CHAPITRE 2

Fonctions affines. Problèmes du 1er degré

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Ordre et comparaison

Comparer deux nombres a et b, c'est chercher à savoir lequel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

Dire que **$a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.**

1 $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{2}{7}$. Calculez la différence $a - b$, puis comparez a et b.

2 u et v sont deux nombres tels que $u > v$. Complétez avec le symbole > ou < :

a) $u - v \ldots 0$ **b)** $v - u \ldots 0$

c) $2u - 2v \ldots 0$ **d)** $3v - 3u \ldots 0$

Représenter une fonction affine

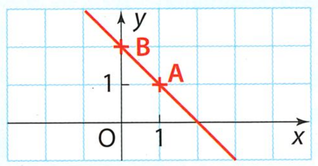
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Exemple : f est définie par $f(x) = -0{,}5x + 1$.

On choisit les abscisses de deux points A et B, puis on calcule leur ordonnée $y = f(x)$.

	A	B
x	0	2
y	1	0

La représentation graphique de f est la droite (AB) avec A(0 ; 1) et B(2 ; 0).



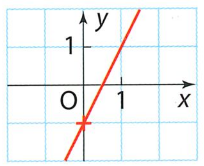
3 Représentez graphiquement les fonctions affines suivantes.

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $g(x) = -x + 5$

c) $h(x) = \frac{x}{2} + 1$ **d)** $k(x) = -2x + \frac{1}{2}$

4 Vrai ou faux ?

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ est représentée par la droite ci-dessous.



Taux de variation

Le taux de variation d'une fonction f entre x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$) est le nombre $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Exemple : si $f(2) = 6$ et $f(5) = -3$, le taux de variation entre 2 et 5 est le nombre :

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{(-3) - 6}{5 - 2} = -3.$$

5 f est la fonction qui, à un réel x, fait correspondre son double augmenté de 1.
Calculez le taux de variation de f entre 2 et 3, entre 0 et 5, puis entre −2 et −1.

6 Reprenez l'exercice précédent en remplaçant dans l'énoncé le mot « double » par le mot « carré ».

Voir les corrigés p. 274

Activité 1 DÉTERMINER UNE FONCTION AFFINE

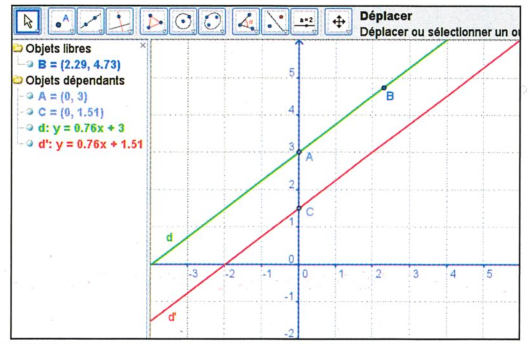
1 f est une fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$.
Le but est de déterminer f. Pour cela, on pose $f(x) = ax + b$. Il s'agit donc de trouver a et b.
On rappelle que pour la fonction affine f, quels que soient les nombres u et v, $u \neq v$, $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.
Calculez a, puis déduisez la valeur de b en utilisant l'égalité $f(1) = 2$. Concluez.

2 **Application.** Pour mesurer les températures, on dispose de deux unités : le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F). La fonction f qui à x degrés Celsius associe sa valeur en degrés Fahrenheit est une fonction affine. La température de 0 °C correspond à 32 °F ; celle de 100 °C à 212 °F.
Déterminez la fonction f. Représentez cette fonction affine.

Activité 2 REPRÉSENTATIONS DE FONCTIONS AFFINES TICE

1 Vous avez vu en classe de 3e que la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

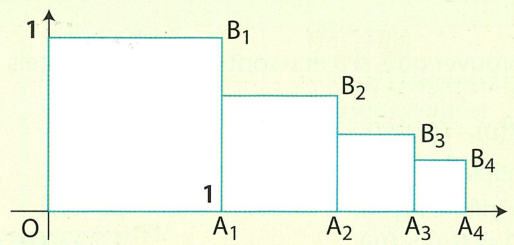
outil 1 Avec le logiciel GeoGebra, construisez une droite (AB) (icône) en plaçant A sur l'axe des ordonnées, B est un point quelconque d'abscisse non nulle.
L'équation de la droite (AB), de la forme $y = ax + b$, s'affiche dans la fenêtre Algèbre.



Aide
Si l'équation n'est pas de cette forme, faites un clic droit sur l'équation et sélectionnez la forme $y = ax + b$.
De plus, le logiciel attribue à la droite l'étiquette « a ». Vous pouvez renommer la droite en cliquant dessus avec le bouton droit de la souris.

2 **a)** Placez un point C sur l'axe des ordonnées et construisez la droite d' parallèle à (AB) passant par C (icône).
b) Déplacez le point C (icône). Dans la fenêtre Algèbre, après avoir fait le choix de la forme de l'équation et du nom de la droite (voir *Aide*), observez simultanément la droite d' et son équation. Que remarquez-vous ?
c) Déplacez maintenant le point B. Observez les deux équations. Que remarquez-vous ?
d) Dans l'équation $y = ax + b$, quel est, des deux nombres a et b, celui qui indique la direction ? Quel est celui qui indique l'intersection avec l'axe des ordonnées ?
e) Le point A étant fixé, comment placer le point B (d'abscisse strictement positive) afin que le nombre a soit négatif ? nul ? positif ? Traduisez vos constatations en termes de croissance d'une fonction affine.

Problème ouvert Refaites cet exercice après le chapitre ... Est-il plus facile ?



On a construit une « suite » de carrés de la manière suivante :
le premier carré est de côté 1, puis chaque carré a pour côté les $\frac{2}{3}$ du côté du précédent.
Existe-t-il un carré tel que l'abscisse de A_n soit supérieure à 3 ?

Fonctions affines

Définition 1 Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres connus.

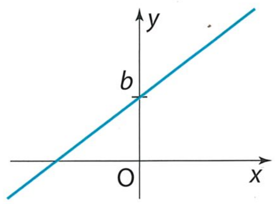
Cas particuliers

Si $b = 0$, f est dite **linéaire**. Ainsi $f(x) = 3x$, pour tout nombre x.
Si $a = 0$, f est dite **constante**. Ainsi $f(x) = 5$, pour tout nombre x.

Représentation graphique

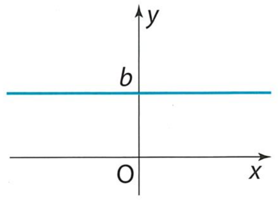
Théorème 1 La représentation graphique d'une fonction affine f, $f(x) = ax + b$, est **une droite**. Cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Le fait que f est représentée par une droite a été justifié en classe de Troisième. Et il a été vu dans le cours du chapitre 1 (p. 25) que, par définition, cette droite a pour équation $y = f(x)$, soit $y = ax + b$.



Remarque. Si $a = 0$, la droite a pour équation $y = b$; elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Vocabulaire. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de la droite. Le nombre b est **l'ordonnée à l'origine**, car la droite passe par le point B(0 ; b).



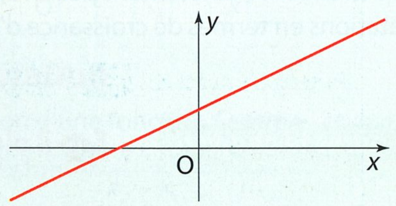
Théorème 2 f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Alors, pour tous nombres u et v distincts, $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.

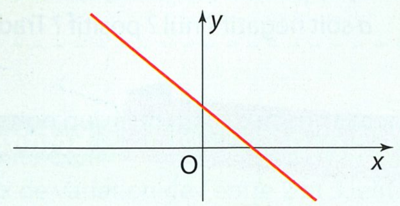
Démonstration. $f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au - av = a(u - v)$, donc $f(u) - f(v) = a(u - v)$.
Puisque $u - v \neq 0$, la division par $u - v$ conduit à $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.

Théorème 3 Sens de variation
f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Compléments numériques



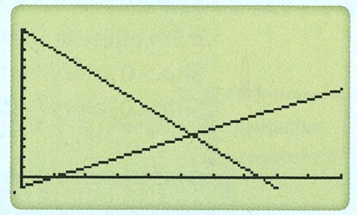


Démonstration. • **Cas $a > 0$.** Il s'agit de prouver que, si u et v sont deux nombres tels que $u < v$, alors $f(u) < f(v)$. Autrement dit que :
$$f(u) - f(v) < 0.$$
Or, $f(u) - f(v) = a(u - v)$ et $a > 0$. De plus, $u < v$, donc $u - v < 0$ d'où $f(u) - f(v) < 0$.
• **Cas $a < 0$.** La démonstration se fait de la même façon.
Avec $a < 0$, $a(u - v) > 0$, donc $f(u) - f(v) > 0$ et $f(u) > f(v)$.

OBJECTIF 1 Résoudre des inéquations du premier degré

EXERCICE RÉSOLU A

À l'aide d'une calculatrice, on a représenté graphiquement les fonctions affines f et g définies par :
$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = -2x + 15.$$



1. Résolvez algébriquement l'inéquation $-2x + 15 < x - 1$.
2. Contrôlez graphiquement le résultat.

Méthode

1. Algébriquement. On se ramène à une inéquation du type $ax < b$.

Attention : la division par -3, **nombre négatif**, change le sens de l'inégalité.

• On conclut.

2. Graphiquement, cela revient à voir sur quel intervalle la représentation de f est au-dessus de celle de g.

Solution

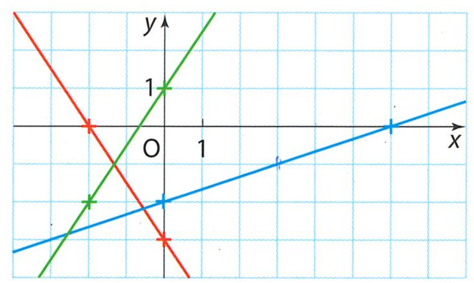
1. L'inéquation $-2x + 15 < x - 1$ équivaut à :
$$-2x - x < -15 - 1$$
$$-3x < -16$$
$$x > \frac{-16}{-3}.$$
Donc l'inéquation équivaut à $x > \dfrac{16}{3}$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]\dfrac{16}{3} ; +\infty\right[$.

2. L'abscisse du point d'intersection des deux droites est entre 5 et 6, proche de 5, donc de $\dfrac{16}{3}$. Et sur cet intervalle, la droite représentant f est au-dessus de celle représentant g.

Remarque
Le graphique ne permet pas de bien préciser l'ensemble des solutions. Mais il peut permettre de déceler une erreur de calcul.

Mise en pratique

1 Les droites ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions affines f, g et h définies par $f(x) = -\dfrac{3}{2}x - 3$; $g(x) = \dfrac{1}{3}x - 2$ et $h(x) = \dfrac{3}{2}x + 1$.



1. Associez à chaque droite la fonction affine qu'elle représente.

Aide Pensez à l'ordonnée à l'origine, au sens de variation.

2. Résolvez algébriquement, puis graphiquement les inéquations suivantes :

a) $-\dfrac{3}{2}x - 3 > -1$ **b)** $\dfrac{1}{3}x - 2 \leqslant 0$
c) $\dfrac{3}{2}x + 1 \geqslant -1$

2 Résolvez algébriquement et graphiquement les inéquations :
a) $-2x + \dfrac{1}{5} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{3}{4}x + 1 > 3$

Pour les exercices 3 à 5
Résolvez de deux manières, par le calcul et graphiquement (à l'aide de votre calculatrice), l'inéquation proposée.

3 $\dfrac{15}{2}x - \dfrac{1}{2} \leqslant 3x + 1.$

4 $-2x + \dfrac{5}{2} > \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}.$

5 $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{5x}{6} - \dfrac{1}{3}.$

OBJECTIF 2 Déterminer le signe de $ax + b$ suivant les valeurs de x

- Étudier le signe de $(ax + b)$ suivant les valeurs de x, c'est trouver l'ensemble des nombres x tels que $(ax + b)$ est strictement positif, ou strictement négatif, ou nul.
Cela revient donc à résoudre : $ax + b = 0$; $ax + b > 0$; $ax + b < 0$.
- On utilise le **théorème 3 du cours** : f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE RÉSOLU B Par deux méthodes

Étudiez le signe de l'expression $3x + 4$ selon les valeurs de x.

Méthode

❶ On résout l'équation $3x + 4 = 0$.

- On résout l'inéquation $3x + 4 < 0$. On trouve ainsi l'ensemble des x tels que $3x + 4 < 0$.
- On représente les solutions sur une droite graduée.
- On en déduit l'ensemble des nombres x tels que $3x + 4 > 0$.
- On rassemble ces résultats dans un tableau appelé **tableau de signes**.

❷ On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = 3x + 4$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire : $3x + 4 = 0$.
- On dresse le tableau de variation de f.
Dans ce tableau, on indique pour x la valeur $-\frac{4}{3}$ qui annule $3x + 4$ et pour $f(x)$ la valeur $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$.
- On en déduit le même tableau de signes.

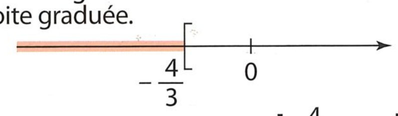
Solution

❶ **Par la résolution de $ax + b < 0$**

$3x + 4 = 0$ a pour solution $x = -\frac{4}{3}$.

$3x + 4 < 0$ équivaut à $3x < -4$, donc à $x < -\frac{4}{3}$ (car $3 > 0$).

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{4}{3}\right[$, représenté en rouge sur la droite graduée.



Il en résulte que l'intervalle $\left]-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ est l'ensemble des x tels que $3x + 4 > 0$.

On en déduit le signe de $3x + 4$ suivant x :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

❷ **Par le tableau de variation**

- La fonction affine définie par $f(x) = 3x + 4$ est strictement croissante car $a > 0$ (ici $a = 3$).
- $3x + 4 = 0$ a pour solution $x = -\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
f		↗	0	↗	

Mise en pratique

Pour les exercices 6 à 10
Étudiez le signe de l'expression A(x) selon valeurs de x.

6 a) $A(x) = 3x - 1$ b) $A(x) = -2x - 5$

7 a) $A(x) = -2x + \frac{1}{3}$ b) $A(x) = 1 + \frac{x}{3}$

8 a) $A(x) = \frac{x}{3}$ b) $A(x) = -\frac{5x}{2}$

9 a) $A(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ b) $A(x) = \frac{x + 4}{3}$

10 a) $A(x) = -\frac{12}{5}x + \frac{8}{25}$ b) $A(x) = \frac{12}{25}x + \frac{8}{5}$

OBJECTIF 3 Résoudre des inéquations produits

- Le produit de deux nombres **de même signe** est positif.
- Le produit de deux nombres **de signes contraires** est négatif.

EXERCICE RÉSOLU C Résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leqslant 0$

Animation

Résolvez l'inéquation $(x + 3)(-x + 5) \leqslant 0$.

Méthode

- On étudie le signe de $(x + 3)$, soit en résolvant l'inéquation $x + 3 < 0$, soit en dressant le tableau de variation de la fonction f :
$f(x) = x + 3$.
→ *exercice résolu B*
- On étudie le signe de $(-x + 5)$.
- On rassemble les résultats dans un seul tableau en utilisant la règle du signe d'un produit.

Par exemple, pour tout x de $]-\infty\,;-3[$, $(x + 3)$ et $(-x + 5)$ sont de signes contraires, d'où :

x	$-\infty$		-3
$x + 3$		$-$	0
$-x + 5$		$+$	
$(x + 3)(-x + 5)$		$-$	0

Leur produit est donc négatif.

- On conclut en prenant garde aux sens des crochets : -3 et 5 sont solutions, donc les crochets « englobent » -3 et 5.

Solution

L'étude du signe de $(x + 3)$ conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$	

L'étude du signe de $(-x + 5)$ conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$-x + 5$		$+$	0	$-$	

D'où le tableau de signes de $(x + 3)(-x + 5)$:

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x + 3)(-x + 5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x + 3)(-x + 5) \leqslant 0$ est la réunion des intervalles $]-\infty\,;-3]$ et $[5\,;+\infty[$:

$\mathcal{S} =]-\infty\,;-3] \cup [5\,;+\infty[$.

Remarque
En fait, on a étudié le signe de $(x + 3)(-x + 5)$ selon les valeurs de x. On a aussi résolu $(x + 3)(-x + 5) > 0$.

Mise en pratique

Pour les exercices 11 à 13
Étudiez l'ensemble des solutions à l'aide d'intervalles.

11 Résolvez l'inéquation $(2x - 1)(-x + 4) \leqslant 0$.

12 Résolvez l'inéquation $(3x - 2)(-5x + 1) \geqslant 0$.

13 Résolvez l'inéquation $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)(2x + 1) > 0$.

14 **1.** Utilisez l'identité remarquable :
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
pour factoriser l'expression $(x - 3)^2 - 25$.
Déterminez le signe de :
$(x - 3)^2 - 25$
suivant les valeurs de x.
2. Déduisez-en la résolution de l'inéquation :
$(x - 3)^2 - 25 < 0$.

EXERCICES

Pour se tester

Exercices interactifs

15 Questions sur le cours

Complétez avec un ou plusieurs mots.

a) a et b sont fixés. La fonction qui à chaque réel x associe le réel $ax + b$ est une fonction …

b) a est fixé. La fonction qui à chaque réel x associe le réel ax est une fonction …

c) La représentation graphique d'une fonction affine est …

d) La fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est :

- strictement croissante si a …
- strictement décroissante si a …
- si $a = 0$, la fonction est …

e) La fonction affine f est définie par $f(x) = -5x + 4$.
Le rapport $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ $(u \neq v)$ est toujours …

16 Vrai ou faux

Les affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

a) La représentation graphique d'une fonction affine peut être parallèle à l'un des axes du repère.

b) La fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 3$ est strictement croissante.

c) La droite représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 3$ passe par l'origine.

d) Les points A(2 ; 3) ; B(–2 ; –5) et C$\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ appartiennent à la droite représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 1$.

e) f est une fonction affine strictement croissante et $f(5) = -1$. Alors pour tout réel $x > 5$, $f(x) \geqslant 0$.

17 QCM Une seule réponse exacte

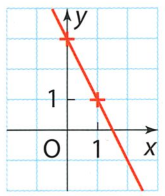
Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. L'image du nombre $\frac{1}{3}$ par la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 3$ est : **a)** 0 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $-\frac{7}{3}$

2. L'antécédent du réel 5 par la fonction affine définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ est : **a)** 8 **b)** –10 **c)** –8

3. f est une fonction affine et $f(4) - f(2) = 6$.
La droite représentative de f a pour coefficient directeur : **a)** 6 **b)** 3 **c)** –1

4. La droite ci-contre est la représentation graphique de la fonction affine définie par :



a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = 3x + 2$
c) $f(x) = -2x + 3$

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x - 1)(x + 2) < 0$ est :
a) $]-1\ ;2[$ **b)** $]-2\ ;1[$ **c)** $[-2\ ;1]$

18 QCM Plusieurs réponses exactes

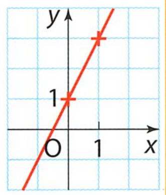
Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. f est la fonction définie par $f(x) = ax + b$.
$f(2) = 5$ et $f(3) = 4$. Alors :
a) $a = -1$ **b)** f est croissante **c)** $b = 7$

2. f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
$f(-1) = f(3)$ et $f(5) = 2$. Alors :
a) $b = 2$ **b)** $a = 0$ **c)** f est strictement croissante

3. La fonction affine f est croissante et $f(3) = 0$. Alors :
a) $f(2) \leqslant 0$ **b)** $f(4) \times f(5) < 0$ **c)** $f(0) \times f(6) < 0$

4. La droite ci-contre est la représentation de la fonction définie par :



a) $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$ **b)** $f(x) = x + 1$
c) $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

5. La fonction f est linéaire et $f(3) = 5$. Alors :
a) $f(5) = \frac{25}{3}$ **b)** $f(5) = 3$ **c)** $f(x) = 0{,}6x$

6. La fonction f est affine. $f(0) = 3$ et $f(4) = 5$. Alors :
a) $f(3) = 4$ **b)** $f(3) = 4{,}5$ **c)** $f(3) = 4{,}2$

Voir les corrigés p. 276

Apprendre à chercher

19 Affine ou pas ?

f est une fonction telle que :

$$f(0) = 2, \quad f(3) = 4 \quad \text{et} \quad f(5) = \frac{16}{3}.$$

Objectif Préciser si la fonction f peut être une fonction affine.

1. Pour se faire une idée et pour guider le raisonnement, on peut placer les points dans un repère.
En effet, si f est affine, alors sa représentation graphique est une droite (théorème 1 p. 54). Il en résulte que :

- si A, B et C ne sont pas alignés, f ne peut pas être affine (car si elle l'était, les points seraient alignés. Voir *Vocabulaire de la logique*, p. 258) ;
- si A, B et C sont alignés, alors f peut être affine.

a) Dans un repère (O ; I, J), placez les points A, B, C de la représentation graphique de la fonction f, d'abscisses respectives 0 ; 3 et 5.

b) Tracez la droite (AB). Semble-t-elle passer par C ?

2. 1re méthode

a) Cette approche graphique ne permet pas de démontrer le résultat. Mais, par le calcul, nous pouvons avoir la même démarche.

La droite (AB) est la représentation d'une fonction affine g. Déterminez l'expression de g.

b) L'appartenance (ou non) de C à la droite (AB) peut être affirmée par le calcul.

Calculez $g(5)$. Concluez.

3. 2e méthode

Si une fonction est affine, alors son taux de variation est constant. Donc :

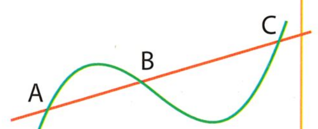
- si les taux de variation ne sont pas égaux, f ne peut pas être affine ;
- si les taux de variation sont égaux, f peut être affine.

a) Calculez le taux de variation de f de 0 à 3 et celui de 3 à 5.

b) Concluez.

Remarque

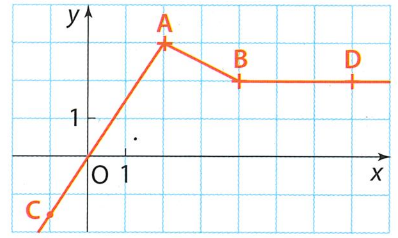
L'alignement (une fois démontré !) des trois points permet de répondre : « oui, f peut être affine » mais certainement pas « f est affine ». En effet, trois points alignés peuvent être sur des courbes représentatives de fonctions non affines.



Mise en pratique : exercices 33 à 38 et 41

20 Une ligne brisée

La courbe $\mathscr{C}$ donnée est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Objectif Donner les expressions algébriques qui permettent de calculer $f(x)$ connaissant x.

1. Avec les conventions habituelles, il est entendu que, aux extrémités, la courbe continue comme le suggère le dessin.
La courbe se compose de trois parties, de gauche à droite :

- la demi-droite]AC) ;
- le segment de droite [AB] ;
- la demi-droite]BD).

La courbe $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ; f(x))$.
Le point A ayant pour abscisse 2, les abscisses des points de la demi-droite]AC) sont tous les nombres de l'intervalle $]-\infty\ ; 2[$.

Pour chacune des deux autres parties, précisez à quel intervalle appartient x.

2. Les droites (AC), (AB) et (BD) sont les représentations graphiques de trois fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ que l'on notera, respectivement, g, h et k.

a) Déterminez chacune de ses trois fonctions.

b) Exprimez $f(x)$ selon les valeurs de x, en associant à chaque intervalle de la question **1.**, l'expression de la fonction affine correspondante. Rassemblez vos résultats sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x < 2, & f(x) = \dots \\ \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4, & f(x) = \dots \\ \text{si } x > 4, & f(x) = \dots \end{cases}$$

La fonction f est dite **affine par intervalles**.

Mise en pratique : exercices 60 à 64 et 73

EXERCICES

Utiliser GeoGebra

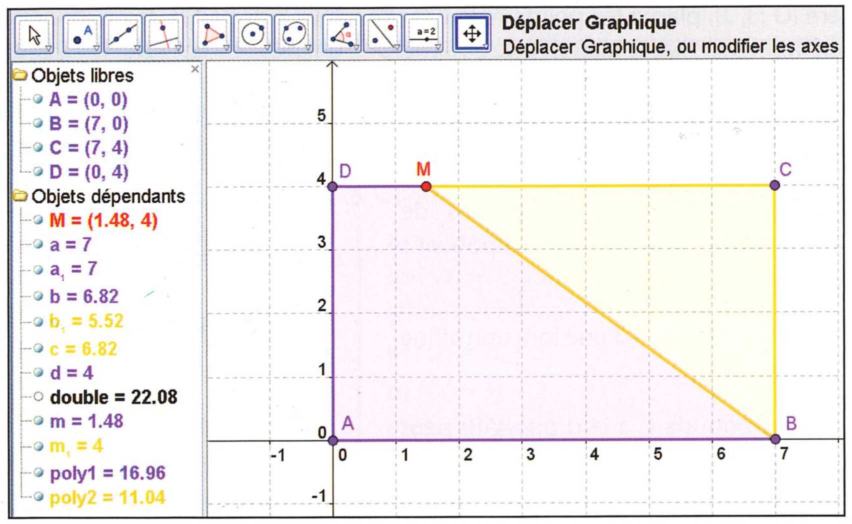
→ Pour construire une figure géométrique
→ Pour chercher la solution d'une équation

21 **Résoudre un problème d'aires**

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Construire une figure géométrique	■ Exprimer des fonctions (linéaire et affine)
■ Calculer et afficher des grandeurs numériques	■ Mettre un problème en équation
■ Émettre une conjecture	■ Résoudre une équation

ABCD est un rectangle tel que AB = 7 et AD = 4.
M est un point variable sur le segment [CD].
Le but du problème est de déterminer pour quelle(s) position(s) du point M l'aire du trapèze ABMD est égale au double de l'aire du triangle BCM.



1. **Conjecturer avec GeoGebra**

a) Saisissez les points A(0,0), B(7,0), C(7,4) et D(0,4), puis construisez le segment [CD].
b) Construisez le point M sur le segment [CD].
c) Construisez le trapèze ABMD et le triangle BCM.
Leurs aires s'affichent dans la fenêtre Algèbre : respectivement « poly 1 » et « poly 2 ».
d) Pour faire afficher le double de l'aire du triangle, saisissez, par exemple :

double = 2* poly 2.

e) Déplacez le point M sur [CD] et observez les variations des nombres « poly 1 » et « double ».
Conjecturez la réponse au problème posé (en utilisant la distance DM).

2. **Démontrer**

On note x la longueur du segment [DM].
a) L'aire de ABMD est une fonction de x notée f.
Calculez $f(x)$.
b) L'aire de BCM est une fonction de x notée g.
Calculez $g(x)$.
c) Traduisez le problème par une équation.
d) Résolvez cette équation et déduisez-en la réponse au problème posé.

DROITE ET FONCTION AFFINE

Pour les exercices 22 à 25
Démontrez que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $ax + b$, puis tracez la courbe représentative de f.

22 $f(x) = \dfrac{2x+6}{3}$

23 **a)** $f(x) = \dfrac{x+5}{2} - x$ **b)** $f(x) = (x-1)^2 - x^2$

24 **a)** $f(x) = 2(x+1) - 3(x-2)$ **b)** $f(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$

25 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{x+5}{2}$ **b)** $f(x) = x^2 + (2+x)(3-x)$

Pour les exercices 26 et 27
Tracez les courbes représentatives des fonctions affines f et g sur un même graphique.

26 $f(2) = 2$ et $f(-1) = 4$; g est constante et $g(0) = f(0)$.

27 f est linéaire et $f(2) = 6$; $g(0) = 3$ et $g(1) \times f(1) = 0$.

Pour les exercices 28 à 32
Trouvez la fonction affine f.

28 $f(1) = 3$ et $f(4) = 9$.

29 **a)** $f(0) = 3$ et $f(1) = 0$.
b) $f(-4) = -1$ et $f(8) = 2$.

30 **a)** $f(5) = 1$ et $f(3) = -3$.
b) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$ et $f(-2) = -1$.

31 **a)** $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$.
b) $A\left(\dfrac{1}{2}\,;1\right)$; $B\left(\dfrac{1}{4}\,;3\right)$ sont des points de la représentation graphique de f.

32 $f(1\,000) = 2\,010$ et $f(100) = 210$.

Pour les exercices 33 à 37
Précisez si la fonction f proposée peut être affine.

33 • $f(0) = 5$ • $f(3) = 6$ • $f(6) = 7$

34 • $f(1{,}2) = 2{,}4$ • $f(-2) = -4$ • $f(3) = 6$

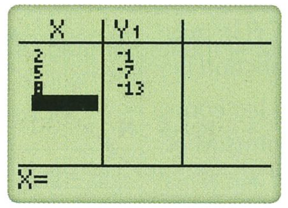
35 • $f(8) = 13$ • $f(13) = 21$ • $f(21) = 34$

36 • $f(2) = -1$ • $f(-1) = 2$ • $\dfrac{f(4) - f(1)}{3} = -1$

37

x	-2	0	5
$f(x)$	3,1	$-1{,}7$	$-5{,}2$

38 L'écran de la calculatrice de Valentine affiche :



1. La fonction étudiée peut-elle être affine ? Si oui, quelle est cette fonction ?
2. Quel nombre doit-elle alors entrer sous le curseur afin d'obtenir −57 dans la colonne Y_1 ?

39 **Simplifier un programme** ALGORITHMIQUE

On considère le programme de calcul suivant.

```
Choisir un nombre x.
Ajouter 5 à ce nombre.
Multiplier le résultat par x.
Ajouter 2.
Enlever le carré de x au résultat.
```

1. Appliquez ce programme de calcul à deux nombres de votre choix.
2. Quelle est la fonction qui à x associe le résultat donné par ce programme de calcul ? Est-ce une fonction affine ?
3. Écrivez un algorithme simple qui permet l'affichage de $f(x)$ selon la valeur de x.

40 **Des réciproques fausses** LOGIQUE

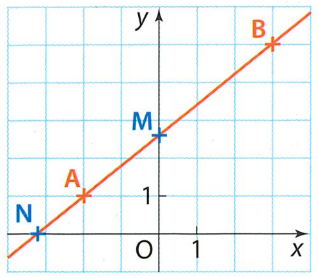
On sait que :
si ABC est un triangle isocèle en A, alors AB = AC. La réciproque de cette proposition est : si dans le triangle ABC, AB = AC, alors le triangle est isocèle en A.
Dans ce cas, la réciproque est vraie. Mais ce n'est pas toujours le cas : la réciproque d'une proposition vraie n'est pas toujours vraie.

Voir *Vocabulaire de la logique* → p. 258

1. Écrivez la réciproque de chacune des propositions suivantes.
a) Si f est une fonction linéaire, alors f est affine.
b) Si f est une fonction constante, alors f est affine.
2. Prouvez à l'aide d'un exemple que ces réciproques sont fausses.

41 **1.** Dans un repère (O ; I, J), placez les points A(3 ; 5), B(5 ; 8) et C(8 ; 13).
2. Déterminez la fonction affine f telle que $f(3) = 5$ et $f(5) = 8$. Quelle est sa représentation graphique ?
3. Le point C est-il un point de cette représentation

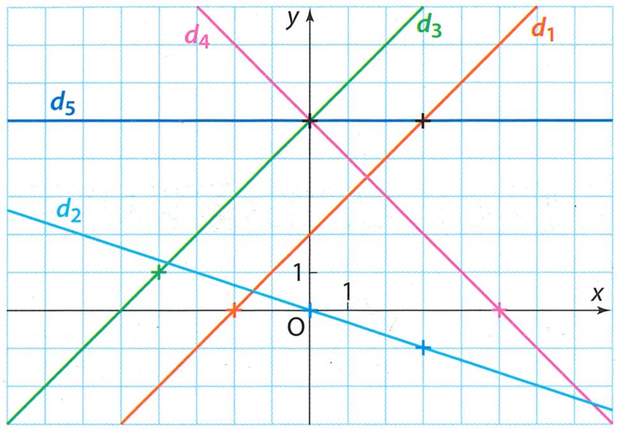
42 Les points A et B ont des coordonnées entières. La droite (AB) est la représentation graphique d'une fonction affine f.



1. Précisez $f(-2)$, $f(3)$, puis déterminez la fonction f.

2. Déduisez-en les coordonnées des points M et N.

43 Déterminez chacune des fonctions affines f_1, …, f_5 représentées par les droites d_1, …, d_5 ci-dessous.

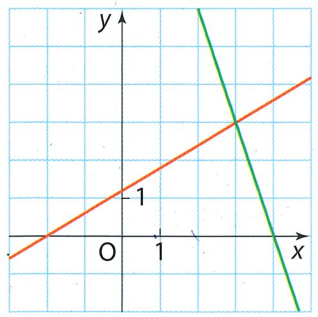


ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ

44 Les droites ci-contre sont les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par :

$f(x) = 0{,}6x + 1{,}2$

et $g(x) = -3x + 12$.



1. Après avoir associé chaque droite à sa fonction, donnez les solutions (éventuellement approchées) des équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

2. Résolvez les inéquations :

a) $0{,}6x + 1{,}2 > 0$;

b) $-3x + 12 \leqslant 0$;

c) $0{,}6x + 1{,}2 > -3x + 12$.

3. Interprétez graphiquement les résultats.

45 **1.** Représentez graphiquement les fonctions affines f et g définies par $f(x) = 0{,}2x + 1{,}8$ et $g(x) = -x$.

2. Résolvez les équations et inéquations :

a) $f(x) = 0$;

b) $f(x) = g(x)$;

c) $f(x) \geqslant g(x)$.

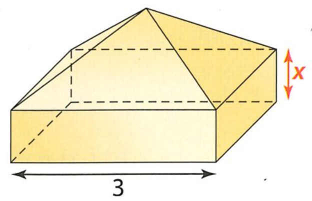
3. Interprétez graphiquement les résultats.

46 **1.** Représentez graphiquement la fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 8$.

2. Graphiquement, quel est l'ensemble des nombres x tels que $1 < 3x - 8 < 4$?

3. Résolvez par le calcul les inéquations $1 < 3x - 8$ et $3x - 8 < 4$. Représentez leurs solutions sur un axe gradué. Vérifiez vos affirmations de la question **2**.

47 Un solide est constitué d'une pyramide de 6 cm³ de volume et d'un parallélépipède rectangle, comme sur la figure ci-dessous.



Le parallélépipède a une base carrée de 3 cm de côté et une hauteur de x cm.

1. Le volume du solide dépend du nombre x. On note $f(x)$ ce volume. Exprimez $f(x)$.

2. Représentez la fonction f dans un repère orthogonal (choisir en abscisse, 1 cm pour représenter 1 cm, en ordonnée, 1 cm pour 10 cm³).

3. À l'aide du graphique, déterminez les valeurs de x pour lesquelles le volume du solide est compris entre 33 cm³ et 60 cm³.

SENS DE VARIATION ET SIGNE DE $ax + b$

Pour les exercices 48 à 50

Indiquez le sens de variation des fonctions affines données.

48 a) $f : x \mapsto 2x - 3$ b) $g : x \mapsto 2 - 3x$

c) $h : x \mapsto -3 + \dfrac{x}{2}$ d) $k : x \mapsto -\dfrac{1}{2}(3 - 5x)$

49 a) $f : x \mapsto -x + 3$ b) $g : x \mapsto x\sqrt{2} - 7$

c) $h : x \mapsto \dfrac{2 - x}{2}$ d) $k : x \mapsto -\dfrac{1}{2}(\pi - 3)x$

50 a) $f : x \mapsto x(\sqrt{2} - 1) - 7$ b) $g : x \mapsto \dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{1}{2}x$

Pour les exercices 51 à 53

Déterminez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. Donnez vos résultats dans un tableau de signes.

51 a) $f(x) = 2x - 5$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 5$

52 a) $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$ b) $f(x) = -x\sqrt{2} + 2$

53 a) $f(x) = -\dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$ b) $f(x) = x - \dfrac{\pi}{2}$

INÉQUATIONS PRODUITS

Pour les exercices 54 à 57

1. Résolvez, en utilisant un tableau de signes, chacune des inéquations.

2. Représentez l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

3. Écrivez cet ensemble à l'aide d'intervalles.

54 a) $(5x - 1)(-2x + 1) > 0$

b) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(3x + 7) \geqslant 0$

55 a) $(-3x - 7)(2x - 5) < 0$

b) $(2x - 3)(2x + 3) \leqslant 0$

56 a) $\left(3 - \dfrac{x}{4}\right)\left(5 + \dfrac{x}{3}\right) > 0$

b) $(2x + 3)\left(x + \dfrac{4}{3}\right) \geqslant 0$

57 a) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{2}\right) < 0$

b) $x(x - 1)(x - 2) > 0$

Pour les exercices 58 et 59

Factorisez l'expression $A(x)$, puis déterminez le signe de $A(x)$ suivant les valeurs de x.

58 a) $A(x) = (x + 2)^2 - 16$

b) $A(x) = (2x + 3)^2 - (x - 1)^2$

59 a) $A(x) = x^2 - 2x$

b) $A(x) = (x + 1) - x(x + 1)$

FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

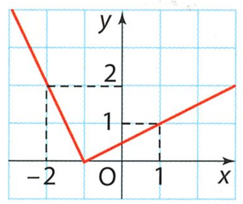
Pour les exercices 60 et 61

La courbe donnée est celle d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

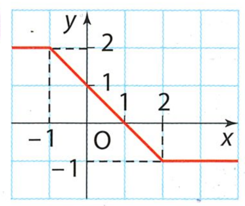
Donnez les expressions algébriques qui permettent de calculez $f(x)$ connaissant x.

→ *exercice 20, Apprendre à chercher, page 59.*

60



61



62 Représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = -x + 5 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

63 Représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

64 Représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 5 & \text{si } x < -2 \\ f(x) = 1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = -2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Avec les TICE

65 **Un programme de calcul**

On note x un nombre quelconque et f la fonction qui au nombre x associe le nombre obtenu par le programme de calcul suivant.

```
Choisir un nombre.
Ajouter 1.
Élever le résultat au carré.
Retrancher le carré du nombre initialement
choisi.
```

1. a) Avec un tableur, faites afficher les valeurs de $f(x)$ pour x entier variant de 0 à 20.

b) Quelle conjecture pouvez-vous émettre concernant la nature de la fonction f ? Pour vous aider (ou vous conforter), faites afficher sa représentation graphique.

2. Prouvez votre conjecture.

3. Application

a) Peut-on trouver deux entiers naturels consécutifs dont la différence des carrés est 2 009 ? Même question avec 2 010.

b) Quels sont les nombres entiers qui permettent de répondre par l'affirmative à la question précédente ?

Prendre toutes les initiatives

66 Léonie souhaite acheter un lecteur MP3.

Le prix affiché (49 €) dépasse largement la somme dont elle dispose. Elle décide donc d'économiser régulièrement. Elle a relevé qu'elle avait 17 € au 2e mois et 25 € au 4e mois.

En économisant au même rythme, au bout de combien de mois Léonie pourra-t-elle acheter le lecteur MP3 ?

Approfondissement

Compléments numériques

67 Mise en inéquation : les deux transporteurs

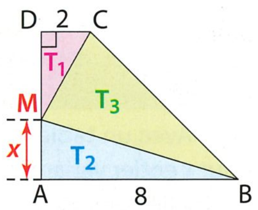
Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1 000 € au départ et 2 € par kilomètre.
Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

68 Mise en inéquation : les frais de fabrication

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre.
Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 € ?

69 Un problème d'aires

ABCD est un trapèze rectangle tel que AB = 8, AD = 6, DC = 2.
M est un point du segment [AD] et on pose AM = x.
On a découpé le trapèze en trois triangles T_1, T_2 et T_3 comme l'indique la figure.



On note f_1, f_2 et f_3 les fonctions qui associent à x les aires respectives de T_1, T_2 et T_3.

1. a) Exprimez $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x.

b) Construisez dans un même repère les courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3 lorsque x décrit I = [0 ; 6].

2. a) Coloriez sur l'axe des abscisses l'intervalle J décrit par x pour lequel aire T_1 < aire T_2 < aire T_3.

b) Par le calcul, précisez l'intervalle J.

70 Un problème de facturation

Une personne a acheté un téléphone portable.
Trois opérateurs lui proposent les formules suivantes :

	Abonnement mensuel fixe pour 2 heures de communication	Supplément par minute (commencée) au-delà des 2 heures
Formule 1	30 €	0,25 €
Formule 2	15 €	0,75 €
Formule 3	20 €	0,5 €

L'objectif est de choisir la formule la plus avantageuse suivant le temps de dépassement du forfait.

Pour cela, on note x le nombre de minutes au-delà des deux heures du forfait et f_1, f_2, f_3 les fonctions qui à x associent la dépense relative à chacune des formules 1, 2 et 3.

a) Calculez $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$.

b) Résolvez les équations suivantes :

$$f_1(x) = f_2(x) \ ; \quad f_2(x) = f_3(x) \quad \text{et} \quad f_1(x) = f_3(x).$$

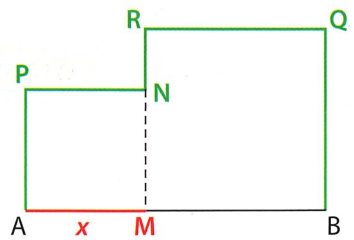
c) Représentez, dans un même repère, les trois fonctions pour $x \in [0 ; 50]$.

d) Tracez en rouge, sur le graphique précédent, la courbe représentative de la fonction g qui à x associe le tarif le plus avantageux.

e) Pour un mois, la personne pense dépasser de 25 minutes en moyenne les deux heures de forfait. Quelle formule doit-elle choisir ?

71 Un problème de longueurs

On donne AB = 6 cm. M est un point du segment [AB] et on pose AM = x. Dans le même demi-plan, on construit les carrés AMNP et MBQR.
f est la fonction définie sur [0 ; 6] qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale APNRQB (tracée en vert sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.



1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle [3 ; 6].

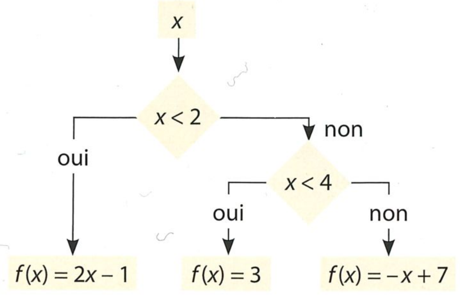
2. Vérifiez que $f(x) = 18 - 2x$, si $x \in [0 ; 3]$
et $f(x) = 6 + 2x$, si $x \in [3 ; 6]$.

3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées), construisez la courbe représentative de f.

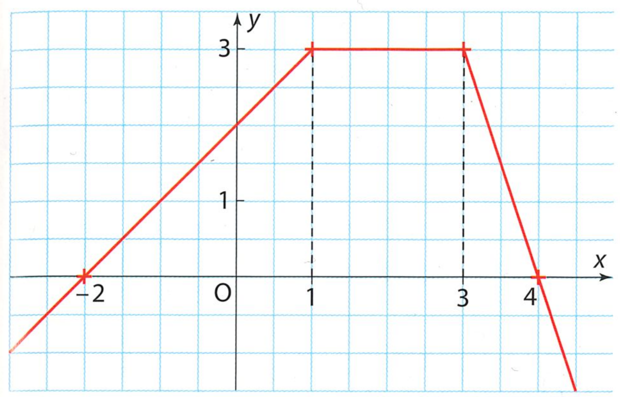
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

72 Un problème de calcul

Représentez graphiquement la fonction f définie par le programme de calcul suivant :



73 Résoudre une inéquation



La courbe ci-dessus, tracée dans un repère orthonormé, est celle d'une fonction f définie sur ℝ.

1. Trouvez les expressions algébriques qui permettent de calculer $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. g est la fonction définie sur ℝ par $g(x) = 2 - x$.

a) Tracez la droite représentative de g sur le graphique.

b) Graphiquement, précisez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
Par le calcul, donnez la valeur exacte de chacune.

3. Résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

→ *exercice 20, Apprendre à chercher, page 59.*

74 Choisir un tarif de location ALGORITHMIQUE

Une société de location de voiture propose à ses clients deux contrats :
– Contrat C1 : un forfait de 23 € et 0,40 € par kilomètre parcouru ;
– Contrat C2 : 0,60 € par kilomètre parcouru.

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer et d'afficher le coût des deux contrats suivant le nombre x de kilomètres parcourus.

2. Pour x kilomètres parcourus, on note $f_1(x)$ le coût suivant le contrat C1 et $f_2(x)$ le coût suivant le contrat C2.

a) Représentez graphiquement f_1 et f_2 dans un repère orthogonal (unités : en abscisse, 1 cm pour 20 km parcourus ; en ordonnée, 1 cm pour 10 €).

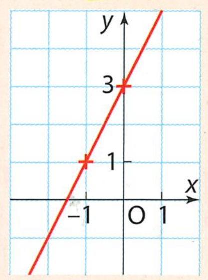
b) Déterminez graphiquement le tarif le plus avantageux pour le client suivant le nombre de kilomètres parcourus.

c) Complétez alors l'algorithme ci-dessous dont l'objectif est de donner, suivant le nombre x de kilomètres à parcourir, le nom du contrat le moins cher et le prix P à payer.

```
Variables
x est un nombre
P est un nombre
Contrat est un « mot », autrement dit une
chaîne de caractères
Initialisation
Saisir x
Traitement
Si (0 ⩽ x) et (x ⩽ …) alors P reçoit …
   Contrat reçoit « … »
   Sinon P reçoit …
   Contrat reçoit « … »
FinSi
Sortie
Afficher « Le contrat le moins cher est »,
         Contrat
Afficher « Le montant à payer sera de : », P
```

75 « Pour tout » et « il existe » LOGIQUE

La droite est la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 3$.
Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez.



Pour justifier qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.
Voir *Vocabulaire de la logique* → p. 258

1. Pour tout nombre x, $f(x) \geqslant 3$.

2. Il existe un nombre x tel que $f(x) \geqslant 3$.

3. Il existe un unique nombre x tel que $f(x) = 3$.

4. Pour tout nombre a, il existe un unique nombre b tel que $f(b) = a$.

Prendre toutes les initiatives

76 Déterminez la fonction affine f telle que :

$$x \overset{f}{\mapsto} \ ? \ \overset{f}{\mapsto} \ ? \ \overset{f}{\mapsto} \frac{x}{8} - \frac{7}{4}.$$

77 Déterminez la fonction affine f telle que :

$$(f(0) - f(1))\,(f(0) + f(1)) = 0$$
$$\text{et} \quad f(0) + f(1) = 6.$$