Correction du devoir maison n°7

Étudier les variations d'une fonction avec ln (p. 111)

Exercices d'application

5 **a.** $f(1) = \ln 1 = 0$ et $g(1) = 0{,}5(1^2 - 1) = 0$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent en $A(1\,;0)$.
b. $d(x) = f(x) - g(x) = \ln x - 0{,}5(x^2 - 1)$.

$d'(x) = \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1 - x^2}{x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$ or $1 + x > 0$

donc $d'(x)$ est du signe de $1 - x$ pour tout $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$1 - x$		+	0	−	
$d'(x)$	‖	+	0	−	0
$d(x)$	‖	↗	0	↘	

$d(x) \leqslant 0$ pour tout réel x, donc $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout réel x.
La courbe représentative de la fonction ln est donc située en-dessous de la courbe représentative de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$. De plus $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_y$ sont tangentes en 1.

Déterminer un seuil (p. 113)

Exercices d'application

7 Soit t le taux d'évolution moyen annuel.

$(1+t)^{20} = \dfrac{143}{311} \Leftrightarrow 1 + t = \left(\dfrac{143}{311}\right)^{\frac{1}{20}}$.

Donc $t \approx -0{,}0381$ soit une baisse d'environ 38,1 ‰.
En 2018, il se sera écoulé 8 ans. Le taux de mortalité sera alors d'environ $143 \times \left(1 - \dfrac{38{,}1}{1000}\right)^8 \approx 104{,}8$. Soit 104,8 ‰.

8 Augmenter de 3,5% revient à multiplier par $\left(1 + \dfrac{3{,}5}{100}\right)$
On cherche n tel que :

$10{,}9\left(1 + \dfrac{3{,}5}{100}\right)^n > 20 \Leftrightarrow 1{,}035^n > \dfrac{20}{10{,}9}$

$\Leftrightarrow n \ln 1{,}035 > \ln\left(\dfrac{20}{10{,}9}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{20}{10{,}9}\right)}{\ln 1{,}035}$.

La population du Niger devrait donc dépasser 20 millions d'habitants au bout de 18 ans, c'est-à-dire en 2018.

20 Vrai ou faux ?

1 **Vrai.** $\ln 3a - \ln a = \ln 3 + \cancel{\ln a} - \cancel{\ln a}$

2 **Faux.** $\dfrac{\ln e^2}{\ln 16} \neq \ln \dfrac{e^2}{16}$

3 **Vrai :** $\ln(e^2 + e) = \ln(e(e+1)) = \ln e + \ln(e+1)$
$= 1 + \ln(e+1)$.

4 **Faux :** par exemple, pour $x = -2$: $\ln(x^2 + x) = \ln 6$, mais $\ln x$ n'existe pas !

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

29 Justifier des résultats

1 **a.** $\ln(25\,e) = \ln(5^2 \times e) = \ln(5^2) + \ln(e) = 2\ln(5) + 1$.
b. $\ln(e^2) + 4\ln(1) = 2\ln(e) + 4 \times 0 = 2 \times 1 = 2$.
c. $\ln(e^{-1}) + \ln(e^3) = -1 + 3 = 2$.

2 • $\ln(2) - 2\ln(5) + 3\ln(2) = 4\ln(2) - \ln(5^2)$
$= \ln(2^4) - \ln(5^2) = \ln\left(\dfrac{16}{25}\right) = \ln(0{,}64)$.

• $\ln(e^3) - 2\ln(1) + 4\ln(5e)$
$= 3\ln(e) - 2 \times 0 + 4\ln(5) + 4\ln(e)$
$= 3 + 4\ln(5) + 4 = 7 + 4\ln(5)$
$= 7 + \ln(5^4) = 7 + \ln(625)$.

• $\ln(2+3) - 3\ln(5) + 4\ln(3) = \ln(5) - \ln(5^3) + \ln(3^4)$
$= \ln\left(\dfrac{5 \times 3^4}{5^3}\right) = \ln\left(\dfrac{81}{25}\right)$.

51 **a.** $f = \frac{u}{v}$ avec $u : q \mapsto \ln q + 1$ $u' : q \mapsto \frac{1}{q}$

$v : q \mapsto q$ $v' : q \mapsto 1$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour tout $q > 0$: $f'(q) = \dfrac{\frac{1}{q} \times q - (\ln q + 1)}{q^2} = \dfrac{-\ln q}{q^2}$.

b. $g = 5 \times \frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto \ln x + 2$ $u' : x \mapsto \frac{1}{x}$

$g' = 5 \times \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $v : x \mapsto x$ $v' : x \mapsto 1$

Pour tout $x > 0$: $g'(x) = \dfrac{5 \times \frac{1}{x} \times x - 5(\ln x + 2)}{x^2} = \dfrac{-5(1 + \ln x)}{x^2}$.