avant de pouvoir écrire (dans cet exemple) :
$v_{28} = v_{27} - 3$

11 **C** On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de u_0, u_1, u_2 et u_3.

12 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -v_n + 2 \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.

2. Marquer sur un graphique les points représentatifs de v_0, v_1, v_2 et v_3.

Suites arithmétiques

Activité 1 an de plus ? Le cadeau augmente de 5 euros !

La banque ARI fait à ses clients sur le point d'être parents l'offre promotionnelle qui suit : « Le jour de naissance de votre bébé, nous virons la somme de 20 € sur le compte que nous ouvrons à son nom. À chacun de ses anniversaires, nous virerons sur ce compte une somme égale au virement de l'année précédente, augmentée de 5 €. »

1. Quelle somme sera virée sur le compte de l'enfant à son premier anniversaire ? à son deuxième anniversaire ? à son troisième anniversaire ?

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 20$ et, pour tout nombre entier naturel n non nul, u_n est la somme en euros virée sur le compte de l'enfant le jour de son n-ième anniversaire. Reproduire et compléter le schéma et le tableau suivants.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{+5} \boxed{u_1} \xrightarrow{+5} \boxed{u_2} \xrightarrow{+5} \boxed{u_3} \xrightarrow{+5} \boxed{u_4} \cdots \boxed{u_n} \xrightarrow{+5} \boxed{u_{n+1}} \cdots$$

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
20	25	30	35	40	45	50	55

3. Expliquer pourquoi tout terme de la suite (u_n) est strictement inférieur au terme suivant. Qu'en déduire sur le sens de variation de cette suite ?

1. A son premier anniversaire, l'enfant recevra sur son compte $U_1 = 25$ €
deuxième .... $U_2 = 30$ €
troisième .... $U_3 = 35$ €

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + 5$ donc $U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow U_n < U_{n+1}$
donc (U_n) est strictement croissante.

II Suites arithmétiques

1) Définition

Une suite est dite arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r appelée raison de la suite.

Remarque : Cette définition met en évidence la forme récurrente d'une suite arithmétique.

Exemple : Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

a) Donner les 5 premiers termes de la suite.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n

---

a) $U_0 \xrightarrow{+3} U_1 \xrightarrow{+3} U_2 \xrightarrow{+3} U_3 \xrightarrow{+3} U_4 \dots U_n \xrightarrow{+3} U_{n+1}$

2   5   8   11   14

Les 5 premiers termes sont : $U_0 = 2$; $U_1 = 5$; $U_2 = 8$; $U_3 = 11$; $U_4 = 14$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = U_n + 3$: forme récurrente de la suite

2. Forme récurrente

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = r$

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + r$: Forme récurrente de la suite (U_n)

$$U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$$

Suites arithmétiques

17 Vrai ou faux

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Les nombres 0 ; 1 ; 3 ; 4 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

2. Les nombres −1 ; 0 ; 1 ; 2 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

3. Les nombres −0,6 ; −0,1 ; 0,4 ; 0,9 sont, dans l'ordre, des termes successifs d'une suite arithmétique.

1. On pose $U_0 = 0$ $U_1 = 1$ $U_2 = 3$ $U_3 = 4$

D'une part $U_1 - U_0 = 1 - 0$

D'autre part $U_2 - U_1 = 3 - 1 = 2$

La différence entre 2 termes consécutifs n'est pas constante donc (U_n) n'est pas arithmétique.

2. Posons $U_0 = -1$ $U_1 = 0$ $U_2 = 1$ $U_3 = 2$

On a $U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = 1$

La différence entre 2 termes consécutifs est constante, égale à 1 donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

3. Posons $U_0 = -0,6$ $U_1 = -0,1$ $U_2 = 0,4$ $U_3 = 0,9$

On a $U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = 0,5$

La différence entre 2 termes consécutifs est constante, égale à 0,5 donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,5$

25 C On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 5, telle que $u_{11} = -10$. Calculer u_{12}.

CONSEIL
$u_{11} \xrightarrow[+5]{} u_{12}$

26 On considère une suite arithmétique (w_n) de raison -8, telle que $w_4 = 15$. Calculer w_5 et w_6.

27 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 7, telle que $u_6 = 23$. Calculer u_5.

CONSEIL
$u_5 \xrightarrow[+7]{} u_6 = 23$

28 On considère une suite arithmétique (v_n) de raison -3, telle que $v_9 = -2$. Calculer v_8.

29 Calculer la raison d'une suite arithmétique (v_n) telle que $v_9 = 5$ et $v_{10} = 18$.

CONSEIL
$v_9 = 5 \xrightarrow[+a]{} v_{10} = 18$

30 Calculer la raison d'une suite arithmétique (w_n) telle que $w_{14} = -5$ et $w_{15} = -9$.

31 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, selon la valeur de sa raison a, pour :
$a = -1,5$; $a = 0,1$; $a = -0,2$; $a = 11$; $a = 0$.

32 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, selon la valeur de sa raison a, pour :
$a = -4$; $a = 0,5$; $a = -0,5$; $a = 25$.

Méthode : Démontrer qu'une suite est arithmétique

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit d'établir que la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante pour tout entier naturel n.

La différence $U_{n+1} - U_n$ correspond alors à la raison de la suite

Exemples :

Exemple 1 : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

a) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer U_4

Solution : a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + 5$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 5$$

La différence entre 2 termes consécutifs est constante, égale à 5 donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$

b) Calculons U_4

$$U_0 \xrightarrow{+5} U_1 \xrightarrow{+5} U_2 \xrightarrow{+5} U_3 \xrightarrow{+5} U_4$$

U_0	U_1	U_2	U_3	U_4
2	7	12	17	22

$U_4 = 22$

<u>Exemple 2 :</u>

On considère la liste de nombres suivants : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 7 ; 9 ; 11

Ces nombres sont-ils dans l'ordre des termes successifs d'une suite arithmétique ?

Solution : Posons $U_0 = 0$ $U_1 = 2$ $U_2 = 4$ $U_3 = 6$ $U_4 = 7$ $U_5 = 9$ $U_6 = 11$

D'une part

$U_1 - U_0 = 2 - 0 = 2$

D'autre part

$U_4 - U_3 = 7 - 6 = 1$

La différence entre 2 termes consécutifs n'est pas constante donc (U_n) n'est pas arithmétique.

3. Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r

- si $r > 0$ (U_n) est croissante
- si $r = 0$ (U_n) est constante
- si $r < 0$ (U_n) est décroissante

Preuve : (U_n) est arithmétique de raison r donc :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = U_n + r$

$\iff U_{n+1} - U_n = r$

- si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$

  $\iff U_{n+1} > U_n$: les termes successifs vont en augmentant

- si $r = 0$ alors $U_{n+1} - U_n = 0$

  $\iff U_{n+1} = U_n$: tous les termes sont égaux

- si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$

  $\iff U_{n+1} < U_n$: les termes successifs vont en diminuant

Exemple : Déterminer le sens de variation des suites arithmétiques de raison r pour a) $r = -2,5$ b) $r = 0,3$ c) $r = 13$ d) $r = 0$

Solution :

a) $r < 0$ donc la suite est décroissante

b) $r > 0$ donc la suite est croissante

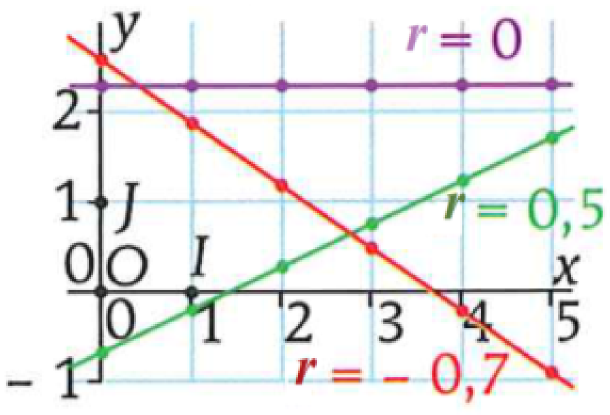
c) $r > 0$ donc la suite est croissante

d) $r = 0$ donc la suite est constante.

4) Représentation graphique

Propriété :

- Lorsque la suite (U_n) est arithmétique, tous les points de coordonnées $(n ; U_n)$ sont situés sur une droite.
  Le coefficient directeur est la raison de la suite.
- Réciproquement, lorsque tous les points de coordonnées $(n ; U_n)$ sont situés sur une droite alors la suite (U_n) est arithmétique et le coefficient directeur est la raison de la suite



5. Forme explicite d'une suite arithmétique : Expression de U_n en fonction de n

a) Méthode pour compter les intervalles : sur un exemple

$$U_5 \longrightarrow U_6 \longrightarrow U_7 — U_8 — U_9 — U_{10} — U_{11} — U_{12}$$

on dénombre 7 flèches (7 intervalles)

La suite comporte en revanche 8 termes.

Méthode : $12 - 5 = 7$ nombre de flèches

$7 + 1 = 8$ nombre de termes

Autre exemple : $U_{35} \longrightarrow U_{36} \longrightarrow U_{37} \cdots\longrightarrow U_{48}$

$48 - 35 = 13$: 13 flèches

$13 + 1 = 14$: 14 termes

b) Les 3 formes explicites d'une suite arithmétique de raison r

La forme explicite permet de calculer n'importe quel terme de la suite en connaissant le premier terme et la raison.

- Si le premier terme est U_0 :

$$U_0 \xrightarrow{+r} U_1 \xrightarrow{+r} U_2 \xrightarrow{+r} U_3 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} U_n$$

$$\xrightarrow{+\, n \times r}$$

il y a n flèches : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n = U_0 + n \times r}$ (1)

- Si le premier terme est U_1 :

on enlève une flèche, il en reste $(n-1)$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n = U_1 + (n-1) \times r}$ (2)

- Si le premier terme est U_p :

on enlève p flèches, il en reste $(n-p)$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$

$\boxed{U_n = U_p + (n-p) \times r}$ (3)

Exemples : (1) Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 7$ et de raison $r = 2,1$

Calculer U_{15}

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = U_0 + n \times r$

$U_n = 7 + n \times 2,1$

$U_n = 7 + 2,1n$: Forme explicite de la suite

Pour $n = 15$ $U_{15} = 7 + 2,1 \times 15 = 38,5$

(2) Soit (v_n) la suite arithmétique de 1er terme $v_1 = -3,8$ et de raison $r = 1,9$

Calculer v_{19}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_1 + (n-1) \times r$

$V_n = -3,8 + (n-1) \times 1,9$

Pour $n = 19$ $V_{19} = -3,8 + 18 \times 1,9 = 30,4$

(3) Soit (W_n) la suite arithmétique de 1er terme $W_4 = 3,9$ et de raison $r = -2,7$

Calculer W_{12}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$ $W_n = W_p + (n-p) \times r$

Pour $n = 12$ et $p = 4$ $W_{12} = W_4 + (12-4) \times r$

$W_{12} = W_4 + 8 \times r$

$W_{12} = 3{,}9 + 8 \times (-2{,}7) = -17{,}7$

1 * (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour chacun des cas suivants, donner la formule explicite de la suite arithmétique.

1. $u_0 = 3$ et $r = 7$.
2. $u_0 = 0{,}5$ et $r = -0{,}6$.
3. $u_0 = \frac{3}{4}$ et $r = \frac{1}{2}$.

2 * Une suite arithmétique est définie par son premier terme $u_1 = 10$ et sa raison $r = 7$.

1. Déterminer le dixième terme et le centième terme.
2. Même question avec $u_2 = -1$ et $r = 1{,}5$.

3 * (u_n) est une suite arithmétique. En utilisant la forme explicite de la suite, calculer u_0 et u_{10} dans chacun des cas suivants.

1. $u_4 = 25$ et $u_7 = 43$.
2. $u_{15} = -20$ et $u_{20} = -40$.
3. $u_{12} = 12$ et $u_{22} = 17$.

33 **C** Après un ennui de santé, Martin décide de suivre un régime amaigrissant, qui doit lui permettre de perdre régulièrement 2 kg par mois. Son poids initial est 100 kg. On pose $v_0 = 100$ et on note v_n le poids de Martin après n mois de régime.

Montrer que la suite (v_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

CONSEIL

Voir Exercice résolu 4 page 71.

$V_0 \xrightarrow{-2} V_1 \xrightarrow{-2} V_2 \dots V_n \xrightarrow{-2} V_{n+1}$

100

D'après ce schéma, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$V_{n+1} = V_n - 2$

$\Leftrightarrow V_{n+1} - V_n = -2$: la différence $V_{n+1} - V_n$ est constante et est égale à -2 donc (V_n) est arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $V_0 = 100$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 + n \times r$

$V_n = 100 + n \times (-2)$

$V_n = 100 - 2n$ Par exemple, au bout de 6 mois, le poids de Martin sera $v_6 = 100 - 2 \times 6 = 88$

34 Maxime attend impatiemment d'avoir 18 ans pour pouvoir donner son sang. Il prévoit de participer à 5 dons par an (c'est le maximum autorisé). On note u_1 le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses 19 ans, u_2 le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses 20 ans, u_n le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses $(18 + n)$ ans.

Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

(18 ans) (19 ans) (20 ans) (18+n) ans (18+n+1) ans

$U_0 \xrightarrow{+5} U_1 \xrightarrow{+5} U_2 \dots U_n \xrightarrow{+5} U_{n+1}$

0 5

D'après ce schéma, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = U_n + 5$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 5$:

La différence $U_{n+1} - U_n$ est constante, égale à 5 donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n = U_0 + n \times r \Leftrightarrow U_n = 5n$

35 Fin 2005, le nombre d'auditeurs d'une radio était de 2 millions. Depuis, ce nombre n'a cessé d'augmenter régulièrement, de 10 000 par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'auditeurs fin (2005 + n).
Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

Soit U_n le nombre d'auditeurs, exprimé en millions, fin (2005+n). $10\,000 = 0{,}01$ million

(2005) (2006) (2007) (2005+n) (2006+n)

$U_0 \xrightarrow{+0{,}01} U_1 \xrightarrow{+0{,}01} U_2 \ \dots \ U_n \xrightarrow{+0{,}01} U_{n+1}$

2

D'après ce schéma, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = U_n + 0{,}01$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 0{,}01$: la différence $U_{n+1} - U_n$ est constante, égale à 0,01

donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 0{,}01$ et de premier terme $U_0 = 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n = U_0 + n \times r$

$U_n = 2 + n \times 0{,}01 \qquad U_n = 2 + 0{,}01n$

Par exemple, en 2027 le nombre d'auditeurs sera $U_{22} = 2 + 0{,}01 \times 22 = 2{,}22$ millions $= 2\,220\,000$.

36 Pour limiter la circulation dans sa ville, une mairie loue des vélos à ses administrés, pour de petits déplacements. La première heure coûte 0,50 €, puis chaque heure suivante est facturée 1 €.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le montant de la location d'un vélo pour n heures facturées.
Montrer que la suite (u_n) correspondante est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.

$U_1 \xrightarrow{+1} U_2 \xrightarrow{+1} U_3 \ \dots \ U_n \xrightarrow{+1} U_{n+1}$

0,50

D'après le schéma, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = U_n + 1$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 1$:

La différence $U_{n+1} - U_n$ est constante, égale à 1 donc

(U_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $U_1 = 0{,}50$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_1 + (n-1) \times r$

$U_n = 0{,}50 + (n-1) \times 1$

$= 0{,}50 + n - 1$

$U_n = n - 0{,}5$

Pour 4 heures d'utilisation d'un vélo, le prix à payer sera $U_4 = 4 - 0{,}5 = 3{,}50$ €.

37 Une suite (u_n) est telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n - 1{,}5 = 0$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique ; préciser sa raison.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n - 1{,}5 = 0$

$\iff U_{n+1} - U_n = 1{,}5$: La différence $U_{n+1} - U_n$ est constante, égale à $1{,}5$ donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 1{,}5$.

ALGORITHMIQUE – BOUCLES

Les boucles permettent de répéter plusieurs fois une partie d'algorithme.

I) BOUCLES « POUR »

Ex : La somme des n premiers entiers

```
1   Variables :
2       s, i, n : entiers naturels
3   Début
4       0 → s
5       Demander n
6       Pour i allant de 1 à n
7           s + i → s   : s ← s+i
8       Fin pour
9       Afficher s
10  Fin
```

affectation de variable : notations

$0 \longrightarrow s$ 0 est affecté à s

$s \longleftarrow 0$ s prend la valeur 0

$s = 0$

	s	i	n
2			
4	0		
5	0		5
6	1	1	5
	3	2	5
	6	3	5
	10	4	5
	15	5	5

Testons l'algorithme pour $n = 5$:

Juste après l'exécution de la ligne 7, on a :

i	1	2	3	4	5
s	1	3	6	10	15

Affichage final : 15

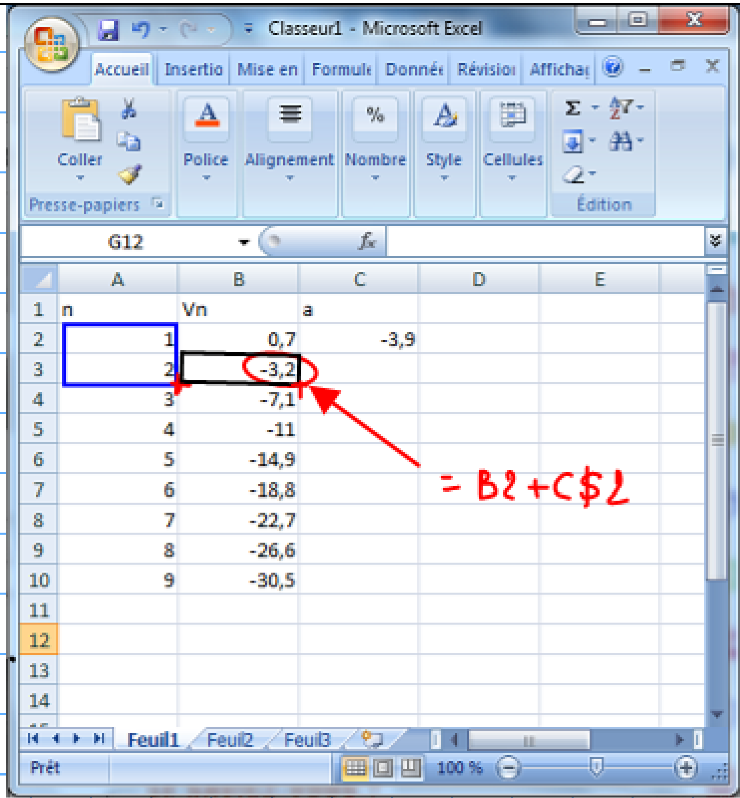
$$1+2+3+4+5$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+2}_{s}+3}_{s}+4}_{s}+5}$$

21 ALGO Compléter l'algorithme suivant et le mettre en œuvre sur tableur pour obtenir la liste des termes de rangs 1 à 9 de la suite arithmétique (v_n), de terme initial $v_1 = 0{,}7$ et de raison $a = -3{,}9$.

- Saisir les valeurs de v_1 et de a.
- Pour n allant de 1 à 8 :
  - v_{n+1} prend la valeur $v_n + a$;
  - afficher v_{n+1}.

Fin Pour.



	A	B	C	D	E
1	n	Vn	a		
2	1	0,7	-3,9		
3	2	-3,2			
4	3	-7,1			
5	4	-11			
6	5	-14,9			
7	6	-18,8			
8	7	-22,7			
9	8	-26,6			
10	9	-30,5			
11					
12					
13					
14					

$n = 1$ $\quad V_2 \leftarrow V_1 + a$ $\quad$ afficher V_2

$n = 2$ $\quad V_3 \leftarrow V_2 + a$ $\quad$ afficher V_3

⋮

$n = 8$ $\quad V_9 \leftarrow V_8 + a$ $\quad$ afficher V_9

- saisir dans V_2 : 0,7
- saisir dans C2 : -3,9

On verrouille la ligne de la cellule C2

- Formule à saisir dans B3 : = B2+C$2

Etirer B3 vers le bas :

on obtient par exemple B6 = B5 + C$2

III Suites géométriques

1) Définition

Une suite est **géométrique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant **en multipliant toujours par la même quantité** q appelée **raison** de la suite.

Cette définition illustre la **forme récurrente** d'une suite **géométrique**.

2) Forme récurrente

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q :

$$U_n \xrightarrow{\times q} U_{n+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_{n+1} = U_n \times q}$

__Exemple 1__ : Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $U_0 = 5$.

Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

__Solution :__

$$\underset{5}{U_0} \xrightarrow{\times 1{,}2} U_1 \xrightarrow{\times 1{,}2} U_2 \xrightarrow{\times 1{,}2} U_3$$

$U_1 = U_0 \times 1{,}2 = 5 \times 1{,}2 = 6$

$U_2 = U_1 \times 1{,}2 = 6 \times 1{,}2 = 7{,}2$

$U_3 = U_2 \times 1{,}2 = 7{,}2 \times 1{,}2 = 8{,}64$

__Exemple 2__ : Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ telle que $U_7 = 9{,}1$.

Calculer U_6.

$$U_6 \xrightarrow{\times 0{,}8} \underset{9{,}1}{U_7}$$

$$U_6 = \frac{U_7}{0{,}8} = \frac{9{,}1}{0{,}8} = 11{,}375$$

Exemple 3 : Soit (U_n) la suite géométrique telle que $U_{12} = 15,7$ et $U_{13} = 18,84$.
Calculer la raison q.

Solution :

$$U_{12} \xrightarrow{\times q} U_{13}$$

15,7 18,84

$$U_{12} \times q = U_{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{U_{12}} \times q}{\cancel{U_{12}}} = \frac{U_{13}}{U_{12}}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{U_{13}}{U_{12}} = \frac{18,84}{15,7} = 1,2$$

3. Méthode pour démontrer qu'une suite est géométrique :

Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit d'établir que la quantité $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constante, pour tout entier naturel n.

Le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ correspond alors à la raison de la suite

Exemple 1 : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5\,U_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Calculer U_4.

Solution : a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = 5 \times U_n$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \times \cancel{U_n}}{\cancel{U_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 5$$: le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constant, égal à 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (U_n) est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$

b) Calculons U_4

$$\underset{2}{U_0} \xrightarrow{\times 5} U_1 \xrightarrow{\times 5} U_2 \xrightarrow{\times 5} U_3 \xrightarrow{\times 5} U_4$$

$U_1 = U_0 \times 5 = 2 \times 5 = 10$

$U_2 = U_1 \times 5 = 10 \times 5 = 50$

$U_3 = U_2 \times 5 = 50 \times 5 = 250$

$U_4 = U_3 \times 5 = 250 \times 5 = 1250$

Exemple 2 : Les nombres $3 ; 9 ; 27 ; 80 ; 240$ sont-ils les termes successifs d'une suite géométrique ?

Solution : Posons $U_1 = 3$ $U_2 = 9$ $U_3 = 27$ $U_4 = 80$ $U_5 = 240$

D'une part $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \dfrac{U_5}{U_4} = 3$ D'autre part $\dfrac{U_4}{U_3} \approx 2{,}96$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ n'est pas constant donc $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 ; U_5$ ne sont pas les termes successifs d'une suite géométrique.

4) Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $U_0 > 0$:
- si $q > 1$ alors (U_n) est croissante
- si $0 < q < 1$ alors (U_n) est décroissante
- si $q < 0$ alors (U_n) est non monotone

Preuve : (U_n) est une suite géométrique de raison q

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = U_n \times q$

$\Leftrightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$

- si $q > 1$ alors $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > q \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$

  (U_n) est croissante.

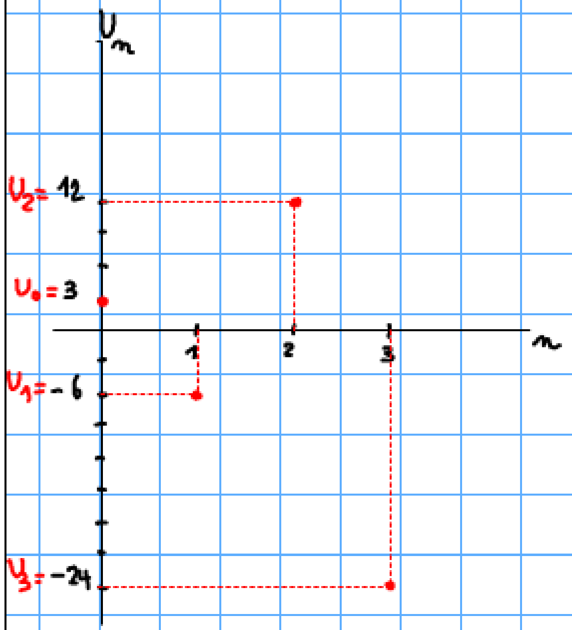
- si $0 < q < 1$ alors $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$

  (U_n) est décroissante

- si $q<0$, la suite est de signe alterné.

Prenons une situation exemple : Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison $q = -2$.

$$\underset{3}{U_0} \xrightarrow{\times(-2)} \underset{-6}{U_1} \xrightarrow{\times(-2)} \underset{12}{U_2} \xrightarrow{\times(-2)} \underset{-24}{U_3}$$



Le nuage de points ne monte pas ou ne descend pas, la suite (U_n) est non monotone.

Application : Donner le sens de variation des suites géométriques de premier terme $U_0 > 0$ et de raison q dans les cas suivants

a) $q = 1{,}7$. $q > 1$ donc la suite est croissante

b) $q = 0{,}8$ $0 < q < 1$ donc la suite est décroissante

c) $q = 1$ la suite est constante

d) $q = -0{,}7$ $q < 0$ donc la suite est non monotone

5) Formes explicites d'une suite géométrique de raison q

On a le schéma suivant

$$U_0 \xrightarrow{\times q} U_1 \xrightarrow{\times q} U_2 \xrightarrow{\times q} U_3 \; \dots \xrightarrow{\times q} U_n$$

$U_0 \to U_2$: $\times q \times q$; $\times q^2$

$U_0 \to U_3$: $\times q \times q \times q$; $\times q^3$

$U_1 = U_0 \times q$

$U_2 = U_1 \times q = U_0 \times q \times q = U_0 \times q^2$

$U_3 = U_2 \times q = U_0 \times q^2 \times q = U_0 \times q^3$

De U_0 à U_n on dénombre n flèches.

on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n = U_0 \times q^n}$ (1)

. Si le premier terme est U_1, on enlève 1 flèche, il en reste $n-1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n = U_1 \times q^{n-1}}$ (2)

. Si le premier terme est U_p, on enlève p flèches, il en reste $n-p$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_n = U_p \times q^{n-p}}$ (3)

Exemples : a) Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $U_0 = 7$.
Donner la forme explicite de la suite. Calculer U_9

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = 7 \times 0,9^n$ forme explicite

Pour $n = 9$ on a : $U_9 = 7 \times 0,9^9 \simeq 2,71$

b) Soit (V_n) la suite géométrique de raison $q = 1,3$ et de premier terme $V_1 = 3,7$
Exprimer V_n en fonction de n. Calculer V_{12}

Solution : Exprimer V_n en fonction de n consiste à donner la forme explicite de la suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

$V_n = 3{,}7 \times 1{,}3^{n-1}$: Forme explicite

Pour $n = 12$: $V_{12} = 3{,}7 \times 1{,}3^{11} \simeq 66{,}31$

c) Soit (W_n) la suite géométrique de raison $q = 1{,}7$ telle que $W_5 = 2{,}8$

Calculer W_{28}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$ $W_n = W_p \times q^{n-p}$

Pour $n = 28$ et $p = 5$: $W_{28} = W_5 \times q^{23}$

$W_{28} = 2{,}8 \times 1{,}7^{23} \simeq 559\,091{,}93$

Méthode : Exposant réel

Exemple : Soit (W_n) la suite géométrique telle que $W_5 = 2{,}8$ et $W_{28} = 559\,091{,}93$
Déterminer la raison q.

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$ on a :

$$W_n = W_p \times q^{n-p}$$

Pour $n = 28$ et $p = 5$ $\quad W_{28} = W_5 \times q^{23}$

$$\Leftrightarrow \frac{W_{28}}{W_5} = \frac{\cancel{W_5} \times q^{23}}{\cancel{W_5}}$$

$$\Leftrightarrow q^{23} = \frac{W_{28}}{W_5}$$

$$\Leftrightarrow q = \left(\frac{W_{28}}{W_5}\right)^{\frac{1}{23}} = 1{,}7$$

Justification :

- $(q^n)^k = q^{n \times k}$
- $(q^{23})^{\frac{1}{23}} = q^{23 \times \frac{1}{23}} = q^1 = q$

$$q^{23} = \frac{W_{28}}{W_5}$$

$$\Leftrightarrow (q^{23})^{\frac{1}{23}} = \left(\frac{W_{28}}{W_5}\right)^{\frac{1}{23}}$$

$$\Leftrightarrow q = \left(\frac{W_{28}}{W_5}\right)^{\frac{1}{23}}$$

Exercices de révisions

1) (U_n) est une suite géométrique de raison q=2,1. Donner la forme récurrente de la suite.

2) (U_n) est une suite géométrique telle que U_o=3 et q=1,2. Calculer U_6

3) (V_n) est une suite géométrique de raison q= 0,8 telle que V_7=8,4 . Calculer V_8

4) (V_n) est une suite géométrique de raison q=1,6 telle que V_{15}=3,4. Calculer V_{14}

5) (W_n) est une suite géométrique telle que W_{19}=4,6 et W_{18}=3,7. Calculer la raison.

6) (T_n) est une suite géométrique telle que T_{12} = 34 et q=1,1. Calculer T_{28}.

7) (R_n) est une suite géométrique telle que R_1=8,12 et q=0,76. Calculer R_{11}.

8) (C_n) est une suite géométrique telle que C_o=6,05 et q=1,02. Calculer C_{28}.

9) (H_n) est une suite géométrique telle que H_6 = 4,32 et H_4 = 2,27. Calculer la raison.

10) (U_n) est une suite géométrique telle que U_{12}= 15 et U_5= 8,78. Calculer la raison.

Exercices de révisions

Solution :

1) (U_n) est une suite géométrique de raison q=2,1. Donner la forme récurrente de la suite.

2) (U_n) est une suite géométrique telle que $U_0=3$ et q=1,2. Calculer U_6

3) (V_n) est une suite géométrique de raison q= 0,8 telle que $V_7=8,4$. Calculer V_8

4) (V_n) est une suite géométrique de raison q=1,6 telle que $V_{15}=3,4$. Calculer V_{14}

5) (W_n) est une suite géométrique telle que $W_{19}=4,6$ et $W_{18}=3,7$. Calculer la raison.

6) (T_n) est une suite géométrique telle que T_{12} = 34 et q=1,1. Calculer T_{28}.

7) (R_n) est une suite géométrique telle que $R_1=8,12$ et q=0,76. Calculer R_{11}.

8) (C_n) est une suite géométrique telle que $C_0=6,05$ et q=1,02. Calculer C_{28}.

9) (H_n) est une suite géométrique telle que H_6 = 4,32 et H_4 = 2,27. Calculer la raison.

10) (U_n) est une suite géométrique telle que U_{12}= 15 et U_5= 8,78. Calculer la raison.

1) $U_n \xrightarrow{\times 2,1} U_{n+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = U_n \times 2,1$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$

$\Leftrightarrow U_n = 3 \times 1,2^n$

Pour $n=6$ on a $U_6 = 3 \times 1,2^6 \approx 8,96$

3) $V_7 \xrightarrow{\times 0,8} V_8$

8,4

$V_8 = V_7 \times 0,8 = 8,4 \times 0,8 = 6,72$

4) $V_{14} \xrightarrow{\times 1,6} V_{15}$

3,4

$V_{14} = V_{15} \div 1,6 = 3,4 \div 1,6 = 2,125$

5) $W_{18} \xrightarrow{\times q} W_{19}$

$W_{18} \times q = W_{19} \Leftrightarrow q = \dfrac{W_{19}}{W_{18}} = \dfrac{4,6}{3,7} \approx 1,24$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$:

$T_n = T_p \times q^{n-p}$

Pour $n=28$ et $p=12$ on a : $T_{28} = T_{12} \times q^{16}$

$T_{28} = 3,4 \times 1,1^{16} \approx 156,23$

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $R_n = R_1 \times q^{n-1}$

Pour $n=11$: $R_{11} = R_1 \times q^{10}$

$= 8,12 \times 0,76^{10}$

$R_{11} \approx 0,52$

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $C_n = C_0 \times q^n$

$C_n = 6,05 \times 1,02^n$

pour $n=28$ $C_{28} = 6,05 \times 1,02^{28} \approx 10,53$

9)

$$\begin{tikzcd} H_4 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rr, bend right, "\times q^2"'] & H_5 \arrow[r, "\times q"] & H_6 \end{tikzcd}$$

$$H_6 = H_4 \times q^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{H_6}{H_4} = q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt{\frac{H_6}{H_4}} = \sqrt{\frac{4,32}{2,27}} \simeq 1,90$$

10) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Pour $n = 12$ et $p = 5$: $U_{12} = U_5 \times q^7$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{12}}{U_5} = q^7$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{8,78} = q^7$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt[7]{\frac{15}{8,78}} = \left(\frac{15}{8,78}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$q \simeq 1,08$$

```
7 ×√(15÷8.78)
                1.07951357
(15÷8.78)^(1÷7)
                1.07951357
```