CORRECTION DU DST

Exercice 1 — 6 points

f est la fonction affine définie pour tout réel x, telle que $f(-2)=3$ et $f(4)=-1$

1. $f(x)$ est de la forme $f(x)=mx+p$ avec m et p deux réels.

$$m=\frac{f(-2)-f(4)}{-2-4}=\frac{3-(-1)}{-6}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}.$$

$f(x)$ est donc de la forme $f(x)=-\frac{2}{3}x+p$

Déterminons p :

$f(-2)=3 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\times(-2)+p=3$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}+p=3$

$\Leftrightarrow p=3-\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow p=\frac{5}{3}$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}}$$

2. $-\frac{2}{3}<0$: f est une fonction affine de coefficient négatif donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\geq 0 \Leftrightarrow -2x+5\geq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 5 \Leftrightarrow x\leq\frac{5}{2}$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

4. a. Soit $-5\leq x\leq 5$

f est strictement monotone sur $[-5;5]$ donc on peut passer aux images dans l'inégalité.
Or f est décroissante sur $[-5;5]$, donc f change l'ordre sur $[-5;5]$.

Ainsi,

Si $-5\leq x\leq 5$ alors $f(-5)\geq f(x)\geq f(5)$

$\Leftrightarrow f(5)\leq f(x)\leq f(-5)$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\times 5+\frac{5}{3}\leq f(x)\leq -\frac{2}{3}\times(-5)+\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}\leq f(x)\leq 5$

$-2<-\frac{5}{3}$

On a donc bien, Si $1\leq x\leq 5$ alors $-2\leq f(x)\leq 5$.

Ce n'est pas une équivalence !

$$\boxed{\text{La proposition } A \text{ est donc vraie.}}$$

b. $f(x)\leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\leq 1$

$\Leftrightarrow -2x+5\leq 3$

$\Leftrightarrow -2x\leq 3-5$

$\Leftrightarrow -2x\leq -2$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{-2}{-2}$

$\Leftrightarrow x\geq 1$

$$\boxed{\text{La proposition } B \text{ est donc fausse.}}$$

Exercice 2 — 14 points

Dans un le repère orthonormé (O,I,J), on considère les points $A(-4;7)$; $B(-7;-4)$; $C(8;-1)$; $D(-1;5)$ $G\left(-1;\frac{2}{3}\right)$ et $L(0,5;-2,5)$.

1. Placer les points dans le repère.

2. d_1 : $y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$.

D'une part :

$y_B=-4$

D'autre part :

$\frac{3}{2}x_B+\frac{13}{2}=\frac{3}{2}\times(-7)+\frac{13}{2}$

$=-\frac{21}{2}+\frac{13}{2}=-\frac{8}{2}=-4$

$=y_B$

Donc $B\in d_1$.

Tracer la droite d_1 dans le repère :

L'ordonnée à l'origine de d_1 étant égale à $\frac{13}{2}$, d_1 coupe l'axe des ordonnées en $P(0;6,5)$. $d_1=(BP)$.

3. Déterminer l'équation réduite de la droite (AC) .
   $x_A \neq x_C$ donc (AC) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
   Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$

$$\text{avec } m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-1-7}{8-(-4)}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$$

$$(AC):\ y=-\frac{2}{3}x+p$$

Déterminons p à l'aide du point $A(-4;7)$:

$$y_A=-\frac{2}{3}x_A+p$$
$$\Leftrightarrow\quad 7=-\frac{2}{3}\times(-4)+p$$
$$\Leftrightarrow\quad 7-\frac{8}{3}=p$$
$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{13}{3}$$

L'équation réduite de (AC) est : $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

4. $$(S):\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} \\ y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} & (L1) \\ \frac{3}{2}x+\frac{13}{2}=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} & (L1)=(L2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} & (L1) \\ \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x=\frac{13}{3}-\frac{13}{2} & (L1)=(L2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S):\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} & (L1) \\ \frac{13}{6}x=-\frac{13}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S):\begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{13}{3}=5\end{cases}$$

La deux lignes du système correspondant respectivement aux équations réduites de (AC) et d_1, le couple solution $(-1;5)$ correspond aux coordonnées du point D .

(AC) et d_1, sont sécantes en D.

5. On appelle K le milieu de $[AC]$.
   a. Coordonnées de K :

$$K\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right) \qquad \text{on a donc } K(2;3)$$

   b. Equation réduite de la médiane (BK) du triangle ABC.
   $x_B \neq x_K$ donc (BK) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$

$$\text{avec } m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_K-y_B}{x_K-x_B}=\frac{3-(-4)}{2-(-7)}=\frac{7}{9}$$

$$(BK):\ y=\frac{7}{9}x+p$$

Déterminons p à l'aide du point $K(2;3)$:

$$y_K=\frac{7}{9}x_K+p$$
$$\Leftrightarrow\quad 3=\frac{7}{9}\times 2+p$$
$$\Leftrightarrow\quad 3-\frac{14}{9}=p$$
$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{13}{9}$$

La médiane (BK) du triangle ABC a pour équation réduite : $y=\frac{7}{9}x+\frac{13}{9}$

6. a. Vérifions que L est le milieu de $[BC]$.
   $$\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)=(0,5;-2,5)=(x_L;y_L)$$
   Donc L est le milieu de $[BC]$.

b. On reporte le coefficient directeur de d_2 à partir du point L.
On part de L, on avance d'une unité puis on descend de 5 en ordonnées.

c. Equation réduite de d_2 :
d_2 admet une équation réduite de la forme $y = -5x + p$ avec p réel.

Déterminons p à l'aide du point $L(0,5;-2,5)$

$$\begin{aligned} & y_L = -5x_L + p \\ \Leftrightarrow \quad & -2,5 = -5 \times 0,5 + p \\ \Leftrightarrow \quad & p = 0 \end{aligned}$$

d_2 a pour équation réduite : $y = -5x$

On en déduit que d_2 passe par l'origine du repère.

7. a. Démontrer que les points A, G, L sont alignés.

A, G, L sont alignés $\Leftrightarrow (AG)//(AL)$
Soient m et m' les coefficients directeurs respectifs des droites (AG) et (AL).
A, G, L sont alignés $\Leftrightarrow m = m'$
Or
d'une part :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{\frac{2}{3} - 7}{-1-(-4)} = \frac{-\frac{19}{3}}{3} = -\frac{19}{9}$$

d'autre part :

$$m' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_L - y_A}{x_L - x_A} = \frac{-2,5-7}{0,5-(-4)} = \frac{-9,5}{4,5} = -\frac{19}{9}$$

b. Dans le triangle ABC on sait que (BK) et (AL) sont deux médianes.

Or, dans un triangle, le centre de gravité est le point de concours des 3 médianes.

Donc G est le centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow$ (BK) et (AL) sont sécantes en G.
$\Leftrightarrow G \in (BK)$: $y = \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}$

D'une part :
$y_G = \frac{2}{3}$

D'autre part :
$$\frac{7}{9}x_G + \frac{13}{9} = \frac{7}{9} \times (-1) + \frac{13}{9} = \frac{6}{9} = y_G$$

Donc $G \in (BK)$ et par conséquent G est le centre de gravité du triangle ABC.

8. a. (AC) et d_1 sont perpendiculaires $\Leftrightarrow ABD$ est rectangle en D.
$\Leftrightarrow AB^2 = AD^2 + BD^2$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - yA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'une part
$AB^2 = (-3)^2 + 11^2 = 9 + 121 = 130$

D'autre part
$$AD^2 + BD^2 = 3^2 + (-2)^2 + 6^2 + 9^2 = 9 + 4 + 36 + 81 = 130$$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABD est rectangle en D.

(AC) et d_1 sont perpendiculaires en D.

b. $d_3 // d_1$ donc elle admet une équation réduite de la forme $y = \frac{3}{2}x + p$
Déterminons p à l'aide du point $K(2;3)$.

$$\begin{aligned} & y_K = \frac{3}{2}x_K + p \\ \Leftrightarrow \quad & 3 = \frac{3}{2} \times 2 + p \\ \Leftrightarrow \quad & p = 0 \end{aligned}$$

d_3 a pour équation réduite : $y = \frac{3}{2}x$

Remarquons que d_3 passe donc par l'origine du repère, tout comme d_2.

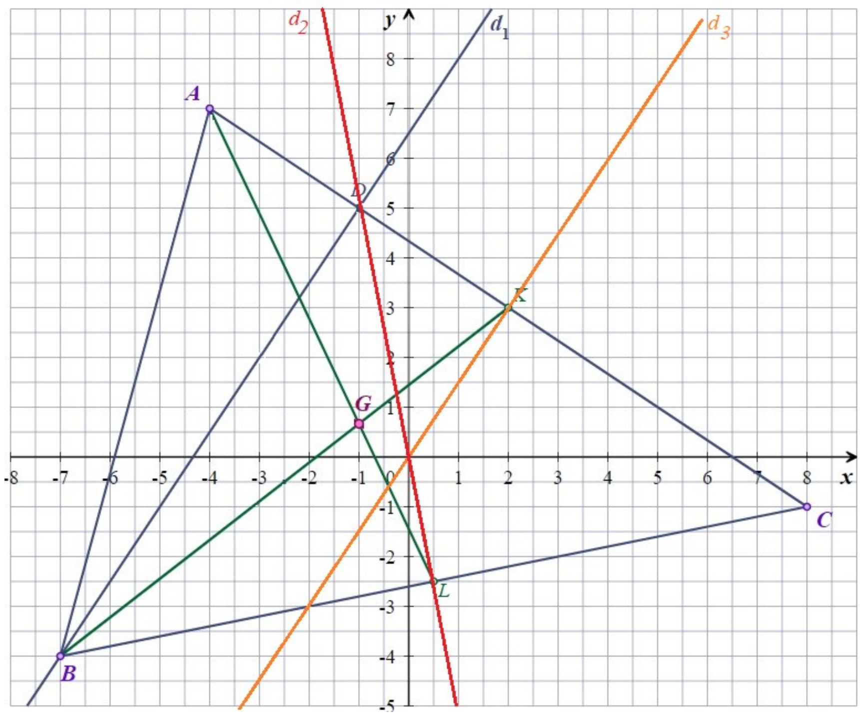
9. On déduit de la question précédente que les médiatrices d_2 et d_3 du triangle ABC sont sécantes en O.
Or, dans un triangle, les médiatrices sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit.

Le cercle a pour rayon OA .

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur ayant pour origine l'origine du repère donc il a les mêmes coordonnées que le point $A(-4;7)$.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ on a donc $OA^2 = (-4)^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$ d'où $OA = \sqrt{65}$.

Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{65}$.



y
x
d_1
d_2
d_3
A
B
C
D
G
K
L