Correction du devoir maison n°8

Exercice 1:

1. M est un point du segment $[AB]$ donc $0 \leq AM \leq 17$.
   La fonction f est donc définie sur l'intervalle [0;17].

2. L'aire du trapèze $MBCD$ est égale à la différence entre l'aire du trapèze $ABCD$ et l'aire du triangle ADM .
   on a : $f(x) = \frac{(AB+CD)\times h}{2} - \frac{AM\times h}{2}$

   on a donc $f(x) = \frac{(17+9)\times 6}{2} - \frac{x\times 6}{2}$
   $\Leftrightarrow \quad f(x) = 78 - 3x$

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;17]$ par $f(x) = 78 - 3x$

3. On cherche l'ensemble des réels x appartenant à l'intervalle $[0;17]$, solutions de l'inéquation :

$$78 - 3x \geq \frac{78}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x \geq -39$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 13$$

L'aire du trapèze MBCM est supérieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze ABCD pour l'ensemble des points M du segment $[AB]$ tels que la distance $AM \leq 13$.

Exercice 2:

1. Pour tout réel x, $f(x) = (3-2x)^2 - (3x+2)^2$
   $= [(3-2x)-(3x+2)] \times [(3-2x)+(3x+2)]$
   $= (3-2x-3x-2)(3-2x+3x+2)$
   $= (-5x+1)(x+5)$

2. Pour tout réel x, $f(x) \leq 0$
   $\Leftrightarrow \quad (-5x+1)(x+5) \leq 0$

Or, pour tout réel x :

d'une part

$$-5x+1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \quad \geq \frac{1}{5}$$

d'autre part :

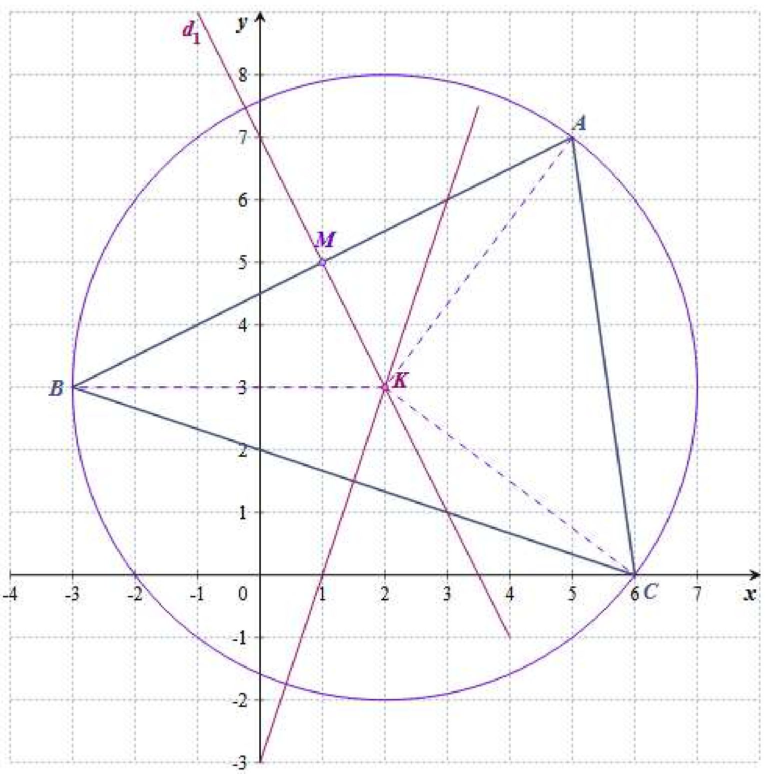
$$x+5 \leq \quad 0$$
$$\Leftrightarrow x \quad \leq \; -5$$

On en déduit le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$-5x+1$		+		+	0	−	
$x+5$		−	0	+		+	
$(-5x+1)(x+5)$		−	0	+	0	−	

L'ensembles des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est S=]-∞;5] ∪ [$\frac{1}{5}$;+∞[.

Exercice 3:



1. Les coordonnées $(x_M ; y_M)$ du point M milieu du segment $[AB]$ sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $M(1;5)$.

Le coefficient directeur de la droite d_1 est $m = -2$.
L'équation réduite de la droite d_1 est de la forme $y = -2x + p$.

Déterminons p à l'aide du point $M(1;5)$ appartenant à la droite d_1 :

$$M(1;5) \in d_1 \Leftrightarrow -2 \times 1 + p = 5 \Leftrightarrow p = 7$$

La droite d_1 a pour équation réduite $y = -2x + 7$

2. $$\begin{cases} y = -2x + 7 & (L1) \\ y = 3x - 3 & (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 7 & (L1) \\ -2x + 7 = 3x - 3 & (L1) = (L2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 7 \\ -5x = -10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Le système admet pour couple solution le couple (2;3).

Cela signifie que la droite d'équation réduite $y = 3x - 3$ coupe la droite d_1 au point de coordonnées (2;3) .

3. K est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC si et seulement si $KA = KB = KC$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé donc on peut appliquer les formules de calculs de distances.

$$KA^2 = (x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2 = (5-2)^2 + (7-3)^2 = 25$$
$$KB^2 = (x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2 = (-3-2)^2 + (3-3)^2 = 25$$
$$KC^2 = (x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2 = (6-2)^2 + (0-3)^2 = 25$$

$KA = KB = KC = 5$ donc le point K est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

Remarque : ce cercle de centre K a pour rayon 5.