3) Nombre dérivé des fonctions usuelles

On admet les résultats suivants :

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$
• constante, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto c$	0
• identité, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x$	1
• affine, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax+b$	a
• carré, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2$	$2x$
• cube, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^3$	$3x^2$
• inverse, définie sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$: $x \mapsto \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
• racine carrée, définie sur $[0\,;+\infty[$: $x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x>0$
• trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax^2+bx+c$; $a \neq 0$	$2ax+b$

Exemple :
Si f est la fonction telle que $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$,
$f'(-1)=3\times(-1)^2=3$.
Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est 3.

III. Fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

1) Définitions :

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

où a, b, c, d sont quatre réels tels que $a \neq 0$.
On appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x)=2x^3-3x^2+5x-1$.

Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :
On fait tomber l'exposant, puis on le diminue d'une unité. La dérivée de x est égale à 1 et la dérivée d'une constante est nulle :

$$f(x) = 2x^{\cancel{3}\;2} \quad -3x^{\cancel{2}} \quad +5\cancel{x} \quad \cancel{-1}$$

$$f'(x) = 3 \times 2x^{2} \quad -2 \times 3x \quad +5$$

Exemples : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ e) $l(x) = -4x^3 + 1$ f) $m(x) = -x^3 + 7x$

solution :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3 \times x^2 - 2 \times 3x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ donc $g'(x) = 3 \times 5x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ donc $h'(x) = -2 \times 3 \times x^2 - 2 \times 3x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3 \times x^2 + 2 \times x = -3x^2 + 2x$

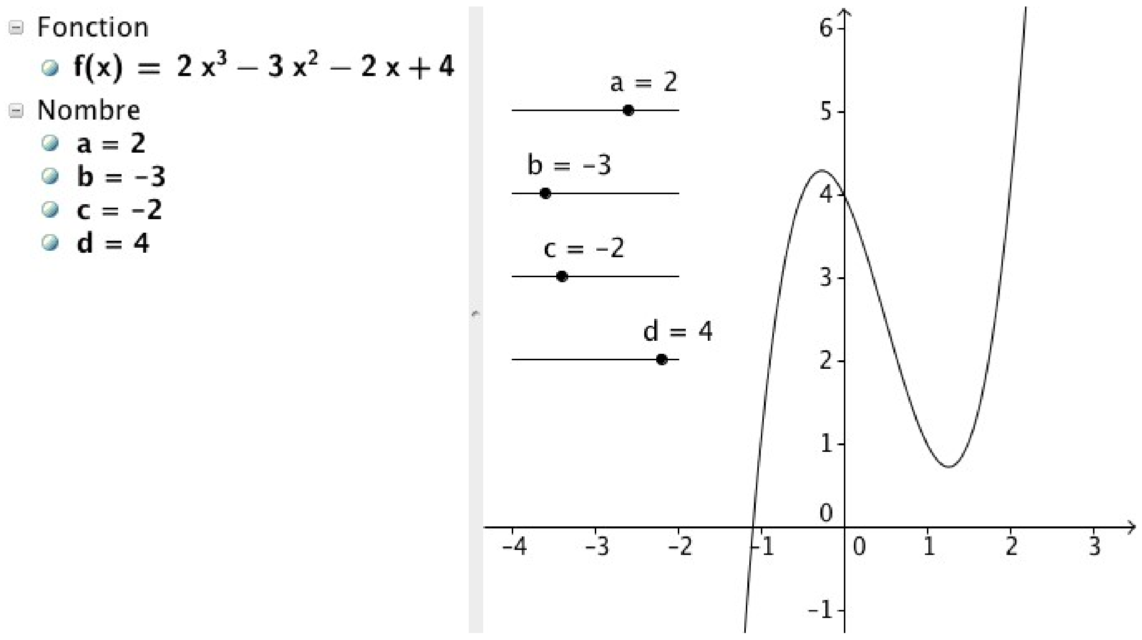
e) $l(x) = -4x^3 + 1$ donc $l'(x) = -3 \times 4x^2 = -12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3 \times x^2 + 7 = -3x^2 + 7$

2) Variations d'une fonction polynôme du troisième degré

a) Observation sur quelques exemples

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on observe les variations de quelques fonctions polynômes du troisième degré.



b) Etude des variations à l'aide de la fonction dérivée

Théorème (rappel) : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
Les variations de f sur I se déduisent du signe de sa dérivée f ' sur I.

- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo EDPuzzle

EXEMPLE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$.

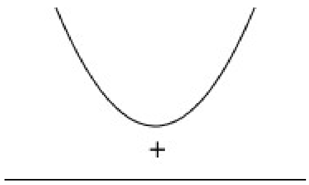
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

Solution :

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 4x + 2$ est égal à $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8$

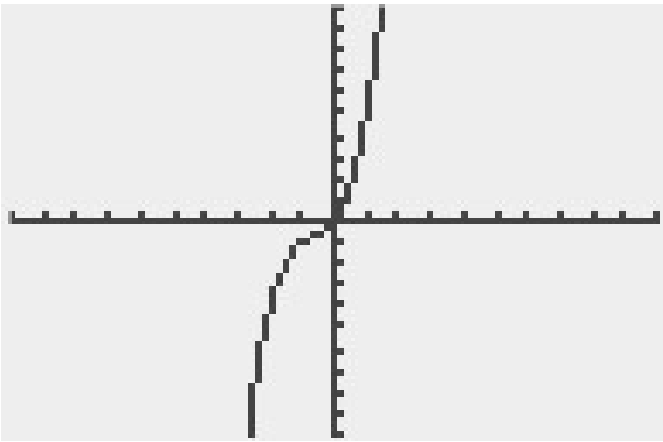
$\Delta < 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ ne possède pas de solution.
Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée vers le haut (sens « cuvette »).
La dérivée est donc positive pour tout x.



3) Les variations de f sur $\mathbb{R}$ se déduisent du signe de sa dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$\nearrow$	

4)



EXEMPLE 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

Solution :

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2 \times \frac{9}{2}x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$.

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

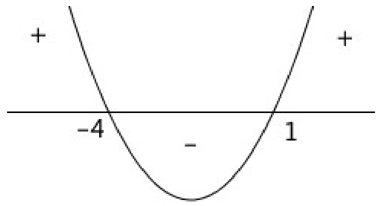
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

$\Delta > 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$$

Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée vers le haut (sens « cuvette »).

On a donc la configuration suivante qui permet de déduire que la dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -4 et 1.



3) Les variations de f sur $\mathbb{R}$ se déduisent du signe de sa dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61 \text{ et } f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}.$$

4)