Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cette étude porte sur l'utilisation principale des véhicules du parc automobile français.

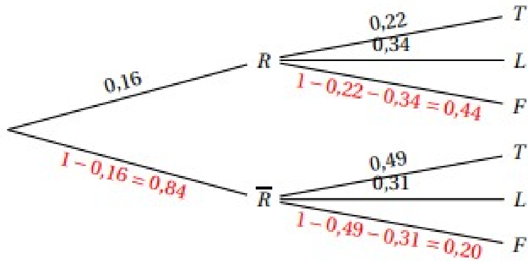
Partie A

Les véhicules de la région parisienne représentent 16 % du parc automobile français en 2015.
22 % des véhicules de la région parisienne sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 34 % pour les loisirs.
En province, 49 % des véhicules sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 31 % pour les loisirs.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc automobile français.

On note :

- R l'évènement : « le véhicule provient de la région parisienne »,
- $\overline{R}$ l'évènement : « le véhicule provient de la province »,
- T l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail »,
- L l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour les loisirs »,
- F l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour d'autres fonctions que le travail ou les loisirs ».

1. On représente la situation par un arbre de probabilité.



2. La probabilité qu'un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est, d'après la formule des probabilités totales :
$p(T) = p(R \cap T) + p\left(\overline{R} \cap T\right) = p(R) \times p_R(T) + p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(T) = 0{,}16 \times 0{,}22 + 0{,}84 \times 0{,}49 = 0{,}4468$

3. Madame Dupont et Monsieur Durand ont une conversation sur l'utilisation de leur véhicule. Madame Dupont dit utiliser principalement sa voiture pour les loisirs, Monsieur Durand principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.
Pour savoir qui de Madame Dupont ou de Monsieur Durand a la plus grande probabilité d'habiter la région parisienne, il faut comparer $p_L(R)$ (probabilité qu'a Madame Dupont d'habiter la région parisienne) à $p_T(R)$ (probabilité qu'a Monsieur Durand d'habiter la région parisienne).
On calcule $p(L) = p(R \cap L) + p\left(\overline{R} \cap L\right) = 0{,}16 \times 0{,}34 + 0{,}84 \times 0{,}31 = 0{,}3148$
Pour madame Dupont : $p_L(R) = \dfrac{p(R \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0{,}16 \times 0{,}34}{0{,}3148} = \dfrac{0{,}0544}{0{,}3148} \approx 0{,}1728$.
Pour monsieur Durand : $p_T(R) = \dfrac{p(R \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}16 \times 0{,}22}{0{,}4468} = \dfrac{0{,}0352}{0{,}4468} \approx 0{,}0788$
C'est donc Madame Dupont qui a la plus grande probabilité d'habiter dans la région parisienne.

Partie B

On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 véhicules du parc automobile français. On note X la variable aléatoire qui compte, dans cet échantillon, le nombre de véhicules utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

1. Le nombre de véhicules utilisés principalement pour le travail peut être assimilé à un tirage aléatoire avec remise parmi 10 véhicules, la probabilité d'être utilisé pour le travail étant $p(T) = 0{,}4468$; la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}4468$.
2. La probabilité qu'exactement deux véhicules soient utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est $p(X = 2)$:
$p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}4468^2 \times (1 - 0{,}4468)^{10-2} \approx 0{,}0788$
3. La probabilité qu'au moins un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est $p(X \geqslant 1)$:
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}4468^0 \times (1 - 0{,}4468)^{10} \approx 0{,}9973$

Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.
Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620 214	610 156	575 038	578 282	555 239
Taux d'évolution annuel		−1,62 %	−5,76 %	0,56 %	−3,98 %
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		−1,62 %	−7,28 %	−6,76 %	−10,48 %

Partie A

1. Le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013 est donné par :
$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{575\,038 - 610\,156}{610\,156} \approx -0{,}057\,555 \text{ soit environ - 5,76 \%}$$
2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de −2,73 %.
Deux façons de justifier ce taux.
   - En vérifiant : on applique une baisse de 2,73 % par an en partant de l'année 2011.
   Baisser de 2,73 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{2{,}73}{100} = 0{,}9727$.
   Baisser de 2,73 % pendant 4 ans, c'est multiplier par $0{,}9727^4$.
   Le nombre d'abonnés en 2011 est de 620 214 ; avec cette baisse sur 4 ans, il serait de $620\,214 \times 0{,}9727^4 \approx 555\,210$ qui est proche de la valeur donnée pour 2015 : 555 239.
   - En calculant ce taux moyen qu'on appelle t_m.
   On passe de l'année 2011 à l'année 2015 en multipliant par $(1 + t_m)^4$.
   Le coefficient multiplicateur pour passer de 2011 à 2015 est $\dfrac{555\,239}{620\,214}$.
   On doit donc avoir $(1 + t_m)^4 = \dfrac{555\,239}{620\,214}$ donc $1 + t_m = \left(\dfrac{555\,239}{620\,214}\right)^{\frac{1}{4}}$ et donc
   $t_m = \left(\dfrac{555\,239}{620\,214}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx -0{,}0273$ qui correspond bien à un pourcentage de −2,73 %.

Partie B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais que l'on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.
En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.
On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année $(2011+n)$.
On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année $(2011+n)$.
On fixe donc $u_0 = 620$.

1. Perdre 10 %, c'est multiplier par 0,9; $620 \times 0,9 = 558$. On rajoute 52 milliers de nouveaux abonnés, donc il y aura $558+52 = 610$ milliers d'abonnés en 2012.
2. Il y a u_n milliers d'abonnés en $(2011+n)$; pour passer à l'année suivante, on en retire 10 % donc on arrive à $0,9u_n$, puis on en ajoute 52 milliers donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$, pour tout n.
3. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 520$. On a donc $u_n = v_n + 520$.

   a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 520 = 0,9u_n + 52 - 520 = 0,9(v_n + 520) - 468 = 0,9v_n + 468 - 468 = 0,9v_n$

   • $v_0 = u_0 - 520 = 620 - 520 = 100$

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 100$.

   b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 100$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.

   c. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 520$; or $v_n = 100 \times 0,9^n$ donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$.
4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.

   a. On complète l'algorithme suivant afin d'afficher l'année à partir de laquelle le quotidien sera en difficulté financière :

Variables	N un nombre entier naturel non nul U un nombre réel
Initialisation	Affecter à U la valeur 620 Affecter à N la valeur 0

Traitement	Tant que $U \geqslant 540$
	  Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 52$
	  Affecter à N la valeur $N+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher N

   b. On résout l'inéquation $u_n \leqslant 540$:

   $$u_n \leqslant 540 \iff 100 \times 0,9^n + 520 \leqslant 540 \iff 100 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,2$$
   $$\iff \ln\left(0,9^n\right) \leqslant \ln(0,2) \iff n\ln(0,9) \leqslant \ln(0,2) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)}$$

   c. Le quotidien est en difficulté financière quand $u_n < 540$ donc quand $n > \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)}$.

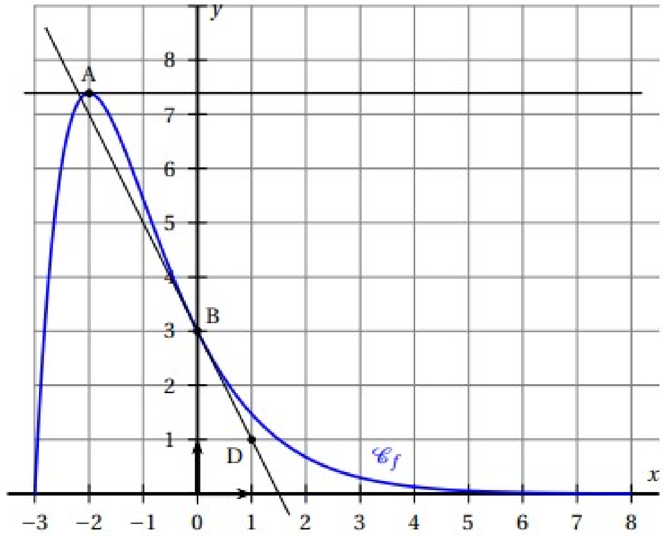
   Or $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \approx 15,3$ donc c'est au bout de 16 ans que le quotidien sera en difficulté financière, c'est-à-dire à partir de l'année $2011+16 = 2027$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 8]$. On note f' sa dérivée.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2. B est le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(0; 3)$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est horizontale. La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 et elle passe par le point D(1; 1).



1. $f'(-2) = f'(x_A) = 0$ car la tangente au point A est horizontale..
2. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en B à la courbe $\mathscr{C}_f$. Cette tangente est la droite (BD) donc a pour coefficient directeur $\dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{1-3}{1-0} = -2$; donc $f'(0) = -2$.
3. En $x = -2$ la tangente est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ donc la fonction f n'est pas convexe sur $[-2; 2]$.

Partie B

On admet désormais que la fonction f de la partie A est définie sur $[-3 ; 8]$ par $f(x) = (x+3)e^{-x}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	dériver $(x+3)*\exp(-x)$
	$\exp(-x)+(x+3)*(-\exp(-x))$
2	factoriser (dériver$(x+3)*\exp(-x)$)
	$(-x-2)*\exp(-x)$

1. D'après le logiciel de calcul formel, $f'(x)=(-x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$; or, pour tout x, $\mathrm{e}^{-x}>0$, $f'(x)$ est du signe de $-x-2$.
Donc $f'(x)>0$ sur $[-3\,;-2[$;
$f'(-2)=0$;
$f'(x)<0$ sur $]-2\,;8]$.

2. $f(-3)=0$, $f(-2)=\mathrm{e}^2\approx 7{,}39$ et $f(8)=11\,\mathrm{e}^{-8}\approx 0{,}0037$
On dresse le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$.

x	-3		-2		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$11\,\mathrm{e}^{-8}$

3. a. $f(0)=0<3$ et $f(-2)=\mathrm{e}^2>3$; on complète le tableau de variations de f entre -3 et -2 :

x	-3		α		-2		8
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$11\,\mathrm{e}^{-8}$

On déduit de ce tableau de variations que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3\,;-2]$.

b. On cherche un encadrement de α :

$$\left.\begin{array}{l} f(-2{,}9)\approx 1{,}82<3 \\ f(-2{,}8)\approx 3{,}21>3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\in[-2{,}9\,;-2{,}8] \qquad \left.\begin{array}{l} f(-2{,}83)\approx 2{,}88<3 \\ f(-2{,}82)\approx 3{,}02>3 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\alpha\in[-2{,}83\,;-2{,}82]$
Donc $-2{,}83$ est une valeur approchée de α à 0,01 près.

4. a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,8]$ par : $F(x)=(-x-4)\,\mathrm{e}^{-x}$.
$F'(x)=(-1)\,\mathrm{e}^{-x}+(-x-4)(-1)\,\mathrm{e}^{-x}=(-1+x+4)\,\mathrm{e}^{-x}=(x+3)\,\mathrm{e}^{-x}=f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[-3\,;\,8]$.

b. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=F(3)-F(0)=\left[-7\,\mathrm{e}^{-3}\right]-\left[-4\,\mathrm{e}^{0}\right]=4-7\,\mathrm{e}^{-3}$