correction de la composition trimestrielle

Compétences élémentaires

1. **a)** L'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f est l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de f .
On en conclut que $\mathscr{D}_f = [-4\ ;\ 3]$.

b) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses .
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S} = \{-3\ ;\ 1\}$.

2. **a)** Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\mathscr{S}_1 = \{-4\ ;\ 0\}$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points de $\mathscr{C}_1$ situés au-dessus de $\mathscr{C}_2$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $\mathscr{S}_2 =]-4\ ;\ 0[$.

3. Pour la première fonction , le tableau de variation est le suivant :

x	-4		-1		2		4
f	-2	↗	1	↘	-1	↗	$2,5$

Pour la seconde fonction , on obtient le tableau de variation ci-contre :

x	-4		-3		-1		$+\infty$
f	2	↗	3	↘	1	↗	

4. **a)**
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de l'axe des abscisses .
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de l'axe des abscisses .

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		$0,9$		$3,5$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) D'après le tableau de signe , l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-4\ ;0,9[\cup]3,5\ ;\ +\infty[$.

5. **a)** $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$. Le signe de $f(x) = -2x + 5$ est donné par le tableau ci-contre.

b) D'après le tableau de signe , l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{2}\ ;\ 3,5\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

6. **a)**
- $3x - 120 = 0 \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = \dfrac{120}{3} = 40$.
- $-5x + 15 = 0 \Leftrightarrow -5x = -15 \Leftrightarrow x = \dfrac{-15}{-5} = 3$.

b) D'après le tableau de signes , on en conclut que l'ensemble des solutions de $(3x - 120)(-5x + 15) \leqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ 3] \cup [40\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		3		40		$+\infty$
Signe de $3x - 120$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $-5x + 15$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7. **a)**
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $20-4x=0 \Leftrightarrow -4x=-20 \Leftrightarrow x=\dfrac{-20}{-4}=5$.

b) En utilisant ce tableau de signes , on en conclut que l'ensemble des solutions de $\dfrac{x-1}{20-4x} \geqslant 0$ est $[1~;~5[$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $20-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

8. **a)** Comme -0,8 et 0,2 sont deux nombres de l'intervalle $[-2~;~1]$, que -0,8 < 0,2 et que f est décroissante sur $[-2~;~1]$, on en déduit que $f(-0,8) > f(0,2)$.

b) Comme 1,35 et 2,6 sont deux nombres de l'intervalle $[1~;~3]$, que 1,35 < 2,6 et que f est croissante sur $[1~;~3]$, on en déduit que $f(1,35) < f(2,6)$.

9. D'après le tableau de variation de f , on peut affirmer que :

a) « Le maximum de f est 6 et il est atteint en $x=8$ »

b) « Le minimum de f est -10 et il est atteint en $x=7$ »

c) L'image de 7 par f est -10 .

d) Un antécédent de -1 par f est 0 .
Ce n'est pas le seul antécédent possible .
En effet , comme f est décroissante sur $[6~;~7]$ et que , sur cet intervalle , le minimum est égal à -10 et que le maximum est égal à 5 , -1 peut avoir un autre antécédent dans cet intervalle .

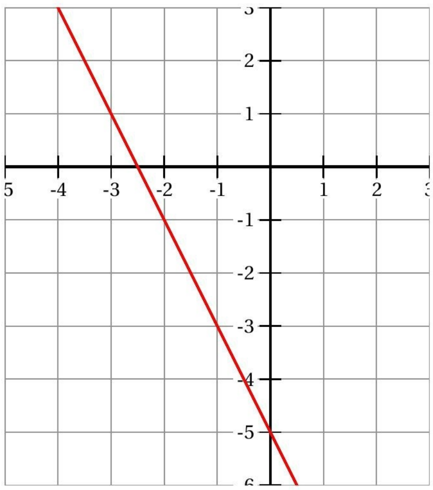
10. **a)** Pour tout réel x , $i(x)=(x-2)^2-x^2+3x-1=x^2-2\times x\times 2+2^2-x^2+3x-1=x^2-4x+4-x^2+3x-1=-x+3$.

b) Une fonction affine est une fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x)=ax+b$; où a et b sont deux constantes réelles .
Comme , pour tout réel x , $h(x)=3(2x-3)+5=6x-9+5=6x-4$, on peut affirmer que :
- les fonctions f , h et i sont affines ;
- la fonction i n'est pas affine .

11. Comme f est une fonction affine , l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x)=mx+p$.
En posant $x_1=10$ et $x_2=15$, on sait , grâce aux résultats du cours , que $m=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{18-17}{15-10}=\dfrac{1}{5}=0,2$.
Comme $f(10)=17$, on en déduit que $0,2\times 10+p=17 \Leftrightarrow p=17-2=15$.
On en conclut que , pour tout réel x : $f(x)=0,2x+15$.

12. **a)** Comme $-2<0$, on en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	



b) En calculant l'image de 500 par f , on obtient $f(500)=(-2)\times 500-5=-1005$.
Comme $f(x_A)=y_A$, on en conclut que la courbe représentative de f passe par le point A .

c) Comme $f(0)=(-2)\times 0-5=-5$ et $f(-4)=(-2)\times(-4)-5=3$ et que f est affine , sa représentation graphique est la droite passant par les points de coordonnées $(0;-5)$ et $(-4;3)$.

13. **a)** Le tableau de variation de la *fonction carrée* est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

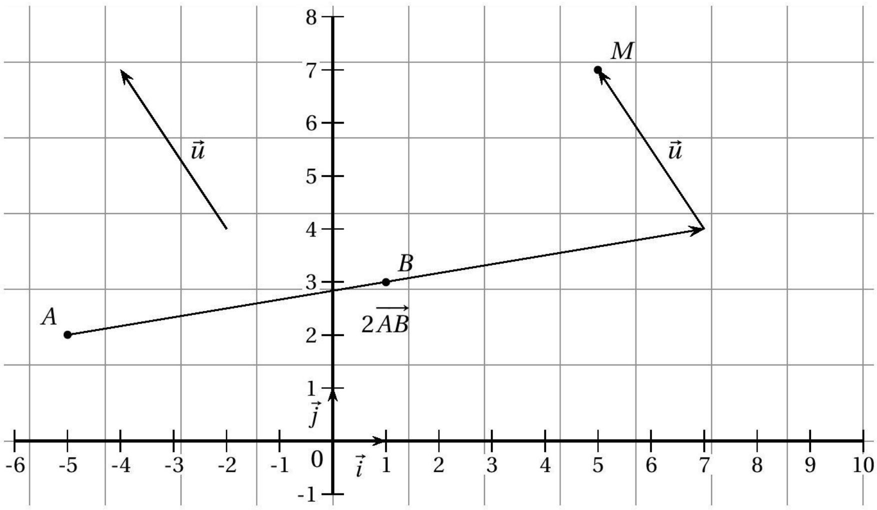
b) Comme $-0,000000001 > -0.000000002$ et que f est décroissante sur $]-\infty~;~0]$, on en conclut que $f(A) < f(B)$.

14. **a)** Sachant que $x \in [-4~;~2]$ d'après le tableau de variation de la *fonction carrée* le réel x^2 appartient à l'intervalle $[0~;~16]$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $3 \leq x^2 \leq 4$

$3 \leq x^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-2\,;-\sqrt{3}\,\right] \cup \left[\sqrt{3}\;;2\,\right]$

15.



Exercices de recherche

EXERCICE 1

Partie A

1. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\dfrac{(-2)+(-1)}{2};\dfrac{2+4}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2};3\right)$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)=((-1)-(-2)\,;\,4-2)=(1\,;\,2)$.
3. La distance AC est égale à $AC=\sqrt{(4-(-2))^2+(1-2)^2}=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$.
4. Voir sur la figure complète .
5. Pour savoir si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires , il suffit de calculer leur déterminant .
   Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_B\,;\,y_C-y_B)=(4-(-1)\,;\,1-4)=(5\,;\,-3)$.
   On en déduit que le déterminant de ces deux vecteurs est $\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & -1{,}5\end{vmatrix}=5\times(-1{,}5)-3\times(-3)=-7{,}5+9=-1{,}5\neq 0$.

   On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ **ne** sont **pas** colinéaires

Partie B

1. Voir sur la figure complète .
2. • Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(x_D-x_B\,;\,y_D-y_B)=(2-(-1)\,;\,-3-4)=(3\,;\,-7)$.
   On en déduit que le vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\times 3\,;\,\dfrac{1}{3}\times(-7)\right)=\left(1\,;\,-\dfrac{7}{3}\right)$
   • Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x_M-x_B\,;\,y_M-y_B)=(x_M+1\,;\,y_M-4)$.
   • On en déduit que les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} x_M+1=1\\ y_M-4=-\dfrac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=1-1=0\\ y_F=-\dfrac{7}{3}+4=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

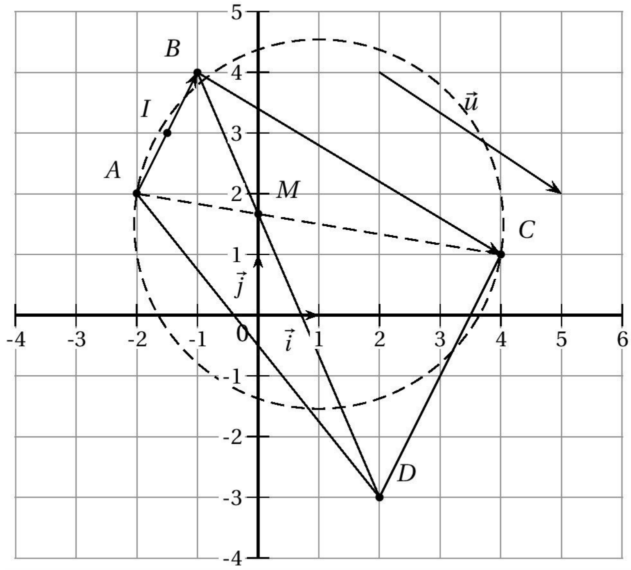
   On en conclut que le point M a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.
3. **a)** • Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\,;\,2)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_D\,;\,y_C-y_D)=(4-2\,;\,1-(-3))=(2\,;\,4)$.
   Comme $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$, on en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et non égaux et , par suite , que $ABCD$ est un trapèze .

   b) • Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x_M-x_A\,;\,y_M-y_A)=\left(0-(-2)\,;\,\dfrac{5}{3}-2\right)=\left(2\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_A\,;\,y_C-y_A)=(4-(-2)\,;\,1-2)=(6\,;\,-1)$.

- d'une part $2 \times (-1) = -2$ d'autre part $-\frac{1}{3} \times 6 = -2$
  Les produits en croix sont égaux.

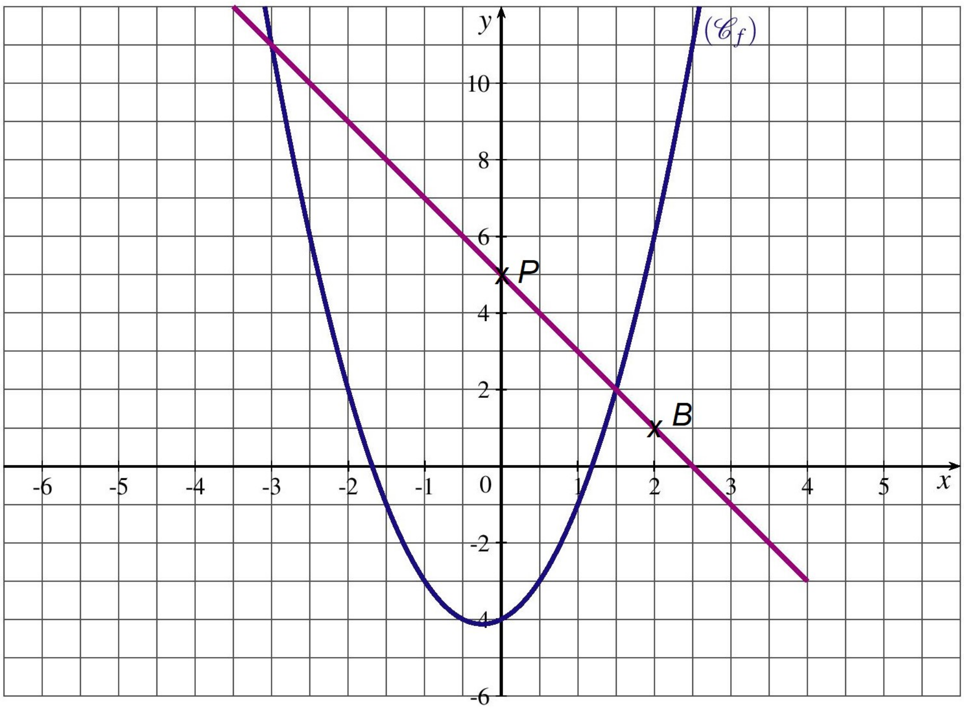
On en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et , par suite , que les points A , M et C sont alignés .

c) Le point B appartient au cercle de diamètre $[AC]$ si et seulement si le triangle BAC est rectangle en B .
Comme $AB = \sqrt{(-1-(-2))^2+(4-2)^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{(4-(-1))^2+(1-4)^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ et que (d'après les calculs effectués dans la première partie) $AC = \sqrt{37}$, on en déduit que : $AB^2+BC^2 = 5+34 = 39$ et $AC^2 = 37$.
Comme $AB^2+BC^2 \neq AC^2$, on en conclut , grâce à la contraposée du théorème de Pythagore , que le triangle BAC **n'**est **pas** rectangle en B et , par suite , que B **n'**appartient **pas** au cercle de diamètre $[AC]$



EXERCICE 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2+x-4$.
Sa courbe représentative notée $(\mathscr{C}_f)$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. a) $f(x)$ est de la forme ax^2+bx+c donc f est une fonction polynôme du second degré. Sa courbe représentative dans un repère orthogonal est une parabole.

b) $A\left(-\frac{5}{2};6\right) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f\left(-\frac{5}{2}\right)=6$

or $f\left(-\frac{5}{2}\right)=2\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)-4$

$=2\left(\frac{25}{4}\right)-\frac{5}{2}-4$

$=\frac{25}{2}-\frac{5}{2}-4$

$=\frac{20}{2}-4$

$=6$ donc $A\left(-\frac{5}{2};6\right) \in \mathscr{C}_f$

c) $f(x)=-4 \Leftrightarrow 2x^2+x-4=-4$

$\Leftrightarrow 2x^2+x=0$

$\Leftrightarrow x(2x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $2x+1=0$ d'après la règle du produit nul.

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$

2. g est une fonction affine d'ordonnée à l'origine $p=5$, donc sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est une droite passant par le point $P(0;5)$.
De plus, $g(2)=1$ donc $B(2;1) \in \mathscr{C}_g$.

3. a) Pour tout réel x :

$= 2x^2+x-4+2x-5$

$= 2x^2+3x-9$

or, pour tout réel x :

$(x+3)(2x-3) = 2x^2-3x+6x-9$

$= 2x^2+3x-9$

$= f(x)-g(x)$

b) Pour tout réel x :

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow (x+3)(2x-3) \leq 0$

Etudions le signe de ce produit à l'aide d'un tableau de signes.

$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \quad 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in \left[-3;\frac{3}{2}\right]$

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Graphiquement, la parabole est située en dessous de la droite sur l'intervalle $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$