EXERCICE 1 — 6 POINTS

Les 1350 élèves de notre lycée Simone Weil sont répartis de la façon suivante :

	externes	demi-pensionnaires	Internes	total
filles	150	300	280	730
garçons	100	450	70	620
total	250	750	350	1350

1. Compléter le tableau ci-dessus sachant que $\frac{1}{3}$ des élèves sont des garçons demi-pensionnaires : $\frac{1}{3}$ x 1350 = 450
2. a. $A \cap B$: sous-population des garçons externes.
   $A \cup B$: sous-population des garçons ou des externes.

a. $P_A = \frac{n_A}{n_E} = \frac{250}{1350} = 0{,}1852 = 18{,}52\%$ $\quad P_B = \frac{n_B}{n_E} = \frac{620}{1350} = 0{,}4593 = 45{,}93\%$

$P_{A\cap B} = = \frac{n_{A\cap B}}{n_E} = \frac{100}{1350} = 0{,}0741 = 7{,}41\%$

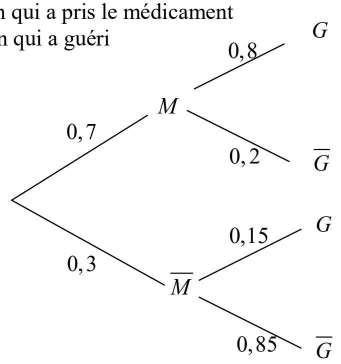
b. $P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_{A\cap B} = \frac{250}{1350} + \frac{620}{1350} - \frac{100}{1350} = \frac{770}{1350} = 0{,}5704 = 57{,}04\%$

3. $1350 - 805 = 545$; $\frac{545}{1350} = 0{,}4037 = 40{,}37\%$

EXERCICE 2 — 4 POINTS

Pour tester l'efficacité d'un médicament, on a demandé à un groupe de patients de servir de cobayes : 70% d'entre eux ont pris le médicament, les autres ont pris un placebo (c'est à dire une imitation de médicament, sans aucun principe actif). On a constaté que parmi celles qui ont pris le médicament, 80% des personnes ont guéri. Parmi celle qui ont pris un placebo,
15 % ont guéri.

1. M: population qui a pris le médicament
   G : population qui a guéri



2. Calculer la proportion des patients qui ont guéri à l'issue de l'expérimentation.

$p(G) = p(M \cap G) + p(\overline{M} \cap G)$ =0,7x0,8+0,3 x 0,15 = 0,56 + 0,045 = 0,605 = 60,5%

EXERCICE 3 — 3 POINTS

Le prix d'un objet a baissé de 28%.

1. Quel est le coefficient multiplicateur correspondant ?

Diminuer de 28% revient à multiplier par $c = 1 + t = 1 + \left(-\frac{28}{100}\right) = 0{,}72$

2. Par quel coefficient faut-il multiplier le cours de la matière première pour retrouver son cours initial ?

Il faut diviser par 0,72 ce qui revient à multiplier par $\frac{1}{0{,}72}$

$\frac{1}{0{,}72} = 1{,}3889$

3. A quel taux d'évolution correspond le coefficient multiplicateur trouvé à la question précédente ? Conclure en langage usuel.

$c = 1 + t \Leftrightarrow t = c - 1$

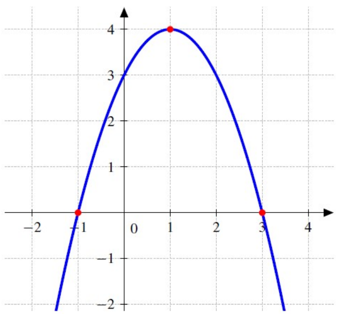
$t = 1{,}3889 - 1 = 0{,}3889 = 38{,}89\%$
Pour compenser une baisse de 28%, il faut lui faire succéder une hausse de 38,89%

EXERCICE 4 — 7 POINTS

La parabole suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \neq 0$.

On note Δ le discriminant de f.

1.



Affirmation 1 : $a = -1$ IMP
Affirmation 2 : $\Delta = -3$ F
Affirmation 3 : $\alpha = 4$ F
Affirmation 4 : $f(4) = 1$ F
Affirmation 5 : $c = 3$ V
Affirmation 6 : $f(3) = 0$ V

2. Tableau de signes de la fonction f

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$:

$\mathscr{S} =]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$

EXERCICE 5 — 4 POINTS

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-5x - 4 = -7x + 6$

Méthode : mettre les x d'un côté et les quantités de l'autre.

$-5x + 7x = 6 + 4$

$2x = 10$

b. $5x^2 + 5 = 7x^2 + 6x + 9$

Méthode : tout mettre dans le premier membre pour obtenir une équation type du second degré

$0 = 7x^2 - 5x^2 + 6x + 9 - 5$

$0 = 2x^2 + 6x + 4$

Calcul de Δ et on trouve $x = -1$ ou $x = -2$

c. $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)(6x - 2) = 0$

Méthode : règle du produit nul

$\left(\frac{1}{2}x - 5\right) = 0$ ou $(6x - 2) = 0$

$x = 10$ ou $x = \frac{1}{3}$

EXERCICE 6 — 6 POINTS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$

1. solutions de l'équation $2x^2 - 2x - 12 = 0$. On calcule Δ et on trouve $x = 3$ ou $x = -2$ on en déduit que les antécédents de 0 par la f sont 3 et -2.

2. tableau de variation de la fonction f : f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a > 0$ donc la parabole représentative de la fonction f est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-12,5$	$\nearrow$	

3. forme factorisée de $f(x)$: $f(x) = 2(x-3)(x+2)$

4. Donner le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. solutions de l'inéquation : $f(x) \leq 0$: $\mathcal{S} = [-2 ; 3]$

EXERCICE 7 — OPTIMISATION D'UNE PRODUCTION — 10 POINTS

Une entreprise produit artisanalement des jeux qu'elle vend 30 € pièce.

On suppose qu'elle parvient à vendre la totalité des jeux produits, mais pour des raisons matérielles, l'entreprise ne fabrique jamais plus de 50 pièces par jour.

Pour x jeux produits, le coût de fabrication est donné par l'expression :

$$C(x) = 2x^2 - 40x + 300.$$

1. Ensemble de définition de la fonction C : $D = [0 ; 50]$

2. Charges fixes : 300 €

3. Quantité de jeux à produire pour que les coûts soient de 550 €.
On résout l'équation suivante : $C(x) = 550 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 300 = 550 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x - 250 = 0$
On calcule $\Delta = 3600$ puis on trouve $x_1 = -5$ ou $x_2 = 25$. On en déduit que la quantité à produire pour que les coûts soient de 550€ est 25 articles. En effet, on ne peut pas produire une quantité négative.

4. a) $R(x) = 30x$

   b) $B(x) = R(x) - C(x) = 30x - (2x^2 - 40x + 300) = 30x - 2x^2 + 40x - 300 = -2x^2 + 70x - 300$

5. a) Tableau de signe de $B(x)$: il faut calculer les racines de $B(x)$.

   On calcule $\Delta = 2500$ puis on trouve $x_1 = 30$ et $x_2 = 5$.

   $B(x)$ est négatif à l'extérieur de ses racines. On a donc le tableau de signes suivant :

x	0		5		30		50
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   b) Quantité de jeu que doit produire l'entreprise pour être bénéficiaire : de 5 à 30 jeux

6. Déterminer pour quelle production l'entreprise réalise le bénéfice maximum, en précisant le montant de ce bénéfice maximum.

   Le bénéfice maximum est atteint pour une production de α jeux. $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = 17,5$

   soit 17 ou 18 articles (du fait de la symétrie de la parabole par rapport à $x = \alpha$, on a donc

   B(17) = B(18) =312 €