Corrigé type

EXERCICE 1

1. $A(0;2) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(0)=2$
$B(-1;2,7) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(-1)=2,7$
$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe au point A d'abscisse 0. La tangente en $A(0;2)$ passe par $A(2;0)$ donc

$$f'(0)=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\frac{2}{-2}=-1$$

$f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de tangente à la courbe au point d'abscisse -1. En ce point, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc

$f'(-1)=0$

2. La courbe se trouve sous l'axe des abscisses sur $\left[-\frac{5}{2};2\right]$ et au dessus de l'axe des abscisses sinon. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{5}{2}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. Le signe de $f'(x)$ sur $\mathrm{I}=\left[-\frac{5}{2};5\right]$ se déduit des variations de f sur I.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\frac{5}{2}$		-1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

4. D'après le tableau de signes établit à la question précédente, f' est positive sur $\left[-\frac{5}{2};-1\right]$ et s'annule en changeant de signe en -1. $\mathscr{C}_2$ est la seule courbe correspondant à une fonction positive sur $\left[-\frac{5}{2};-1\right]$ et négative sur $[-1;5]$.

5. La fonction g a pour dérivée f. On a donc pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g'(x)=f(x)$.
Les variations de g sur I se déduisent du signe de sa dérivée f sur I.
D'après le tableau de signes établi à la question 2, on en déduit que g est décroissante sur $\left[-\frac{5}{2};-2\right]$ et croissante sur $[-2;5]$.

$\mathscr{C}_1$ est la seule courbe correspondant à une fonction décroissante sur $\left[-\frac{5}{2};-2\right]$ et croissante sur $[-2;5]$.

EXERCICE 2

1. La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-3}{x^2+3}$.
f est une dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $u: x \mapsto x^3-x^2-3$ $\quad u': x \mapsto 3x^2-2x$
$v: x \mapsto x^2+3$ $\quad v': x \mapsto 2x$

et $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2-2x)(x^2+3)-(x^3-x^2-3)2x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{3x^4+9x^2-2x^3-6x-(2x^4-2x^3-6x)}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{3x^4-2x^4+9x^2-2x^3+2x^3-6x+6x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}
$$

2. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée f'.
Or, par somme de 2 termes positifs, $f'(x)\geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3a. Dressons le tableau de variations de f sur [0 ;2].

x	0	α	2
$f(x)$	-1	0	$\frac{1}{7}$

f est continue et strictement croissante sur [0 ;2], à valeurs dans $[f(0);f(2)]=\left[-1;\frac{1}{7}\right]$ or $0 \in \left[-1;\frac{1}{7}\right]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in$ [0 ;2].

3b. A l'aide de la fonction G-SOLV de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 1,87$.

3c. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle ne peut pas s'annuler deux fois.

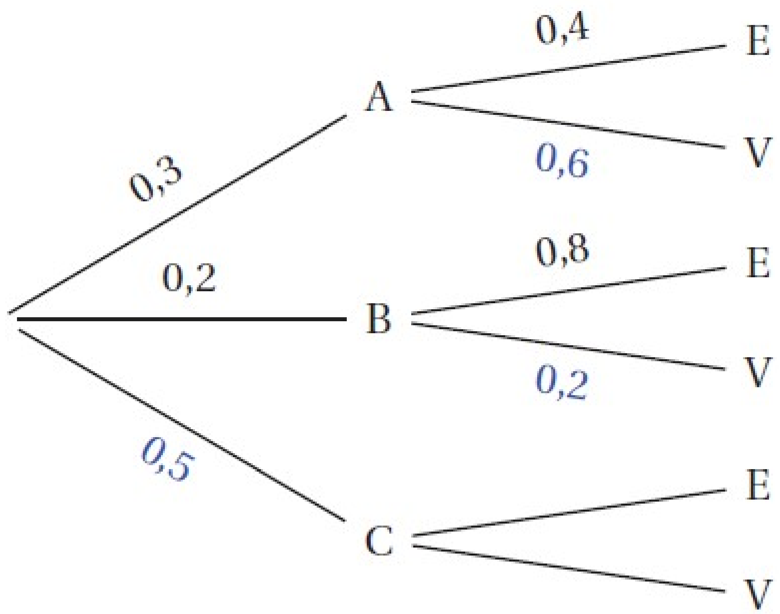
4. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc 10 possède au plus un antécédent par f.
A l'aide d'un tableau de valeurs établi avec un pas de 1 on obtient : $f(11) \approx 9{,}73$ et $f(12) \approx 10{,}75$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

1a. Pierre choisit le parcours A dans 30% des cas donc $p(A)=0,3$.
Pierre choisit le parcours B dans 20% des cas donc $p(B)=0,2$.
Si Pierre choisit le parcours A alors il fait une séance d'endurance dans 40% des cas, donc $p_A(E)=0,4$.
Si Pierre choisit le parcours B alors il fait une séance d'endurance dans 80% des cas, donc $p_B(E)=0,8$.
Pierre fait une séance d'endurance dans 70% des cas donc $p(E)=0,7$.

1b. Par définition, $p_B(V)=1-p_B(E)=1-0{,}8=0{,}2$.
Si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance de vitesse dans 20% des cas.

1c.



2. Les événements A, B, C forment une partition de l'univers donc on doit avoir $p(A)+p(B)+p(C)=1$ il en résulte que $p(C)=0,5$

3. $A\cap V$: « Pierre choisit le parcours A et fait une séance de vitesse ».
D'après la formule des probabilités composées : $p(A\cap V)=p(A)\times p_A(V)=0{,}3\times 0{,}6$
$=0{,}18$

4. Déterminons $p_E(A)$.

Par définition, $p_E(A) = \dfrac{p(E \cap A)}{p(E)} = \dfrac{0,3\text{x}0,4}{0,7} \approx 0,171$

5. Déterminons $p_C(E)$.

Par définition, $p_C(E) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(C)}$;

Calculons $p(E \cap C)$:

3 issues réalisent E. $E = \{A \cap E; B \cap E; C \cap E\}$
D'après la formule de Bayes, on a donc :
$p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E)$

D'où $p(C \cap E) = p(E) - [p(A \cap E) + p(B \cap E)]$
$p(C \cap E) = 0,7 - (0,3\text{x}0,4 + 0,2\text{x}0,8) = 0,42$.

On en déduit que $p_C(E) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,42}{0,5} = 0,84$

6. On répète 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « Pierre court », dont le succès est E : « Pierre fait une séance d'endurance ».
A chaque épreuve, la probabilité de succès est donc $p = 0,7$.
On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue de cette expérience. X suit une loi binomiale de paramètres $B(5; 0,7)$.

$p(X \leq 3)$ est obtenu à l'aide de la calculatrice en mode STAT :

BinomFrep(5 ;3 ;0,7) $\approx$ 0,472.

La probabilité que Pierre ait fait au plus trois séances d'endurance sur 5 séances d'entraînement est de 47,2% environ.