Devoir maison n°8 - corrigé

EXERCICE 1 : PROPRIETES ALGEBRIQUES DE LA FONCTION *ln*

1. Exprimer chaque nombre en fonction de *ln* 2 , *ln* 3

a) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{8}\right)= \quad \ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 8=\ln 2-3\ln 2=-2\ln 2$

b) $\ln(\sqrt{15})-\ln(\sqrt{10})=\ln\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=\ln\left(\sqrt{\frac{15}{10}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$

2. Simplifier l'écriture du nombre.

$$a)\ln(72)-2\ln\left(\frac{27}{256}\right)+\ln(\sqrt{108})=\ln(3^2 \times 2^3)-2\ln\left(\frac{3^3}{2^8}\right)+\frac{1}{2}\ln(3^3\times 2^2)$$

$$=2\ln 3+3\ln 2-6\ln 3+16\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2$$

$$=20\ln 2-\frac{5}{2}\ln 3$$

$$b)\ln\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{2}\ln(36)+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)=\ln\left(\frac{2^2}{3^2}\right)+\frac{1}{2}\ln[(3\times 2)^2]+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{3^2}{2}\right)$$

$$=2\ln 2-2\ln 3+\ln 3+\ln 2+\frac{2}{3}\times 2\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3$$

$$c)\ln(2e)+\ln(e\sqrt{e})-\ln(4)+\ln\left(\frac{2}{e^2}\right)+\ln(\sqrt{e})+\ln(e^3)-2=\ln 2+\ln e+\ln e+\frac{1}{2}\ln e-2\ln 2+\ln 2-2+\frac{1}{2}+3-2$$

$$=\ln 2+1+1+\frac{1}{2}-2\ln 2+\ln 2-2+\frac{1}{2}+1$$

$$=2$$

3. Ecrire l'expression sous la forme *ln* A.

$$a)\ln\left(\frac{7}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln\left(\frac{7\times 2\times 5}{2\times 5\times 4}\right)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$b)\ln(5)-3\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{10}\right)=\ln 5-\ln 8-\ln 10=\ln 5-(\ln 8+\ln 10)=\ln\left(\frac{5}{8\times 10}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\cancel{5}}{8\times\cancel{5}\times 2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^4}\right)=-4\ln 2$$

4. On sait que *ln* 2 ≈ 0,7. En déduire, sans calculatrice une valeur approchée de :

a) $\ln(4)=2\ln 2\approx 1,4$ b) $\ln(8)=3\ln 2\approx 2,1$

c) $\ln\left(\frac{1}{16}\right)=-\ln 16=-\ln(2^4)=-4\ln 2\approx -2,8$

d) $\ln(\sqrt{8})=\frac{1}{2}\ln 8=\frac{1}{2}\times 3\ln 2\approx 0,7+0,35\approx 1,05$

EXERCICE 2 : RESOLUTION D'EQUATIONS OU D' INEQUATIONS

1. Résoudre chacune de ces équations :

a. $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln 3$ L'équation existe pour tout x tel que $x>0$ et $x-2>0$: E =] 2 ; +∞ [

Résolvons dans E l'équation :

Pour tout $x\in]2\;;\;+\infty[$: $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln[x(x-2)]=\ln 3$

$\Leftrightarrow x(x-2)=3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ $x_1=-1$ est racine évidente de ce trinôme s

on en déduit $x_2=3$; or $-1\notin E$

On conclut : $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln 3 \Leftrightarrow x=3$

b. $\ln[x(x-2)]=\ln 3$ L'équation existe pour tout x tel que $x(x-2)>0$
Il s'agit de la forme factorisée d'un trinôme dont les racines sont 0 et 2. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. E = $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

Résolvons dans E l'équation :

Pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$: $\ln[x(x-2)]=\ln 3$

$\Leftrightarrow x(x-2)=3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$ (d'après question a)

On conclut : $\ln[x(x-2)]=\ln 3 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$: $\boxed{\mathscr{S}=\{-1;3\}}$

c. $\ln(2x-3)=3$ L'équation existe pour tout x tel que $(2x-3)>0$: E = $]\frac{3}{2};+\infty[$

Résolvons dans E l'équation :

Pour tout $x\in\;]\frac{3}{2};+\infty[$: $\ln(2x-3)=3$

$\Leftrightarrow \ln(2x-3)=\ln(e^3)$

$\Leftrightarrow 2x-3=e^3$

$\Leftrightarrow x=\frac{e^3+3}{2}$ valeur approchée de $\frac{e^3+3}{2}\approx 11,543 > \frac{3}{2}$

On conclut : $\ln(2x-3)=3 \Leftrightarrow x=\frac{e^3+3}{2}$

d. $10-5\ln(x-5)=0$ L'équation existe pour tout x tel que $(x-5)>0$ E = $]5;+\infty[$

Résolvons dans E l'équation :

Pour tout $x\in\;]5;+\infty[$: $10-5\ln(x-5)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x-5)=2$

$\Leftrightarrow \ln(x-5)=\ln e^2$

$\Leftrightarrow x-5=e^2$

$\Leftrightarrow x=e^2+5$ valeur approchée de $e^2+5\approx 12,389 > 5$

On conclut : $10-5\ln(x-5)=0 \Leftrightarrow x=e^2+5$

2. Résoudre chacune des inéquations :

a. $\ln(x-3)+\ln(x-1)>3\ln 2$ L'inéquation existe pour tout x tel que $x-3>0$ et $x-1>0$
E =] 3 ; +∞ [

Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x\in]3\;;\;+\infty[$: $\ln(x-3)+\ln(x-1)>3\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln[(x-3)(x-1)]>\ln 8$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)>8$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3>8$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x-5>0$ $x_1=-1$ est racine évidente de ce trinôme s
on en déduit $x_2=5$
Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. $s=\ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

$\mathcal{S}=s\cap E=\ ]5;+\infty[$

On conclut : $\ln(x-3)+\ln(x-1)>3\ln 2\ \Leftrightarrow\ x\ >5$: $\boxed{\mathcal{S}=\ ]5;+\infty[}$

b. $\ln[(x-3)(x-1)]>3\ln 2$ L'inéquation existe pour tout x tel que $(x-3)(x-1)\ >0$
Il s'agit de la forme factorisée d'un trinôme dont les racines sont 1 et 3. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. $E=\ ]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

Résolvons dans E l'inéquation :
Pour tout $x\in\ ]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$: $\ln[(x-3)(x-1)]>3\ln 2$
$\Leftrightarrow\ \ln[(x-3)(x-1)]>\ln 8$
$\Leftrightarrow\ (x-3)(x-1)>8$
$\Leftrightarrow\ x^2-4x+3>8$
$\Leftrightarrow\ x^2-4x-5>0$ Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. $s=\ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

$\mathcal{S}=s\cap E=\ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$

On conclut : $\ln(x-3)+\ln(x-1)>3\ln 2\ \Leftrightarrow\ x\in\ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$: $\boxed{\mathcal{S}=\ ]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[}$

c. $\ln(2x-3)>2$ L'inéquation existe pour tout x tel que $(2x-3)\ >0$
$E=\ ]\frac{3}{2};+\infty[$
Résolvons dans E l'inéquation :
Pour tout $x\in\ ]\frac{3}{2};+\infty[$: $\ln(2x-3)>2$
$\Leftrightarrow\ \ln(2x-3)>\ln(e^2)$
$\Leftrightarrow\ 2x-3>e^2$
$\Leftrightarrow\ x>\frac{e^2+3}{2}$ valeur approchée de $\frac{e^2+3}{2}\approx 5{,}195\ >\frac{3}{2}$

On conclut : $\ln(2x-3)=3\ \Leftrightarrow\ x>\frac{e^3+3}{2}$: $\boxed{\mathcal{S}=\ ]\frac{e^2+3}{2};+\infty[}$

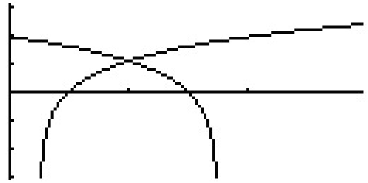
d. $\ln(3-x)+2\geq 0$ L'inéquation existe pour tout x tel que $(3-x)\ >0$
$E=\ ]-\infty;3[$

Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x\in\ ]-\infty;3[$: $\ln(3-x)+2\geq 0$
$\Leftrightarrow\ \ln(3-x)\geq -2$
$\Leftrightarrow\ \ln(3-x)\geq \ln(e^{-2})$
$\Leftrightarrow\ 3-x\geq e^{-2}$
$\Leftrightarrow\ x\leq 3-e^{-2}$ valeur approchée de $3-e^{-2}\approx 2{,}865\ <3$

On conclut : $\ln(3-x)+2\geq 0\ \Leftrightarrow\ x\leq 3-e^{-2}$: $\boxed{\mathcal{S}=\ ]-\infty;3-e^{-2}]}$

3. Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x)=\ln(4x-1)$ et $g(x)=\ln(7-4x)$.
Voici les courbes représentatives de f et g obtenues à l'écran de la calculatrice (fenêtre : $0\leq X\leq 3\quad -3\leq Y\leq 3$).



a. Ensemble de définition de f : f est définie pour tout x tel que $(4x-1)\ >0$
$\mathcal{D}f=\ ]\frac{1}{4};+\infty[$

Ensemble de définition de g. g est définie pour tout x tel que $(7-4x)\ >0$
$\mathcal{D}g=\ ]-\infty;\frac{7}{4}[$

b. $f(1)=\ln 3$
$g(1)=\ln 3$

$f(1)=g(1)=\ln 3$ donc les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en un point A de coordonnées $A(1\ ;\ \ln 3)$

c. D'après le cours, on sait que les fonctions u et $\ln u$ ont mêmes variations.

f est donc croissante et g est décroissante.
Graphiquement $f(x)>g(x)\ \Leftrightarrow\ x\in\ ]1;\frac{7}{4}[$

d. Résolvons algébriquement $f(x)>g(x)$.

L'inéquation existe pour tout x tel que $(4x-1)\ >0$ et $(7-4x)\ >0$
$E=\mathcal{D}f\cap\ \mathcal{D}g=\left]\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right[$
Résolvons dans E l'inéquation :

Pour tout $x\in\left]\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right[$: $f(x)>g(x)$
$\Leftrightarrow\ \ln(4x-1)>\ln(7-4x)$
$\Leftrightarrow\ 4x-1>7-4x$
$\Leftrightarrow\ 4x+4x>7+1$
$\Leftrightarrow\ 8x>8$
$\Leftrightarrow\ x>1$

On conclut : $f(x)>g(x)\ \Leftrightarrow\ \left]1;\frac{7}{4}\right[$: $\boxed{\mathcal{S}=\left]1;\frac{7}{4}\right[}$