CORRECTION DU DST

Exercice 1

1. Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$

D'une part 4x9 = 36

D'autre part – 6 x(– 6) = 36

La condition de colinéarité est vérifiée, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$

D'une part 4x9 = 36

D'autre part 5 x (– 7) = – 35

La condition de colinéarité n'est pas vérifiée, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2. On donne les points $A(-1;1)$ $B(3;2)$. Donner l'équation réduite de la droite (AB).

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 4(y-1)=x+1$

$\Leftrightarrow 4y-4=x+1$

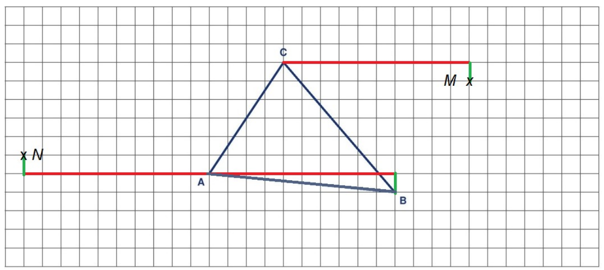
$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

La droite (AB) a pour équation réduite $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

Exercice 2

ABC est un triangle.

1. Sur le dessin ci-dessous, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.



$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow ABMC$ est un parallélogramme : M est construit comme image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow A=m[NB]$: N est construit comme image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2. I est le point tel que $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$.

2 méthodes.

Méthode avec la relation de Chasles :

I est le milieu du segment $[AC] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Or $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})-(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC})$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ CQFD

I est le milieu du segment $[AC]$.

Méthode analytique :

Plaçons nous dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1-x_I\\-y_I\end{pmatrix}$

alors $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2-2x_I=1-(-1)\\-2y_I=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_I=0\\y_I=\frac{1}{2}\end{cases}$

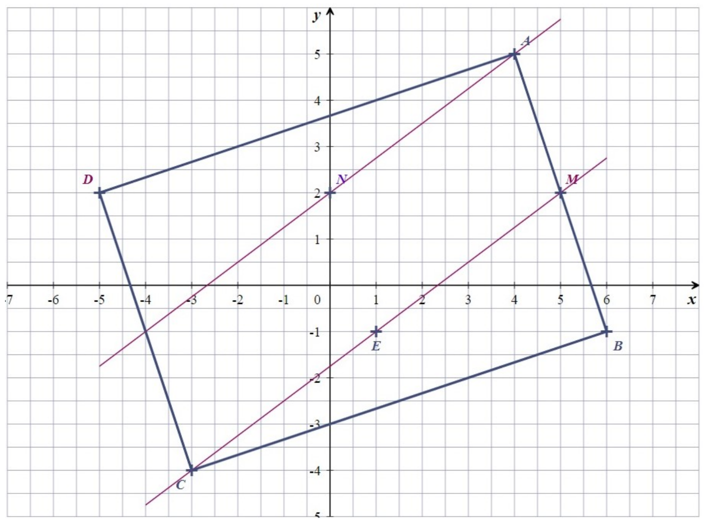
Or $\frac{x_A+x_C}{2}=0=x_I$ et $\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1}{2}=y_I$

donc I est le milieu du segment $[AC]$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Placer les points $A(4;5)$ $B(6;-1)$ $C(-3;-4)$ $E(1;-1)$ $N(0;2)$



2. a. Calculer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$.

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 5$ $\quad$ $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2$ $\quad$ donc $\quad M(5;2)$

b. Les points E, C, M sont-ils alignés ?

E, C, M sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or d'après les coordonnées des vecteurs, on a :

$\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EM}$ donc C, E, M sont alignés dans cet ordre.

3. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

b. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3-x_D\\-4-y_D\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = -3 - x_D\\-6 = -4 - y_D\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D = -5\\y_D = 2\end{cases}$$

Les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme sont $(-5;2)$

4. a. Calculer les distances AC et BD.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-11\\-3\end{pmatrix}$ on a donc $AC^2 = (-7)^2 + (-9)^2 = 130$

$BD^2 = (-11)^2 + (-3)^2 = 130$

On en déduit que :

$AC = BD = \sqrt{130}$

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier)

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ telles que $AC = BD$.

Or, si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc $ABCD$ est un rectangle. Il en résulte que ABC est rectangle en B.

5. Les droites (AN) et (EC) sont-elles parallèles ?

(AN) et (EC) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or d'après les coordonnées des vecteurs, on a :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{EC}$ donc $ANCE$ est un parallélogramme, et les droites (AN) et (EC) sont parallèles.