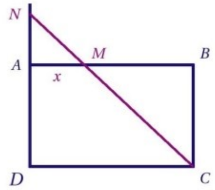
## Correction du devoir maison




$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 5$.
$M$ est un point du segment $[AB]$ distinct de $B$.
La droite $(CM)$ coupe la droite $(AD)$ en $N$

1. On pose $AM = x$
   a) Quelles sont les valeurs possibles du réel $x$ ?
   b) Exprimer la distance $AN$ en fonction de $x$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;8[$ par $f(x) = \dfrac{40}{8-x} - 5$.
   Etudier les variations de la fonction $f$.
3. Pour quelles valeurs de $x$ la distance $AN$ est-elle comprise entre 3 et 20 ?
4. Est-il possible que $AN \geqslant 1995$ ?

1. a) Le point $M$ est mobile entre les points $A$ et $B$, et on note $x$ la distance $AM$.
Lorsque $M$ est en $A$ on a $x = 0$ ; lorsque $M$ est en $B$ on a $x = AB = 8$
$x \in [0;8[$ crochet ouvert en 8 : en effet, par hypothèse, $M$ est distinct de $B$.

b) Dans le papillon de nœud $M$, les points $B, M, A$ et $C, M, N$ sont alignés dans cet ordre.
Les droites $(AN)$ et $(BC)$ sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MC} = \frac{AN}{BC}$$

**rappel** : on commence toujours par le sommet commun aux 2 triangles semblables.

Avec $AM = x$ $MB = 8 - x$ , par produit en croix, on a donc : $\boxed{AN = \dfrac{AM \times BC}{MB} = \dfrac{5x}{8-x}}$

2. Montrons que $AN = f(x)$

Pour tout $x \in [0;8]$, 
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{40}{8-x} - 5 \\ &= \frac{40}{8-x} - \frac{5}{1} \\ &= \frac{40 \times 1 - 5(8-x)}{8-x} \\ &= \frac{5x}{8-x} \\ &= AN \end{aligned}$$

**Etudions les variations de $f$ sur [0 ; 8[**

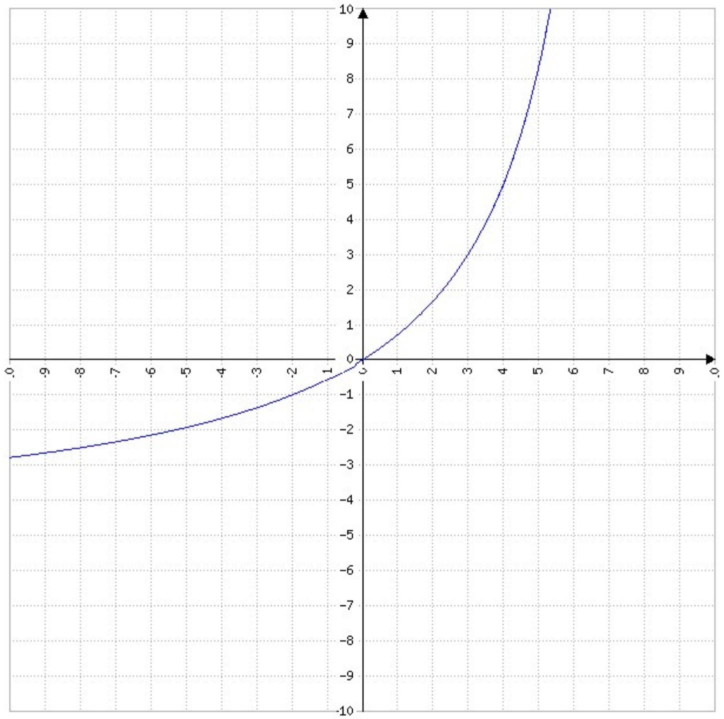
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \le a < b < 8$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

**Méthode :** on utilise un algorithme de calcul mental pour calculer l'image d'un nombre.

- (1) choisir un nombre
- (2) prendre son opposé
- (3) ajouter 8 à l'opposé
- (4) calculer l'inverse du résultat
- (5) multiplier ce résultat par 40
- (6) retrancher 5.

| | | |
|---|---|---|
| | $0 \le a < b < 8$ | (1) |
| $\Leftrightarrow$ | $0 \ge -a > -b > -8$ | (2) |
| $\Leftrightarrow$ | $8 \ge 8-a > 8-b > 0$ | (3) $8-a$ et et $8-b$ sont deux réels de $]0;8]$ |
| $\Leftrightarrow$ | $\frac{1}{8} \le \frac{1}{8-a} < \frac{1}{8-b}$ | (4) la fonction inverse est décroissante sur $]0;8]$ |
| $\Leftrightarrow$ | $\frac{40}{8} \le \frac{40}{8-a} < \frac{40}{8-b}$ | (5) |
| $\Leftrightarrow$ | $0 \le \frac{40}{8-a} - 5 < \frac{40}{8-b} - 5$ | (6) |
| $\Leftrightarrow$ | $0 \le f(a) < f(b)$ | |

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ conserve l'ordre sur } ]0;8] \text{ donc elle est croissante sur } ]0;8]}$.




3. $3 \le AN \le 20 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \le \dfrac{5x}{8-x} \le 20$

*On a donc une double inégalité à résoudre, que l'on peut présenter sous la forme d'un système d'inéquations, matérialisant ainsi que les deux inégalités doivent être vérifiées simultanément.*

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{8-x} \le 20 \\ \dfrac{5x}{8-x} \ge 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x}{8-x} - 20 \le 0 \\ \dfrac{5x}{8-x} - 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-20(8-x)}{8-x} \le 0 \\ \dfrac{5x-3(8-x)}{8-x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{25x-160}{8-x} \le 0 \\ \dfrac{8x-24}{8-x} \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \left[0;\dfrac{32}{5}\right] \\ x \in [3;8[ \end{cases}$$

Dressons les tableaux de signes de ces 2 quotients et considérons l'**intersection** des deux ensembles solution trouvés.

$25x - 160 = 0$ $\qquad$ $8x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{32}{5}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow x = 3$

| $x$ | $0$ | | $\frac{32}{5}$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $25x-160$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $8-x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{25x-160}{8-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $8x-24$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $8-x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{8x-24}{8-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\left[0;\frac{32}{5}\right] \cap [3;8[ = \left[3;\frac{32}{5}\right]$$

Conclusion :

$$\boxed{3 \le AN \le 20 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[3;\frac{32}{5}\right]}$$

**Remarque de méthode :** pour ces tableaux de signes, il n'était pas utile de placer la ligne du signe de $(8 - x)$. En effet, pour tout $x \in [0;8[$, $(8 - x) > 0$. Donc le quotient est du signe du numérateur.

**Remarque de méthode :** la deuxième expression permet de travailler avec la double inégalité et sera plus efficace.

$$\begin{aligned} 3 \le AN \le 20 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \le \frac{40}{8-x} - 5 \le 20 \\ &\Leftrightarrow \quad 8 \le \frac{40}{8-x} \le 25 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{8} \ge \frac{8-x}{40} \ge \frac{1}{25} \\ &\Leftrightarrow \quad 5 \ge 8-x \ge \frac{8}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \ge -x \ge -\frac{32}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{32}{5} \le x \le 3 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} AN \ge 1995 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5x}{8-x} \ge 1995 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5x-1995(8-x)}{8-x} \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x - 1995(8-x) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2000x - 15960 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \ge 7{,}98 \end{aligned}$$

$x$ étant compris entre 0 et 8, ce problème admet donc bien une solution.
$AN \ge 1995 \Leftrightarrow \quad 7{,}98 \le x < 8$