78 ** On place un capital de 2 000 € au taux annuel de 3 % à intérêts composés.

On pose $C_0 = 2\,000$ et on note C_n le capital (en euros) acquis au bout de n années (où n est un entier naturel non nul).

1. Montrer que les capitaux (en euros) acquis au bout de 1 an et 2 ans sont respectivement $C_1 = 2\,060$ et $C_2 = 2\,121{,}80$.

2. Montrer que la suite (C_n) correspondante est géométrique ; donner son terme initial et sa raison.

3. Obtenir sur tableur une liste de termes de la suite (C_n) et déterminer :

a) le capital acquis au bout de 10 ans ;

b) au bout de combien d'années le capital acquis sera supérieur ou égal au double du capital initial.

1) a) 3% de 2000 $= \frac{3}{100} \times 2000 = 60$

$2000 + 60 = 2060$ $\qquad C_1 = 2060$

b) $\frac{3}{100} \times 2060 = 61,80$

$2060 + 61,80 = 2121,80$ $\qquad C_2 = 2121,80$

2) Augmenter de 3% revient à multiplier par

$c = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$

$$C_0 \overset{\times 1,03}{\xrightarrow{+3\%}} C_1 \overset{\times 1,03}{\xrightarrow{+3\%}} C_2 \quad \dots \quad C_n \overset{\times 1,03}{\xrightarrow{+3\%}} C_{n+1}$$

D'après le schéma précédent :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad C_{n+1} = C_n \times 1,03$

$$\Leftrightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\cancel{C_n} \times 1,03}{\cancel{C_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1,03$$

: le quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ est constant, égal à 1,03 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (C_n) est géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $C_0 = 2000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad C_n = C_0 \times q^n = 2000 \times 1,03^n$

Classeur1 - Microsoft Excel

B3 | =B2*1,03

= C$2 * 1,03 ^ A3

	A	B	C
1	n	Cn par récurrence	Cn de façon explicite
2	0	2000	2000
3	1	2060	2060
4	2	2121,8	2121,8
5	3	2185,454	2185,454
6	4	2251,01762	2251,01762
7	5	2318,548149	2318,548149
8	6	2388,104593	2388,104593
9	7	2459,747731	2459,747731
10	8	2533,540163	2533,540163
11	9	2609,546368	2609,546368
12	10	2687,832759	2687,832759

79 ** Sur la vitrine d'un magasin, on peut lire : « Liquidation définitive : chaque semaine, nous baissons les prix de la semaine précédente de 10 % ».

1. Un manteau était vendu 200 € avant la liquidation. Combien est-il vendu lors de la première semaine de liquidation ? lors de la deuxième semaine ?

2. On pose $s_0 = 200$ et on note s_n le prix du manteau lors de la n-ième semaine de liquidation.
Donner la nature de la suite (s_n) correspondante.

3. a) La liquidation dure huit semaines. Si le manteau est toujours en vente, quel est son prix lors de la huitième semaine ?

b) Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 120 €.
Déterminer la semaine au cours de laquelle elle effectuera son achat.

1) a) 10% de 200 $= \frac{10}{100} \times 200 = 20$

$200 - 20 = 180$ $\quad s_1 = 180$

b) 10% de 180 $= \frac{10}{100} \times 180 = 18$

$180 - 18 = 162$

2) Diminuer de 10% revient à multiplier par

$c = 1 + \left(\frac{-10}{100}\right) = 0{,}9$

$$s_0 \xrightarrow[\times 0{,}9]{-10\%} s_1 \xrightarrow[\times 0{,}9]{-10\%} s_2 \quad \dots \quad s_n \xrightarrow[\times 0{,}9]{-10\%} s_{n+1}$$

D'après le schéma précédent :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad s_{n+1} = s_n \times 0{,}9$

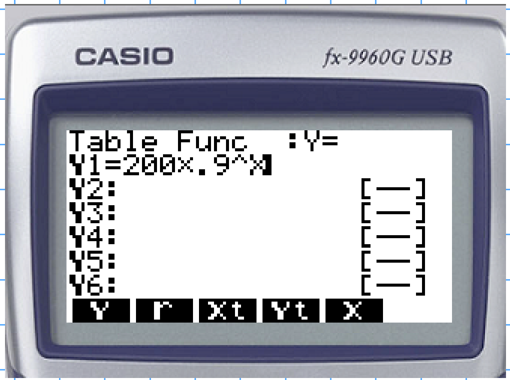
$$\Leftrightarrow \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\cancel{s_n} \times 0{,}9}{\cancel{s_n}}$$

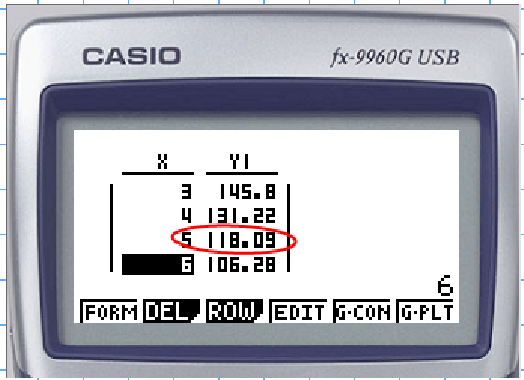
$$\Leftrightarrow \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0{,}9$$: Le quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ est constant, égal à 0,9 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (s_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $s_0 = 200$.

3 a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad s_n = s_0 \times q^n = 200 \times 0{,}9^n$

Pour $n=8$ on a : $s_8 = 200 \times 0{,}9^8 \simeq 86{,}09$

b) A l'aide de la calculatrice en mode TABL on obtient rapidement les termes successifs de (s_n)





Le prix devient inférieur à 120 € dès la 5e semaine de soldes.