CORRECTION DU DST

Exercice 1

f est la fonction affine définie pour tout réel x, telle que $f(2) = -5$ et $f(-4) = 1$

1. $f(x)$ est de la forme $f(x) = mx + p$ avec m et p deux réels.

$$m = \frac{f(2) - f(-4)}{2-(-4)} = \frac{-5-1}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \,.$$

$f(x)$ est donc de la forme $f(x) = -x + p$

Déterminons p :

$f(2) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -2 + p = -5$

$\Leftrightarrow \quad p = -5 + 2$

$\Leftrightarrow \quad p = -3$

Pour tout réel x, $f(x) = -x - 3$

2. $-1 < 0$: f est une fonction affine de coefficient négatif donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow \; -x - 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow \; -x \geq 3$
$\Leftrightarrow \; x \leq -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

4. f est strictement monotone sur $[-3;4]$ donc on peut passer aux images dans l'inégalité.
Or f est décroissante sur $[-3;4]$, donc f change l'ordre sur $[-3;4]$.

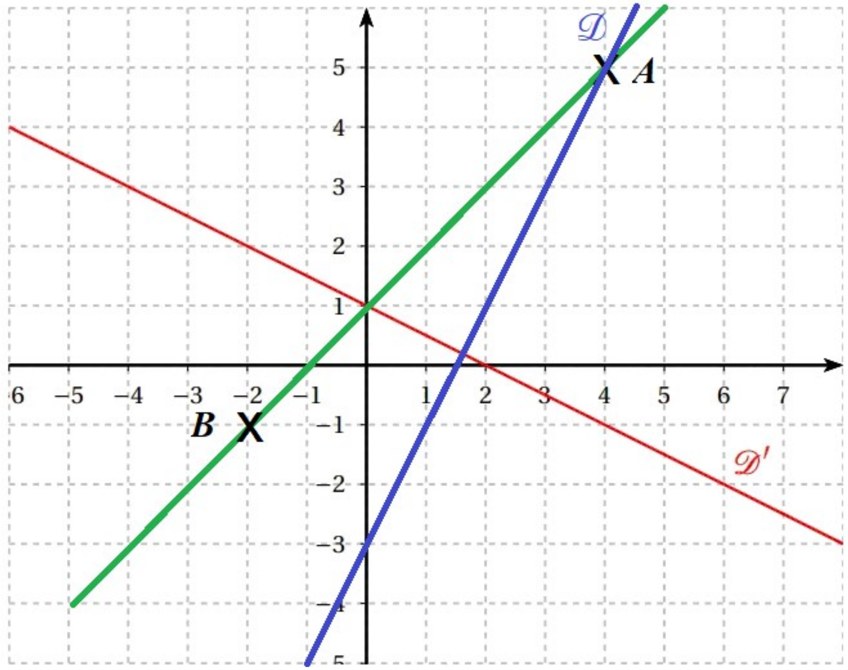
Ainsi,

Si $-3 \leq x \leq 4$ alors $f(-3) \geq f(x) \geq f(4)$
$\Leftrightarrow \quad f(4) \leq f(x) \leq f(-3)$
$\Leftrightarrow \quad -(4) - 3 \leq f(x) \leq -(-3) - 3$
$\Leftrightarrow \quad -7 \leq f(x) \leq 0$

Exercice 2

on considère les points $A(4;5)$; $B(-2;-1)$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = 2x - 3$ et la droite $\mathscr{D}$ ' tracée sur le graphique.

1. $\mathscr{D}$: $y = 2x - 3$



D'une part :
$y_B = -4$

D'autre part :
$2x_B - 3 = 2\times(-2) - 3$
$= -7$
$\neq y_B$

Donc $B \notin \mathscr{D}$.

D'une part :
$y_A = 5$

D'autre part :
$2x_A - 3 = 2\times(4) - 3$
$= 5$
$= y_A$

Donc $A \in \mathscr{D}$.

2. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère :

L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}$ étant égale à -3, $\mathscr{D}$ coupe l'axe des ordonnées en $P(0;-3)$.
$\mathscr{D} = (AP)$.

3. $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$

avec $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-5}{-2-4} = \dfrac{-6}{-6} = 1$

(AC) : $y = x + p$

Déterminons p à l'aide du point $A(4;5)$:

$y_A = x_A + p$

$\Leftrightarrow \quad 5 = 4 + p$

$\Leftrightarrow \quad p = 1$

L'équation réduite de (AB) est : $y = x + 1$

4. Déterminer graphiquement l'équation réduite de $\mathscr{D}'$.

   L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}'$ est $p = 1$. Son coefficient directeur est $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{2}$.

   Son équation réduite est donc $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

5. a. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont des coefficients directeurs différents, respectivement 2 et $-\dfrac{1}{2}$ elles sont donc sécantes.

   b. Les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ vérifient le système :

$$(S) : \begin{cases} y = 2x - 3 & (L1) \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} y = 2x - 3 & (L1) \\ -\dfrac{1}{2}x + 1 = 2x - 3 & (L1) = (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} y = 2x - 3 & (L1) \\ -\dfrac{5}{2}x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = 2 \times \left(\dfrac{8}{5}\right) - 3 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

le couple solution $\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$ correspond aux coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice 3

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2x - 5y = 16 & (L1) \\ x = 11 + 4y & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2(11 + 4y) - 5y = 16 & (L2) \text{ dans } (L1) \\ x = 11 + 4y & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 22 + 8y - 5y = 16 \\ x = 11 + 4y & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 3y = -6 \\ x = 11 + 4y & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} y = -2 \\ x = 11 + 4 \times (-2) & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Exercice 4

Au bar de la gare 5 amis attendent leur train. Ils ont commandé 2 cafés et 3 chocolats chauds. Le patron leur annonce qu'ils doivent payer 10,10 € mais ne détaille pas la facture.
Ils sont alors rejoints par 4 amis qui commandent 3 cafés et 1 chocolat chaud. Cette fois le patron leur demande 7,10 € mais ne détaille toujours pas la facture.
Afin que les amis puissent payer chacun leur part, déterminer le prix d'un café et le prix d'un chocolat chaud.
Soit x le prix d'un café et y le prix d'un chocolat chaud.

L'énoncé se traduit par le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 10{,}10 & (L1) \\ 3x + y = 7{,}10 & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2x + 3y = 10{,}10 & (L1) \\ y = 7{,}10 - 3x & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2x + 3(7{,}10 - 3x) = 10{,}10 & (L2) \text{ dans } (L1) \\ y = 7{,}10 - 3x & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2x + 21{,}30 - 9x = 10{,}10 & (L2) \text{ dans } (L1) \\ y = 7{,}10 - 3x & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} -7x = -11{,}20 \\ y = 7{,}10 - 3x & (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} x = 1{,}60 \\ y = 7{,}10 - 3 \times 1{,}60 = 2{,}30 \end{cases}$$

Un café est vendu 1,60 € et un chocolat est vendu 2,30 €.